ЛУЧЕВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭНЕРГИИ В ПУЧКЕ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Введение

Коррекция формы волнового фронта пучка лазерного излучения, в принципе, позволяет перераспределить энергию в пучке в области его пересечения с целевой поверхностью [1-5]. Например, можно выравнять интенсивность гауссова пучка или получить распределение энергии заданного вида, необходимое для каких-либо технологических операций.

Физически такая коррекция осуществляется с помощью фазовых элементов различного вида со сложной формой поверхности, определяемой в ходе решения конкретной обратной оптической задачи по управлению когерентным полем лазерного излучения. Эти элементы могут реализовываться как с помощью адаптивных зеркал, так и в виде тонких фазовых корректоров, причем оба варианта имеют свои преимущества и недостатки [5]. Так, адаптивные зеркала, как правило, могут вносить лишь небольшую коррекцию - до нескольких длин волн, а тонкие фазовые корректоры требуют более высокого качества волнового фронта падающего пучка.

Как правило, в реальных технических системах числа Френеля имеют величины порядка сотен и более и хорошо выполняются условия параксиальности (углы наклона лучей и оптической оси менее 1/10 радиан). Это дает возможность проводить анализ задач в параксиальном приближении геометрической оптики, то есть рассматривать лучи, идущие из точек (x,y) начальной плоскости в точки (u,v) выходной плоскости, отстоящей от начальной на расстояние f, намного большее, чем сечение пучка в начальной и выходной плоскостях.

Настоящая работа посвящена формулировке аналитических моделей и разработке некоторых приемов для построения фазовых функций, которые могут быть полезны при решении обратных задач, указанных выше. Рассматриваются использование алгебры полиномов и рациональных функций для вычисления фазовых функций, а также комплексно-аналитические отображения и неявные способы задания фазовых функций. Наиболее подробно разбирается полиномиальная модель.

Постановка задачи

Для получения заданного преобразования энергии когерентного поля в параксиальном приближении геометрической оптики, то есть для получения в некоторой области выходной плоскости заданного или близкого к заданному распределения энергии, нужно найти такой эйконал (или фазовую функцию) поля $P(x,y)$ в исходной плоскости (управляемом сечении пучка), который является для этого наилучшим.

Эйконал поля в исходной плоскости складывается из эйконала поля, падающего на фазовый корректор, и эйконала самого корректора (который надо определить).

Эйконал $P(x,y)$ задает отображение исходной плоскости в выходную плоскость (соответствующее ходу лучей) по формулам (см. [1,6]):

$$u(x,y) = f \times P_x(x,y), \quad (x,y) \in S$$
$$v(x,y) = f \times P_y(x,y), \quad (u,v) \in R. \qquad (1.1)$$

Здесь обозначено:

(x,y) – координаты в области S исходной плоскости;

(u,v) – координаты в области R выходной плоскости;

f – расстояние между этими плоскостями;

P_x, P_y – частные производные $P(x,y)$ по x,y.

Далее всюду полагаем для краткости обозначений $f=1$.

Якобиан $J(x,y)$ отображения

$$W_p : (x,y) \to (u,v), \qquad (1.2)$$

заданного (1.1), определяет преобразование поверхностной плотности энергии от точки (x,y) к точке (u,v):

$$I_0(u,v) = J_p(x,y) \times I_i(x,y), \qquad (1.3)$$

где

I_i – интенсивность поля в области S;

I_0 – интенсивность поля в области R;

$u = u(x,y)$, $v = v(x,u)$.

$$J_p(x,y) = u_x v_y - u_y v_x = P_{xx}P_{yy} - P^2_{xy}. \qquad (1.4)$$

В случае $P(x,y) = f(x) + g(y)$ имеет место факторизация (разделение переменных) в якобиане $J_p = f''(x)g''(y)$ и обратно; для якобиана такого типа легко строится $P(x,y)$ путем двухкратного взятия первообразных для каждого из множителей.

