

БЫСТРОЕ РЕКУРСИВНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ И ДВУМЕРНЫХ КОНЕЧНЫХ СВЕРТОК

А.В. Чернов

Самарский государственный аэрокосмический университет

Аннотация

В работе рассматривается задача нахождения оптимального приближения конечной импульсной характеристики линейно-рекуррентным соотношением (ЛРС) заданного порядка. Приводятся оценки сложности вычисления свертки для различных классов ЛРС. Рассматривается алгоритм разложения произвольной двумерной импульсной характеристики в сумму разделимых импульсных характеристик, приводится обобщение метода аппроксимации на двумерный случай.

Введение

Обработка одно- и двумерных сигналов в режиме «скользящего окна» заключается в преобразовании дискретизированного сигнала линейной системой с постоянными параметрами (ЛПП-системой) с конечной импульсной характеристикой – КИХ-фильтром [1]. Значения сигнала на выходе КИХ-фильтра являются результатом цифровой свертки входного сигнала с импульсной характеристикой (ИХ) фильтра и могут быть найдены взвешенным суммированием входных отсчетов в пределах окна обработки. Однако такое вычисление свертки («прямая» реализация КИХ-фильтра) имеет практический смысл лишь для короткой импульсной характеристики, поскольку объем вычислений здесь пропорционален числу ненулевых отсчетов последней. Для больших окон (в задачах фильтрации и восстановления сигналов, вычисления признаков, корреляционного обнаружения и т.д.) прямое вычисление свертки оказывается чрезмерно трудоемким. В этой связи представляется целесообразным применение алгоритмов, воплощающих идею рекурсивной реализации КИХ-фильтров, развитую в работах [2, 3, 4, 5]. Основная идея этих алгоритмов – приближение импульсной характеристики ЛПП-системы семейством функций специального вида, вычисление свертки с которыми допускает рекурсивную реализацию с помощью разностных схем.

В данной работе предлагается обобщенный подход, позволяющий адаптивно подобрать базис разложения среди функций, удовлетворяющих ЛРС R -того порядка, и построить наилучшее приближение заданной конечной импульсной характеристики. Как показано в [2], вычислительная сложность нахождения выходного отсчета для такой реализации зависит только от порядка рекуррентности R и не зависит от размеров окна обработки N . Практически для $R \ll N$ эту задачу можно рассматривать как задачу минимизации ошибки вычисления выходного сигнала при заданной пользователем вычислительной сложности обработки. Необходимо также заметить, что переход к разностным уравнениям – это единственный способ радикального снижения вычислительной сложности по сравнению со сложностью вычисления прямой свертки или ее реализации с помощью дискретных ортогональных преобразований.

Общие сведения

из теории линейно рекуррентных соотношений

Приведем необходимые в дальнейшем общие сведения из теории линейно-рекуррентных соотношений [6, 7].

Линейно-рекуррентным соотношением порядка R называется последовательность, удовлетворяющая соотношению:

$$h(n) = \begin{cases} b_n, & \text{при } 0 \leq n < R \\ \sum_{i=1}^R a_i h(n-i) & \text{при } n \geq R \end{cases} \quad (1)$$

$a_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, R$ называют коэффициентами ЛРС.

$b_i \in \mathbf{R}$, $i = 0, \dots, R-1$ называют начальными условиями ЛРС.

Последовательность, удовлетворяющую на заданном отрезке ЛРС (1), будем для краткости называть рекуррентной последовательностью.

ЛРС (1) полностью определяется совокупностью ее коэффициентов и начальных условий. Многочлен

$$x^R - a_1 x^{R-1} - \dots - a_R = 0 \quad (2)$$

называется характеристическим уравнением ЛРС (1).

Если все $\alpha_1, \dots, \alpha_R$ – вещественные или комплексные корни характеристического уравнения (2) – имеют кратность единица, то общее решение ЛРС (1) записывается в виде:

$$h(n) = \sum_{i=1}^R c_i \alpha_i^n, \quad (3)$$

где c_i определяются только начальными условиями:

$$\sum_{i=1}^R c_i \alpha_i^k = b_k, \quad k = 1, \dots, R$$

Если же среди корней $\alpha_1, \dots, \alpha_R$ присутствует α_j степени $k_j > 1$, то в сумму (3) он входит с учетом произведений на многочлены соответствующей степени в следующем виде:

$$h(n) = c_1 \alpha_1^n + \dots + c_{j1} \alpha_j^n + c_{j2} n \alpha_j^n + \dots + c_{jk_j} n^{k_j} \alpha_j^n + \dots + c_R \alpha_R^n. \quad (4)$$

Из (3) и (4) видно, что семейство функций, удовлетворяющих ЛРС, представляет собой суммы показательных, тригонометрических функций, а также их произведений на многочлены соответствующей степени.

Частными случаями ЛРС являются следующие семейства функций.

1) Многочлены степени R , удовлетворяющие ЛРС порядка $R+1$, характеристическое уравнение для которых представимо в виде $(x-1)^{R+1} = 0$ и имеет один корень степени $(R+1)$, равный единице. Коэффициенты рекурсии

$a_i = C_i^{R+1}$ являются биномиальными коэффициентами, коэффициенты многочлена определяются начальными условиями.

2) Постоянные значения $h(n)=b$, удовлетворяющие ЛРС первого порядка $h(n)=h(n-1)$ с начальным условием $h(0)=b$.

3) Тригонометрические функции (косинусы и синусы дискретного аргумента). Удовлетворяют ЛРС второго порядка. Например,

$$\text{Cos}(n) = 2\text{Cos}(1)\text{Cos}(n-1) - \text{Cos}(n-2) \rightarrow$$

$$h(n) = 2\text{Cos}(1)h(n-1) - h(n-2).$$

Иногда для удобства рассуждений используют представление отсчетов ЛРС в матрично-векторном виде

$$\begin{pmatrix} x(k) \\ x(k+1) \\ \dots \\ x(k+R-1) \end{pmatrix} = A^{k-R} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_{R-1} \end{pmatrix}, \quad k \geq R, \quad (5)$$

где матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_R & \dots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$ называется со-
проводящей матрицей ЛРС (3).

Из общего вида решения линейно-рекуррентных соотношений (3), (4) видно, что сумма двух ЛРС порядка R_1 и R_2 является ЛРС порядка не больше, чем (R_1+R_2) .

Нетрудно показать [3], что общий вид Z-преобразования семейства функций, удовлетворяющих ЛРС, является дробно-рациональной функцией от z , и соответствующее семейство совпадает с множеством КИХ-фильтров, допускающих реализацию с помощью разностных схем с R -звеньями.

Если известны коэффициенты ЛРС и его R последовательных значений $(x(k-R), x(k-R+1), \dots, x(k-1))$, то по этой информации можно восстановить не только «будущее» последовательности, но и прошлое. При этом коэффициенты ЛРС «обратного к данному» определяются следующим выражением:

$$\begin{cases} a_k^{(-1)} = -\frac{a_{R-k}}{a_R}, k = \overline{1, R-1}, \\ a_R^{(-1)} = \frac{1}{a_R} \end{cases} \quad (5)$$

Вычисление одномерной свертки с конечной импульсной характеристикой, удовлетворяющей ЛРС

Покажем, что для импульсной характеристики в виде рекуррентной функции результат фильтрации $y(n)$ входного сигнала $x(n)$ может вычисляться рекуррентно, и получим оценки сложности вычисления.

Как известно [1], для ЛПП-систем с конечной импульсной характеристикой преобразование входного сигнала $x(n)$ в выходную последовательность $y(n)$ описывается соотношением «конечной свертки»:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=M}^{M+N-1} h(k)x(n-k), \quad (7)$$

где $h(n)$ – импульсная характеристика фильтра, равная нулю вне интервала $[M, M+N-1]$, параметр M задает положение окна обработки относительно формируемого выходного отсчета, N – размер окна. Без ограничения общности дальнейших рассуждений можно считать $M=0$.