Поскольку $I_i(x,y)$ считается известной, а $I_0(u,v)$ задана (нужно получить такую), то основным типом задачи является нахождение эйконала $P(x,y)$, задающего отображение (1.2) с правильным якобианом – преобразование интенсивности I_i в S, а интенсивности I_0 в R.

Как правило, можно считать, что S – круг с центром в начале координат ($x=0$, $y=0$), но могут встречаться и более сложные области (скажем, при рассмотрении многосегментных адаптивных систем), даже невыпуклые или неодносвязанные.

Можно рассмотреть также системы с несколькими последовательными коррекциями волнового фронта (преобразованиями) в плане их возможностей по перераспределению энергии пучка по сравнению с однократной коррекцией.

Отличие системы с двумя последовательными преобразованиями от системы с одним преобразованием состоит прежде всего в том, что при двух последовательных коррекциях происходит подстановка новых координат во второе преобразование; при этом в полиномы, задающие второе преобразование, подставляются вместо независимых переменных полиномы от других независимых переменных (координат в исходной плоскости системы). Важно то, что при этом задача становится существенно нелинейной по коэффициентам первого полинома. Кроме этого, необходима коррекция или учет искривления волнового фронта при первом преобразовании, которое только приближенно является полиномиальным.

Однако, если пренебречь малыми по величине добавками к искривлению волнового фронта, что всегда возможно в параксиальном приближении, то композиция двух преобразований с полиномиальной фазой снова задается полиномами, хотя и большой степени.

Можно ли сделать то же преобразование за один шаг? Нет. И пример такой композиции легко построить:

$$P(x,y) = x^2 + xy + 2y^2, \quad Q(x,y) = u^2 + 2uv.$$

Композиция задается формулами:

$$U(x,y) = Q_u(P_x(x,y),\ P_y(x,y));$$

$$V(x,y) = Q_v(P_x(x,y),\ P_y(x,y)).$$

$$U_y = Q_{uu}P_{xy} + Q_{uv}P_{yy},$$

$$V_x = Q_{uv}P_{xx} + Q_{vv}P_{xy}.$$

Если $P_{xx} \neq P_{yy}$ или $Q_{uu} \neq Q_{vv}$, то в общем случае не выполняется необходимое условие существования для фазовой функции, задающей композицию:

$$U_y = V_x. \qquad (*)$$

В нашем примере

$$U = 2u + 2v = 2(P_x + P_y) = 2(3x + 5y),\ U_y = 10,$$

$$V = 2u = 2P_x = 2(2x + y),\ V_x = 4.$$

Таким образом, встает задача о синтезе системы с двумя коррекциями для преобразований, не удовлетворяющих условию существования (*) системы с одной коррекцией, и сопутствующая задача о декомпозиции таких преобразований.

Разумно считать, что $I > 0$ всюду в области S; тогда для определения $P(x,y)$ имеем уравнение:

$$(P_{xx}P_{yy} - P_{xy}^2) = I_0(P_x,\ P_y)/I_1(x,y). \qquad (1.5)$$

Заметим, что это уравнение надо дополнить условием, что отображение (1.2) накрывает всю область R и если это отображение не взаимно однозначно, то перед левой частью (1.5) надо добавить знак суммирования по всем прообразам точек (u,v):

$$\sum_{w(x,y)=(u,v)} I_1(x,y)\ J_p(x,y) = I_0(u,v). \qquad (1.6)$$

Впрочем, мы будем рассматривать преимущественно отображения взаимно однозначные почти всюду (на множестве полной меры), так как при наложении образов частей области S в области R возникнет когерентная интерференция, что делает интенсивность I_0 в R неустойчивой по отношению к малым искривлениям корректора, неоднородности толщины его подложки и т.п., то есть ухудшает качество реального преобразования, вызывая сильную спекл-структуру.

Уравнение (1.5) заметно упрощается только в случае $I_0 = \mathrm{const}$, иначе его правая часть может содержать безнадежно сложное дифференциальное или псевдодифференциальное выражение даже при простых функциях I_i, i_0. Полное решение его вряд ли возможно, но многое может дать и исследование некоторых классов функций $P(x,y)$, удовлетворяющих уравнениям типа (1.5).

2. Полиномиальные отображения

В этом разделе мы рассмотрим проблему синтеза эйконала $P(x,y)$ в виде полинома от x,y. Выбор этого класса функций для нахождения приближенных решений уравнения (1.5) обоснован несколькими мотивами.

Во-первых, это эффективный путь ограничения размерности задачи, при котором фазовая функция автоматически получается гладкой (что практически важно), и любая гладкая функция может быть равномерно аппроксимирована полиномами в круге. Во-вторых, задача решения нелинейного уравнения в частных производных сводится к алгебраическим уравнениям, и, хотя вычисления с полиномами от двух переменных достаточно высокой степени довольно громоздки, их можно провести быстро и без ошибок с помощью системы аналитических вычислений (САВ) на ЭВМ. Наконец, значения функции, заданной в виде полинома, можно быстро вычислять с помощью простой программы, что удобно как для применения в адаптивных системах, так и для синтеза фазовых корректоров.

Задание фазовых функций полиномами или с помощью другого набора функций можно рассматривать и как модель адаптивной системы, в которой данный набор функций является функциями отклика адаптивного зеркала. Многие свойства такой модели мало зависят от выбора системы функций.

Будем задавать полиномы через коэффициенты в обычном базисе

$$P(x,y) = \sum_{m,n} a_{mn} x^m y^n. \qquad (2.1)$$

Это удобно для вычисления произведений полиномов, хотя и усложняет формулы для дифференцирования. Первые коэффициенты $P(x,y)$ имеют ясный физический смысл: коэффициенты при первых степенях x,y определяют смещение пучка в выходной плоскости, а коэффициенты при членах второй степени - геометрическую расходимость и астигматизм пучка.

Заметим, что если эйконал $P(x,y)$ - полином, то полиномами будут задаваться и отображение (1.2) и его якобиан (1.4).

Одним из интересных классов полиномиальных преобразований $w\colon S \to R$ являются преобразования с постоянным якобианом $J = \mathrm{const}$. За счет нормировки можно считать, что либо $J=1$, либо $J=0$. Случай $J=-1$ сводится к $J=1$ заменой $x \to -x$.

Преобразования с $J=1$ в случае $S=R$ (например, круг в круг) образуют полугруппу, "размеры" которой характеризуют степень неединственности полиномиального отображения w области S в любую другую область с любым заданным якобианом; это видно при рассмотрении композиции

$$S \xrightarrow{w} S \xrightarrow{z} R. \qquad (2.2)$$

Если $J_w = 1$, то $J_{zow} = J$ и композиция отображений w,z будет полиномиальным отображением, если z и w таковы.

Преобразования с $J=1$ интересны и практически, например, такие, как изменение формы сечения пучка с постоянной интенсивностью (задачи типа "круг в квадрат"), то есть фокусировка пучка круглого сечения в квадратную область.

Рассмотрим алгебраические уравнения на коэффициенты $P(x,y)$, соответствующее условию $J=\text{const}$. Так как

$$
\begin{aligned}
&P(x,y) = \sum_{m,n} a_{mn}x^m y^n, \\
&P_{xx} = \Sigma(m+2)(m+1)a_{m+2n}\ x^m y^n, \\
&P_{yy} = \Sigma(n+2)(n+1)a_{m,n+2}\ x^m y^n, \\
&P_{xy} = \Sigma(m+1)(n+1)a_{m+1,n+1}\ x^m y^n,
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

то равенство $J_p = P_{xx}P_{yy} - P^2_{xy} = \Sigma\, b_{m,n}\ x^m y^n = \text{const}$ дает

$$b_{0,0} = a_{2,0}\ a_{0,2} - a^2_{1,1} = \text{const} \tag{2.4}$$

(свободный член полинома $J(x,y)$ + равенство нулю остальных коэффициентов полинома $J(x,y)$; они выражаются в виде квадратичных форм от коэффициентов $a_{m,n}$).