Пусть $h(n)$ – КИХ-фильтра, удовлетворяющая ЛРС порядка R с начальными условиями $\{b_i\}_{i=0}^{R-1}$ и коэффициентами $\{a_i\}_{i=1}^R$, на отрезке $[0, N-1]$:

$$h(n) = \begin{cases} b_n, & \text{при } 0 \leq n < R, \\ \sum_{i=1}^R a_i h(n-i), & \text{при } R \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{при } n < 0, n \geq N. \end{cases} \quad (8)$$

Подставляем (8) в (7).

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{R-1} h(k)x(n-k) + \\ &+ \sum_{k=R}^{N-1} \left(\sum_{i=1}^R a_i h(k-i) \right) x(n-k) = \sum_{k=0}^{R-1} h(k)x(n-k) + \\ &+ \sum_{i=1}^R a_i \left(\sum_{k=R-i}^{N-1} h(k)x(n-k-i) \right) = \sum_{k=0}^{R-1} h(k)x(n-k) + \sum_{i=1}^R a_i y(n-i) - \\ &- \sum_{i=1}^R a_i \left(\sum_{k=0}^{R-1-i} h(k)x(n-k-i) \right) - \sum_{i=1}^R a_i \left(\sum_{k=N-i}^{N-1} h(k)x(n-k-i) \right). \end{aligned}$$

Меняя порядок суммирования в третьей и четвертой суммах и введя обозначение $a_0 = -1$, получаем

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^{R-1} h(k)x(n-k) + \sum_{i=1}^R a_i y(n-i) - \sum_{k=0}^{R-1} x(n-k) \left(\sum_{i=1}^k a_i h(k-i) \right) \\ &- \sum_{k=0}^{R-1} x(n-N-k) \left(\sum_{i=k+1}^R a_i h(N-(i-k)) \right) = \sum_{i=1}^R a_i y(n-i) - \\ &- \sum_{k=0}^{R-1} x(n-k) \left(\sum_{i=0}^k a_i h(k-i) \right) - \sum_{k=0}^{R-1} x(n-N-k) \left(\sum_{i=k+1}^R a_i h(N+k-i) \right) \end{aligned}$$

Заметим, что значения $d_k^{(l)} = \left(\sum_{i=0}^k a_i h(k-i) \right)$ и

$d_k^{(r)} = \left(\sum_{i=k+1}^R a_i h(N+k-i) \right)$ можно рассчитать заранее, а для вычисления

$$y(n) = \sum_{i=1}^R a_i y(n-i) - \sum_{k=0}^{R-1} d_k^{(l)} x(n-k) - \sum_{k=0}^{R-1} d_k^{(r)} x(n-N-k) \quad (9)$$

необходимо выполнить $3R$ операций умножения и $3(R-1)+2=3R-1$ операции сложения.

Соотношение (9) является основной расчетной формулой для вычисления линейной свертки входного сигнала с рекуррентной последовательностью.

Расчет одномерных фильтров с четной и нечетной импульсными характеристиками

В ряде задач фильтрации сигналов, импульсные характеристики фильтров обладают свойством центральной симметрии $h(n) = h(N-1-n)$ или асимметрии $h(n) = -h(N-1-n)$. Для функций данного класса удается дополнительно сократить количество умножений при вычислении (9).

Используя (8) и свойства четности/нечетности сигнала, получим, что для четной ИХ:

$$\begin{cases} a_R^{(-1)} = a_R = \frac{1}{a^R}, \text{ откуда } a_R = 1, \\ a_k^{(-1)} = a_k = -\frac{a_{R-k}}{a^R}, \text{ откуда } a_k = -a_{R-k}, k = \overline{1, R-1}, \end{cases}$$

а для нечетной ИХ

$$\begin{cases} a_R^{(-1)} = -a_R = \frac{1}{a^R}, \text{ откуда } a_R = -1, \\ a_k^{(-1)} = -a_k = -\frac{a_{R-k}}{a^R}, \text{ откуда } a_k = -a_{R-k}, k = \overline{1, R-1}. \end{cases}$$

Получим связь между коэффициентами $d_k^{(r)}$ и $d_k^{(l)}$ в выражении (9). Исходя из тех же соображений для четной ИХ

$$d_{R-1-k}^{(r)} = \sum_{i=(R-1-k)+1}^R a_i h(N + (R-k-1) - i) =$$

$$\sum_{i=0}^k a_{R-i} h(N-1-(k-i)) = \sum_{i=0}^k a_i h(k-i) = d_k^{(l)}$$

и, соответственно, для нечетной ИХ

$$d_{R-1-k}^{(r)} = \sum_{i=(R-1-k)+1}^R a_i h(N + (R-k-1) - i) =$$

$$\sum_{i=0}^k a_{R-i} h(N-1-(k-i)) = -\sum_{i=0}^k a_i h(k-i) = -d_k^{(l)}$$

С учетом этих соотношений (9) переписывается в следующем виде. Для четной ИХ:

$$y(n) = \sum_{i=1}^{[R/2+1]} a_i (y(n-i) - y(n-R+i)) + y(n-R) - \sum_{k=0}^{R-1} d_k^{(l)} (x(n-k) + x(n-N-R+k+1)),$$

где $[R/2+1]$ обозначает целую часть числа.

Для нечетной ИХ:

$$y(n) = \sum_{i=1}^{[R/2+1]} a_i (y(n-i) - y(n-R+i)) - y(n-R) - \sum_{k=0}^{R-1} d_k^{(l)} (x(n-k) - x(n-N-R+k+1)).$$

Вычисление по (11) и (12) требует $(3R/2)$ умножений и $(3R)$ сложений на отсчет.

Нахождение оптимальных коэффициентов ЛРС, приближающего КИХ

Как было показано выше, для импульсной характеристики вида (8), удовлетворяющей ЛРС порядка R , вычислительная сложность нахождения значения выходного сигнала зависит только от порядка рекуррентности R . Поэтому возникает задача об оптимальном приближении произвольной импульсной характеристики идеального исходного фильтра $\{g(n)\}_{n=0}^{N-1}$ функцией вида (8).

Будем минимизировать квадрат отклонения

$$e^2 = \sum_{n=0}^{N-1} (g(n) - h(n))^2 \rightarrow \min_{a_i, b_i}. \quad (13)$$

Заметим, что значения $\{h(n)\}$ нелинейно зависят от $\{a_i\}_{i=1}^R$, что делает невозможным прямое решение задачи с помощью «приравнивания к нулю» частных производных по a_i и b_i .

Согласно равенству Парсеваля, задача минимизации (13) эквивалентна среднеквадратичной минимизации отклонения дискретных спектров:

$$e^2 = \sum_{m=0}^{N-1} |G(m) - H(m)|^2 \rightarrow \min_{a_i, b_i}, \quad (14)$$

где $H(m) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \psi^{mn}$, $\psi = \exp(2\pi j / N)$ – корень N -ой степени из единицы, $j^2 = -1$.

Обозначив $a_0 = -1$, запишем выражение для $H(m)$, используя (11), (12)

$$\begin{aligned} H(m) &= \sum h(n) \psi^{mn} = \sum_{n=0}^{R-1} b_n \psi^{mn} + \sum_{i=1}^R a_i \left(\sum_{n=R}^{N-1} h(n-i) \psi^{mn} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{R-1} b_n \psi^{mn} + \sum_{i=1}^R a_i \left(\sum_{n=R-i}^{N-1-i} h(n) \psi^{m(n+i)} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{R-1} b_n \psi^{mn} + \sum_{i=1}^R a_i \left(H(m) \psi^{mi} + \sum_{n=N}^{N+R-1} h(n-i) \psi^{mn} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^R a_i \psi^{mi} H(m) + \sum_{n=0}^{R-1} \left(\sum_{i=0}^R a_i h(n-i) \right) \psi^{mn}. \end{aligned} \quad (15)$$

Введем новые переменные

$$c_i = \left(\sum_{j=0}^R a_j h(i-j) \right)_{i=0}^{R-1}. \quad (16)$$

Легко показать, что при известных a_i они линейно связаны с начальными условиями b_i . Для доказательства этого факта надо выразить присутствующие в (16) $h(n)$, $n > R$, через a_i и b_i . Из представления отсчетов в матрично-векторном виде (5) видно, что $h(n)$, $n > R$, линейно выражаются через начальные условия $h(n) = \mathbf{b}_n \bullet \mathbf{b}$, где \mathbf{b}_n – последняя строка $(n-R+1)$ -ой степени сопровождающей матрицы.