Поэтому условия $J=0$ и $J=1$ на коэффициенты $a_{m,n}$ очень близки. Это дает возможность легко преобразовывать друг в друга эйконалы $P(x,y)$ для этих двух случаев.

Интересно отметить, что в параксиальном приближении якобиан отображения $J_p = P_{xx}P_{yy} - P^2_{xy}$ совпадает с гауссовой кривизной поверхности фазовой функции

$$K = (P_{xx}P_{yy} - P^2_{xy})/(1 + P^2_x + P^2_y);\ |P_x|,\ |P_y| << 1.$$

Как связаны известные в геометрии свойства поверхностей постоянной кривизны со свойствами фазовых функций? Что физически представляет из себя отображение р $J=0$? За исключением вырожденного случая (отображения в точку, когда $P(x,y)$ - полином первой степени), это отображение в алгебраическую кривую (см. [2-4]), так как ранг матрицы касательного отображения

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} \\ P_{xy} & P_{yy} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

может в этом случае принимать только значение 0 или 1. Значению 0 соответствует $P_{xx} = P_{xy} = P_{yy} = 0$. Если полином $P(x,y)$ имеет степень выше 1, то эти равенства определяют в области S алгебраическое подмногообразие соразмерности не менее 1 (то есть меры 0), а для $P(x,y)$ общего положения - подмногообразие соразмерности 3 (пустое множество), поэтому отображение с $J=0$ почти всюду имеет ранг 1, то есть является отображением плоской области S в кривую, почти всюду гладкую (для $P(x,y)$ общего положения - просто гладкую).

Наличие данной связи между отображениями, сохраняющими поверхностную плотность энергии ($J=1$), и отображениями в кривые ($J=0$) совсем не очевидно и показывает еще раз полезность применения здесь алгебры полиномов.

2.1. ОТОБРАЖЕНИЯ В КРИВУЮ

Как было показано выше, в случае вырождения якобиана $J_p(x,y)$, полином $P(x,y)$ определяет отображение области в исходной плоскости в некоторую кривую.

Как связан вид этой кривой и распределение энергии на ней с коэффициентами полинома? Ранг матрицы Якоби (2.5) для отображения в кривую не превосходит единицы (иначе отображение локально обратимо и не может быть отображением в кривую), а в неособых точках он равен единице. Из равенства единице ранга матрицы Якоби следует, что существует ненулевой вектор (a,b) : $(au + bv)_x = (au + bv)_y = 0$, что означает нормальность направления (au, bv) к искомой кривой. Ясно, что можно взять $a = y_x$, $b = -u_y$, то есть вектор $(v_x, -u_y)$ нормален к кривой, а вектора (u_x, v_x), (u_y, v_y) касательны к ней.

2.1.1. Уравнения для фазовой функции

Рассмотрим уравнение кривой, в которую отображается исходная область $f(u,v) = 0$. Если $P(x,y)$ - фазовая функция для данного отображения, то, подставляя $u = P_x$, $v = P_y$ и дифференцируя уравнение кривой, имеем:

$$f_u P_{xx} = -f_v P_{xy},\ f_u P_{xy} = -f_v P_{yy}. \tag{2.6}$$

Система уравнений (2.6) задает необходимые условия, которым должна удовлетворять любая фазовая функция, осуществляющая отображение в кривую $f(u,v) = 0$.