Поэтому система уравнений (16) эквивалентна линейной относительно b_i системе уравнений, которая легко решается.

В новых обозначениях равенство (15) переписывается в форме:

$$H(m) = \frac{\sum_{i=0}^{R-1} c_i \psi^{mi}}{1 - \sum_{i=1}^R a_i \psi^{mi}},$$

а минимизация функционала (14) эквивалентна минимизации функционала

$$e^2 = \sum_{m=0}^{N-1} \left| \sum_{i=0}^{R-1} c_i \omega^{mi} - G(m) \sum_{i=1}^R a_i \omega^{mi} \right|^2 \Gamma(m) \rightarrow \min_{a_i, c_i} \quad (17)$$

$$\text{с «весами» } \Gamma(m) = \frac{1}{\left| 1 - \sum_{i=1}^R a_i \omega^{mi} \right|^2}. \quad (18)$$

Задача отыскания минимума функционала (17) по-прежнему остается нелинейной, ибо веса $\Gamma(m)$ зависят от неизвестных коэффициентов a_i .

Для получения неизвестных коэффициентов в (17) можно использовать различные квазиоптимальные методы типа «аппроксимации Паде» [8], используемые для построения фильтров с бесконечной

импульсной характеристикой. В нашем случае КИХ-фильтра, задав начальные значения $\Gamma(m)$, разумно организовать итерационный вычислительный процесс попеременного нахождения a_i и c_i из соотношения (17) и вычисления $\Gamma(m)$ по (18).

Запишем явные выражения для нахождения a_i и c_i в (17), приравняв нулю частные производные по ним. Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_j} &= \sum_{i=1}^R a_i \left(\sum_{m=0}^{N-1} |G(m)|^2 \Gamma(m) \omega^{m(i-j)} + \sum_{m=0}^{N-1} |G(m)|^2 \Gamma(m) \omega^{m(j-i)} \right) + \\ &+ \sum_{i=0}^{R-1} c_i \left(\sum_{m=0}^{N-1} G(m) \Gamma(m) \omega^{m(i-j)} + \sum_{m=0}^{N-1} \bar{G}(m) \Gamma(m) \omega^{m(j-i)} \right), \\ \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial c_j} &= \sum_{i=1}^R a_i \left(\sum_{m=0}^{N-1} G(m) \Gamma(m) \omega^{m(i-j)} + \sum_{m=0}^{N-1} \bar{G}(m) \Gamma(m) \omega^{m(j-i)} \right) + \\ &+ \sum_{i=0}^{R-1} c_i \left(\sum_{m=0}^{N-1} \Gamma(m) \omega^{m(i-j)} + \sum_{m=0}^{N-1} \Gamma(m) \omega^{m(j-i)} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Введем обозначения

$$\gamma(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \Gamma(m) \omega^{-mn}, \quad g_\gamma(n) = g(n) \otimes \gamma(n),$$

$$g_{2\gamma}(n) = g(n) \otimes g(-n) \oplus \gamma(n), \quad (20)$$

где \otimes обозначает циклическую свертку.

Вычисляя в явном виде суммы (19) через обратное ДПФ, окончательно получаем СЛУ порядка $2R$ для нахождения a_i и c_i .

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^R a_i g_{2\gamma}(i-j) + \sum_{i=0}^{R-1} c_i g_\gamma(j-i) = g_{2\gamma}(j) & j = \overline{1, R} \\ \sum_{i=1}^R a_i g_\gamma(i-j) + \sum_{i=0}^{R-1} c_i \gamma(j-i) = g_\gamma(j) & j = \overline{0, R-1} \end{cases} \quad (21)$$

Соотношения (16), (20) и (21) являются основными расчетными формулами для нахождения неизвестных коэффициентов и начальных условий ЛРС.

Общий итерационный процесс нахождения параметров ЛРС выглядит следующим образом.