Заметим, что, поскольку f_u, f_v - функции от P_x, P_y, то эти уравнения нелинейны по P, то есть по коэффициентам полинома $P(x,y)$, кроме случая, когда f_u, f_v - константы, $f(u,v) = Au + Bv$, то есть это отображение в прямую. В этом случае фазовая функция зависит только от одной переменной. Без ограничения общности можно считать, что $P(x,y) = P(x)$.

В общем случае, даже когда $P(x,y)$ - полином, по-видимому, можно находить решения системы уравнений на его коэффициенты, получающиеся из (2.6), только численно. Аналитические алгоритмы в САВ могут лишь явно выписать эту систему.

2.1.2. Случай полинома степени три

Случай, когда фазовая функция $P(x,y)$ ищется в виде полинома третьей степени, является простейшим нетривиальным случаем. Здесь еще можно все вычисления провести вручную (без помощи САВ).

Пусть $P(x,y) = \sum\limits_{m,n} a_{mn} x^m y^n$. Условие $J_p = P_{xx}P_{yy} - P_{xy}^2 = 0$ дает систему уравнений на коэффициенты:

$$a_{11}^2 = 4a_{20}a_{02}; \tag{2.7}$$

$$3a_{03}a_{20} + a_{02}a_{21} = a_{11}a_{12}; \tag{2.8}$$

$$3a_{30}a_{02} + a_{20}a_{12} = a_{11}a_{21}; \tag{2.9}$$

$$3a_{30}a_{12} = a_{21}^2; \tag{2.10}$$

$$9a_{30}a_{03} = a_{12}a_{21}; \tag{2.11}$$

$$3a_{03}a_{21} = a_{12}^2. \tag{2.12}$$

Не все уравнения здесь независимы. Из (2.10) и (2.12) следует (2.11); (2.10) и (2.12) линейны по a_{30}, a_{03}. Подставляя из них эти коэффициенты в (2.8) и (2.9), получаем два совпадающих уравнения вида (то есть (2.8) и (2.9) зависимы):

$$a_{11}a_{12}a_{21} = a_{02}a_{21}^2 + a_{20}a_{12}^2 \tag{2.13}$$

Это квадратное уравнение на a_{12}/a_{21} и его дискриминант обращается в ноль в силу (2.7), то есть это уравнение вырождается в линейное:

$$Aa_{12} + Ba_{21} = 0;\ A^2 = |a_{20}|,\ B = |a_{02}|. \tag{2.14}$$

Используя это соотношение совместно с (2.10) и (2.12), выражаем a_{30}, a_{03} через a_{12}. Собирая все результаты вместе, окончательно получаем, что фазовая функция имеет вид:

$$P(x,y) = A(cx + dy)^2 + B(cx + dy)^3 = f(cx + dy).$$

Это значит, что для полинома степени три результирующая кривая может быть только прямой.

2.2. ОТОБРАЖЕНИЯ, СОХРАНЯЮЩИЕ ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ

Отображения типа (1.1), сохраняющие плотность энергии, должны иметь постоянный якобиан, равный +1 (или -1). Один класс таких отображений описан в разд. 5.

Для полиномиальных отображений получается система квадратичных уравнений на коэффициенты, аналогичная случаю J=0 с первым уравнением

$$a_{20}a_{02} - a_{11}^2 = 1,$$

а остальные уравнения совпадают со случаем $J_p=0$. Следует отметить, что число этих уравнений есть степень полинома $J_p(x,y)$, которая равна 2N-2, где N - степень полинома P(x,y). Это значит, что число уравнений при больших N значительно превышает число свободных параметров - коэффициентов P(x,y).

Как мы видели выше, для J=0 часть этих уравнений зависима, и их система заведомо совместна, так как всегда есть "тривиальные" решения типа P(x,y) = = f(ax + by). Для J=1 все не так просто. Конечно, есть решения, где степень P(x,y) равна 2. Но, поскольку эта система интересна не сама по себе, а для решения совместно с другими ограничениями, желательно иметь достаточно богатый запас решений. Для P(x,y) высоких степеней наличие решения с J=1 не очевидно.

2.3. ОТОБРАЖЕНИЯ С ЯКОБИАНОМ ОБЩЕГО ТИПА

По сравнению с рассмотренными выше частными случаями J=0, J=1 для якобиана общего типа задача ставится иначе. Если в первом случае мы ищем те P(x,y), которые имеют заданный $J_p(x,y)$ (и, может быть, удовлетворяют еще некоторым ограничениям), то во втором случае мы берем класс всех P(x,y) и ставим вопрос так: как описать класс полиномов $J_p(x,y)$, то есть какие якобианы можно получить (или аппроксимировать, то есть получить с нужной степенью приближения).

2.4. ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

Для отображения, заданного полиномом P(x,y), естественно ставить задачу отображения области S на область R. Необходимым условием этого является то, что граница ∂S должна отображаться на границу ∂R. Если отображение, заданное P(x,y), взаимно однозначно вблизи границы, а области S и R односвязны (а также в ряде других более сложных геометрий задачи), это условие достаточно. Во всяком случае, надо научиться строить полином P(x,y) так, чтобы ∂S отображалось на ∂R (взаимно однозначно, как правило) или хотя бы в малую окрестность ∂R.

Практически интересным (основным) случаем можно считать следующее: ∂S - окружность или близкая алгебраическая кривая, а ∂R – произвольная алгебраическая кривая, гомотопная окружности. Например, квадрат хорошо аппроксимируется кривой типа $x^{2M} + y^{2M} = 1$ при больших M; аналогично получаются и другие многоугольники.

Точное соответствие задается формулой

$$f_1(P_x, P_y) = 0, \quad (x,y) \in \partial S. \qquad (2.15)$$

Здесь f_1 - полином, задающий ∂R.

Ограничение переменных x,y на S означает переход к фактор-кольцу $A=C[x,y]/(f_0)$ по идеалу, порожденному полиномом f_0, задающему ∂S, то есть надо решать уравнение

$$f_1(P_x(x,y), P_y(x,y)) = 0, \qquad (2.16)$$

где f_1 - известный полином, x и y связаны алгебраической зависимостью $f_0(x,y)=0$, а коэффициенты полиномов P_x и P_y, выражаемые через коэффициенты P(x,y), надо найти (может быть приближенно) при наличии дополнительных ограничений. Например, если ∂S задается (частично) уравнением $x = g(y)$, где $g(y)$ - полином, то (2.16) задает тождественное равенство нулю некоторого полинома от y, коэффициенты которого есть полиномы от коэффициентов $P(x,y)$, а значит, все они должны обращаться в ноль. Число этих коэффициентов зависит от степеней полиномов g, f_1, P и быстро растет с их увеличением, как видно из (2.16).

Фактически (2.15) или (2.16) эквивалентно заданию большой системы алгебраических уравнений на пространстве полиномов высокой степени N.

Таким образом, для того чтобы граничная задача (2.15) имела решения, надо брать достаточно большое N.

3. Рациональные отображения

Аналитическая модель, в которой фазовая функция задается в виде рациональной функции, то есть частного двух полиномов,

$$R(x,y) = P(x,y)/Q(x,y)$$

во многом аналогична полиномиальной модели. Класс рациональных функций замкнут относительно всех алгебраических операций и дифференцирования, поэтому здесь можно ставить все те же задачи, что и для полиномов, но можно ожидать, что часть задач, плохо разрешимых для полиномов, будет разрешимой в классе рациональных функций.

Кроме того, для рациональных функций все формулы, содержащие производные (например, уравнение (1.5) для якобиана), значительно более громоздки, и использование аналитических вычислений на ЭВМ особенно кстати.