1) Задаются начальные значения

$$\Gamma(m) \equiv 1, \quad \gamma(n) = \delta(n) \text{ «дельта импульс»}.$$

На каждом шаге итерации:

- 2) вычисляются g_γ и $g_{2\gamma}$ по формуле (20);
- 3) вычисляются a_i и c_i по формуле (21);
- 4) вычисляются b_i по формуле (16);
- 5) вычисляются значения отсчетов $h(n)$ и ошибка аппроксимации ε^2 (17);
- 6) вычисляются новые значения весов $\Gamma(m)$ по (18) и $\gamma(n)$ по (20);
- 7) если ε^2 удовлетворительна, или векторы параметров a_i и b_i «мало меняются» по сравнению с предыдущей итерацией, то выход, иначе переход к п.2 на следующий шаг итерации.

Замечание. Для аппроксимации четной или нечетной импульсной характеристики необходимо использовать данный алгоритм для аппроксимации «на половине интервала».

Вычисление одномерных свертки с рекуррентными последовательностями специального вида

Как отмечалось ранее, семейство функций, удовлетворяющих ЛРС, представляет собой суммы показательных, тригонометрических функций, а также их произведений на многочлены соответствующей степени. Алгоритм предыдущего пункта «адаптивно» подбирает вид базисных функций из этого семейства. Рассмотрим методы минимизации ошибки (13) в «базисе» специальных видов – многочлены, тригонометрические и постоянные функции, для которых удастся выписать свои, меньшие, чем для общего вида, оценки сложности вычисления одномерной свертки с соответствующими импульсными характеристиками.

1) Аппроксимация постоянным значением

Постоянное значение $h(n)=b$ удовлетворяет ЛРС первого порядка $h(n)=h(n-1)$ с начальным условием $h(0)=b$. Оптимальное значение b вычисляется как «среднее значение» отсчетов $h(n)$ и для реализации свертки с такой импульсной характеристикой необходима одна операция умножения и 3 сложения: $y(n)=by(n-1)+x(n)-x(n-M)$.

Аппроксимация произвольной импульсной характеристики семейством функций из прямоугольного базиса подробно рассмотрена в [2].

2) Аппроксимация тригонометрическими функциями

Тригонометрические функции (косинусы и синусы дискретного аргумента) удовлетворяют ЛРС второго порядка. Для отыскания возможного вида совокупности базисных функций для аппроксимации $g(n)$ можно воспользоваться разложением $g(n)$ по тригонометрическому базису (то есть нахождения $G(m)$ с помощью ДПФ) и отбором симметричных трансформант (частот) с максимальной энергией. Количество частот выбирается в соответствии с желаемой сложностью реализации одномерной свертки. Оценки вычислительной сложности для косинусного базиса и Фурье-базиса подробно рассмотрены в [9], [2].

3) Аппроксимация многочленом

Многочлен степени $(R-1)$ дискретного аргумента удовлетворяет ЛРС порядка R . Характеристическое уравнение его ЛРС $(x-1)^R=0$ имеет один корень степени R , равный единице. Коэффициенты рекурсии $a_i = (-1)^i C_i^R$ являются биномиальными коэффициентами и известны заранее, поэтому при минимизации (13) определению подлежат только параметры b_i . Как было отмечено ранее, отсчеты $h(n)$ для произвольного ЛРС при известных a_i линейно выражаются через начальные условия

$$h(n) = \sum_i \alpha_i(n) b_i = \begin{cases} b_n, & \text{при } 0 \leq n < R, \\ \mathbf{b}_n \cdot \mathbf{b}, & \text{при } n \geq R, \end{cases} \quad (22)$$

где \mathbf{b}_n – последняя строка $(n-R+1)$ -ой степени сопровождающей матрицы. Для нахождения коэффициентов b_i из условия минимума функционала (13) решается простая система линейных уравнений порядка R .