4. Комплексно-аналитические отображения

Отображение W: $(x,y) \to (u,v)$ можно рассматривать как комплексную функцию $z = x+iy \to w = u+iv = f(z)$. Тогда условие существования фазовой функции, задающей данное преобразование, совпадает с первым из пары уравнений Коши-Римана для антиголоморфных функций [7], то есть функций вида $f(z^*)$, где f - голоморфная функция, а звездочка обозначает комплексное сопряжение. Такие отображения мы будем далее называть просто комплексно-аналитическими.

Комплексно-аналитические (конформные) отображения выделяются сразу по нескольким параметрам среди других аналитических моделей, рассмотренных выше (полиномы, рациональные функции).

Класс таких отображений сравнительно узок: вместо одного необходимого условия $u_y = v_x$, которому должно удовлетворять отображение $(x,y) \to (u,v)$, есть два уравнения Коши-Римана. Например, это сразу исключает все отображения в кривые (кроме тривиального случая - отображения в точку), поскольку якобиан антиголоморфного отображения задается формулой:

$$J = -|df/dz^*|^2 \tag{4.1}$$

и из $J=0$ сразу следует $f=\mathrm{const}$.

Кроме того, здесь легко вычислить фазовую функцию [8], достаточно взять первообразную $F(z^*)$:

$$P(x,y) = \mathrm{Re}\, F(z^*); \; dF/dz^* = f(z^*). \tag{4.2}$$

Вместе с тем, имеется ряд теорем о существовании и свойствах таких отображений [7]. По теореме Римана существует конформный изоморфизм единичного круга и любой односвязной области, причем множество таких отображений описывается тремя параметрами (в частности, центр круга можно отобразить в любую заданную точку этой области). По теореме Рунге в односвязной области голоморфная функция равномерно приближается полиномами от z^* на каждом компакте. По принципу соответствия границ взаимную однозначность голоморфного отображения достаточно проверять на границе области.

Все эти свойства показывают, что класс таких отображений содержит много интересных примеров, причем они обладают многими хорошими свойствами: явные аналитические формулы для фазовой функции, гладкость, равномерная аппроксимируемость и т.п.

Приведем два примера:

$$f(z^*) = \ln z^* - \tag{4.3}$$

отображение, рассмотренное в [8], которое переводит декартовы координаты в полярно-логарифмические;

$$f(z^*) = (z^*)^N - \tag{4.4}$$

N-листное накрытие единичного круга собою, реализующее выравнивание интенсивности в пучке.

В то же время для конформных отображений нельзя ставить задачу на получение заданного якобиана, так как это условие не согласуется с парой уравнений Коши-Римана.

Заметим, наконец, что, поскольку композиция конформных отображений всегда конформна, то она реализуется в один этап (см. разд. 1) и ее фазовая функция тоже выписывается явно по формулам (4.2). Это свойство позволяет построить еще ряд интересных примеров, используя технику конформных преобразований. Например, используя композицию "выравнивающего" отображения (4.4) и отображения круга в заданную область, можно получить фазовую функцию для отображения в ту же область, но с определенными выравнивающими свойствами.

5. Неявно заданные отображения

Альтернативой к заданию эйконала $P(x,y)$ в виде простой гладкой функции (полинома) можно считать (в тех задачах, где использование полиномов не проходит или не дает понимания особенностей задачи) задание $P(x,y)$ неявно, с помощью других функций и геометрических структур, несущих информацию о его свойствах.

Рассмотрим пару функций $F = (G,H)$:

$G = G(x,y,u,v)$;

$H = H(x,y,u,v)$,

которые будут играть роль "интегралов" для отображения w, заданного формулами (1.1) так, что при $(x,y) \in S$:

$$\begin{aligned} G(x,y,u(x,y),v(x,y)) &= \text{const}, \\ H(x,y,u(x,y),v(x,y)) &= \text{const}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

По теореме о неявной функции, если в точке (x,y,u,v)

$$J_0 = \det\begin{pmatrix} H_u & H_v \\ G_u & G_v \end{pmatrix} = H_u G_v - H_v G_u = 0, \tag{5.2}$$

то в окрестности точки (x,y,u,v) существует (единственное) отображение $w : (x,y) \to (u,v)$, так, что выполнены равенства (5.1). При этом производная отображения $w = (u,v)$ задается формулами:

$$w' = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} H_u & H_v \\ G_u & G_v \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} H_x & H_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

которые получаются с помощью дифференцирования (5.1).