Покажем, что, используя свойства биномиальных коэффициентов, можно еще сократить количество операций, исключив умножения на a_i для вычисления одномерной свертки (9). Для этого заметим, что биномиальные коэффициенты $a_i = (-1)^i C_i^R$ удовлетворяют свойству «треугольника Паскаля», и

$$\begin{aligned} t(n) &= y(n) - \sum_{i=1}^R a_i y(n-i) = \\ &= - \sum_{k=0}^{R-1} d_k^{(l)} x(n-k) - \sum_{k=0}^{R-1} d_k^{(r)} x(n-N-k) \end{aligned}$$

является просто R -той конечной разностью $t(n) = \Delta^R(n)$.

$$\Delta^0(n) = y(n), \Delta^j(n) = \Delta^{j-1}(n) - \Delta^{j-1}(n-1) \quad j=1, \dots, R$$

которые рассчитываются рекурсивно. Поэтому для получения $y(n)$ по (9) на очередном шаге можно сначала вычислить

$$\begin{aligned} t(n) &= \Delta^R(n) = \\ &= - \sum_{k=0}^{R-1} d_k^{(l)} x(n-k) - \sum_{k=0}^{R-1} d_k^{(r)} x(n-N-k) \end{aligned} \quad (23)$$

а затем, используя соотношение $\Delta^{j-1}(n) = \Delta^j(n) + \Delta^{j-1}(n-1)$, вычислить «в обратном порядке» (см. рис. 1) все конечные разности $\Delta^j(n)$, $j=1, \dots, R-1$, что требует R сложений и не требует умножений. При этом $y(n) = \Delta^0(n)$.

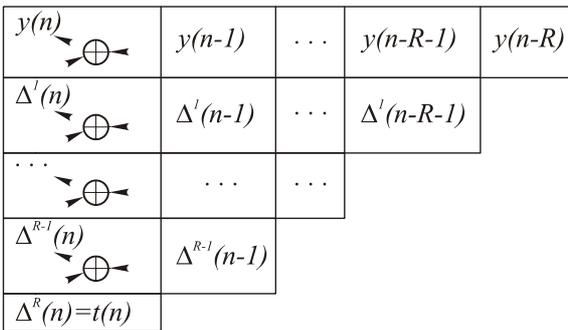


Рис. 1. Вычисление значения свертки с многочленом

Окончательно для вычисления одномерной свертки с произвольным многочленом степени $(R-1)$ требуется $U_*(R) = 2R + 1$ операции умножения и $U_+(R) = 3R + 3$ операции сложения, что практически совпадает с оценками для параллельно-рекурсивного вычисления свертки с многочленом, приведенные в [5]. Заметим, что рекурсивное вычисление свертки с многочленами общего вида является самостоятельной задачей и широко используется, например, для вычисления моментных инвариантов.

Для вычисления свертки с многочленами четных и нечетных степеней по (10) и (11) также требуется сокращенное число умножений порядка R на отсчет.

Расчет рекурсивных двумерных КИХ-фильтров

К сожалению, не удается обобщить одномерный алгоритм на двумерный случай аппроксимации $g(n_1, n_2)$ двумерной разностной схемой общего вида

$$h(n_1, n_2) = \sum_{i=0}^{R_1} \sum_{j=0}^{R_2} a_{ij} h(n_1 - i, n_2 - j).$$

Более того, не удается реализовать этот алгоритм даже в предположении о разделимости аппроксимирующей функции

$$\begin{aligned} h(n_1, n_2) &= h_1(n_1) \cdot h_2(n_2) = \\ &= \sum_{i=0}^{R_1} a_{1i} h_1(n_1 - i) \cdot \sum_{j=0}^{R_2} a_{2j} h_2(n_2 - j). \end{aligned} \quad (24)$$

Однако если исходная ИХ разделима, и известно ее представление, $g(n_1, n_2) = g(n_1) \cdot g(n_2)$, то можно аппроксимировать каждую из одномерных ИХ $g_i(n_i)$ функциями $h_i(n_i)$ вида (1), удовлетворяющими ЛРС.

В следующих параграфах рассматриваются вопросы нахождения субоптимальной аппроксимации двумерной ИХ произведением одномерных рекуррентных последовательностей.