Раскрывая (5.3), мы имеем:

$$
\begin{aligned}
u_x &= (G_v H_x - G_x H_v)/J_0; \\
u_y &= (G_v H_y - G_y H_v)/J_0; \\
v_x &= (G_u H_x - G_x H_u)/J_0; \\
v_y &= (G_u H_y - G_y H_u)/J_0;
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

$$
J_w = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = (H_x G_y - H_y G_x)/J_0.
$$

Для существования эйконала $P(x,y)$ необходимо:

$$
u_y = v_x : G_v H_y - G_y H_v = G_u H_y - G_x H_u, \tag{5.5}
$$

а условие равенства якобиана единице выглядит так:

$$
H_x G_y - H_y G_x = H_u G_v - H_v G_u. \tag{5.6}
$$

Можно удовлетворить оба эти условия, если задать:

$$
G = A(x+v) + B(y+u), \quad H = C(x-v) + D(y-u), \tag{5.7}
$$

где A,B,C,D - произвольные функции, удовлетворяющие в точке (x,y,u,v) условию невырожденности якобиана:

$$
J_0 = A'(x+v)D'(y-u) - B'(y+u)C'(x-v) \neq 0.
$$

Производные соответствующего отображения задаются формулами:

$$
\begin{aligned}
&H_x = C'(x-v),\ H_y = D'(y+u),\ H_u = -D'(y-u),\ H_v = -C'(x-v); \\
&G_x = A'(x+v),\ G_y = B'(y+u),\ G_u = B'(y+u),\ G_v = A'(x+v).
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

При помощи численного интегрирования (5.4),(5.8) можно определить функции $u(x,y)$, $v(x,y)$, а по ним - и фазовую функцию $P(x,y)$.

Эти отображения параметризуются четырьмя произвольными функциями одного переменного (при условии невырожденности якобиана), что показывает, насколько класс таких отображений богаче класса конформных отображений. В то же время их аналитические свойства далеко не так прозрачны.

6. Заключение

Настоящую работу мы были вынуждены ограничить постановками задач и формулировкой моделей, их основными свойствами. В результате складывается некоторая программа аналитических и вычислительных исследований, результатом которой могут быть фазовые оптические элементы с новыми функциональными возможностями (отличные от уже имеющихся фокусаторов в линию, многофокусных систем и т.д.). Эта программа довольно обширна. Какая из ее частей окажется наиболее продуктивной, покажет будущее.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брингдал О. Оптические преобразования / Автометрия, вып. 2, 1983, с. 30.

2. Гончарский А.В., Степанов В.В. и др. / ДАН СССР, 1984, т. 279:4, с. 788-792.

3. Гончарский А.В., Данилов В.А., Попов В.В., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А., Степанов В.В. Письма в ЖТФ, т. 11, вып. 23, 1985, с. 1428.

4. Гончарский А.В., Данилов В.А., Попов В.В., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А., Степанов В.В. / ДАН СССР, 1983, т. 273:3, с. 605-608.

5. Воронцов М.А., Кудряшов И.А., Шмальгаузен В.И. Адаптивный метод синтеза фокусатора когерентного излучения: Препринт.МГУ, физический факультет, 1987, № 1.

6. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980.

7. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969.

8. Березный А.Е., Сисакян И.Н. Оптические преобразования координат. Оптическая запись и обработка информации. Куйбышев, 1986, с. 22-28.