Вычисление двумерной свертки с разделимой

рекуррентной последовательностью

В предположении разделимости исходной ИХ, используя соотношение (24), удается «каскадно» реализовать вычисление конечной двумерной свертки

$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) &= x(n_1, n_2) * h(n_1, n_2) = \\ &= \sum_{k_1=M_1}^{M_1+N_1-1} \sum_{k_2=M_2}^{M_2+N_2-1} h(k_1, k_2) x(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \end{aligned} \quad (25)$$

в следующей рекуррентной форме

$$\begin{cases} t(n_1, n_2) = \sum_{i=1}^{R_1} a_{1i} t(n_1 - i, n_2) - \\ - \sum_{k=0}^{R_1-1} d_{1k}^{(l)} x(n_1 - k, n_2) - \sum_{k=0}^{R_1-1} d_{1k}^{(r)} x(n_1 - N - k, n_2) \\ y(n_1, n_2) = \sum_{i=1}^{R_2} a_{2i} y(n_1, n_2 - i) - \\ - \sum_{k=0}^{R_2-1} d_{2k}^{(l)} t(n_1, n_2 - k) - \sum_{k=0}^{R_2-1} d_{2k}^{(r)} t(n_1, n_2 - N - k). \end{cases} \quad (26)$$

Вычисление $y(n_1, n_2)$ по формуле (26) требует $U_* = 3(R_1 + R_2 + 1)$ умножений и $U_+ = 3(R_1 + R_2 + 3)$ сложений, где R_1 и R_2 – порядки рекуррентности соответствующих одномерных ЛРС.

Аппроксимация неразделимой ИХ разделимыми ИХ общего вида

Рассмотрим вопрос о нахождении $N_1 + N_2$ неизвестных отсчетов разделимой импульсной характеристики $\bar{h}_1(n_1, n_2) = \bar{h}_1(n_1) \bar{h}_2(n_2)$, аппроксимирующей исходную импульсную характеристику $g(n_1, n_2)$:

$$\varepsilon^2 = \sum_{n_1, n_2} \left[g(n_1, n_2) - \bar{h}_1(n_1) \bar{h}_2(n_2) \right]^2 \longrightarrow \min. \quad (27)$$

Взяв производные по $\bar{h}_1(j)$, $j=0, \dots, N_1-1$, и $\bar{h}_2(j)$, $j=0, \dots, N_2-1$, получим систему уравнений:

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial \bar{h}_1(j)} : \left\{ \begin{array}{l} \bar{h}_1(j) \cdot E_2 - \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \bar{h}_2(n_2) \cdot g(j, n_2) = 0, \\ \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \bar{h}_1(n_1) \cdot g(n_1, j) - \bar{h}_2(j) \cdot E_1 = 0 \end{array} \right. , \quad (28)$$

$$\text{где } E_2 = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} [\bar{h}_2(n_2)]^2, \quad E_1 = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} [\bar{h}_1(n_1)]^2. \quad (29)$$

Перейдем к эквивалентной системе линейных уравнений. Умножив первые (N_1-1) уравнений (28) на E_1 , а вторые (N_2-1) уравнений на E_2 , получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} g(j, n_2) \cdot \bar{h}_2(n_2) \cdot E_1 = \bar{h}_1(j) \cdot E_1 E_2 \\ \sum_{n_1=0}^{N_1-1} g(n_1, j) \cdot \bar{h}_1(n_1) \cdot E_2 = \bar{h}_2(j) \cdot E_1 E_2 \end{array} \right. \quad (30)$$

Заменим $\bar{h}_2(n_2) \cdot E_1$ и $\bar{h}_1(n_1) \cdot E_2$ в левой части уравнений (29) их выражениями из (28):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} g(j, n_2) \cdot \left(\sum_{n_1=0}^{N_1-1} \bar{h}_1(n_1) \cdot g(n_1, n_2) \right) = \bar{h}_1(j) \cdot E_1 E_2 \\ \sum_{n_1=0}^{N_1-1} g(n_1, j) \cdot \left(\sum_{n_2=0}^{N_2-1} \bar{h}_2(n_2) \cdot g(n_1, n_2) \right) = \bar{h}_2(j) \cdot E_1 E_2 \end{array} \right. \quad (31)$$

Изменив порядок суммирования в левой части, и обозначив $E_h = E_1 E_2$, окончательно получим систему уравнений для нахождения коэффициентов

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \bar{h}_1(n_1) \cdot \sum_{n_2=0}^{N_2-1} g(n_1, n_2) g(j, n_2) = E_h \bar{h}_1(j), \\ \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \bar{h}_2(n_2) \cdot \sum_{n_1=0}^{N_1-1} g(n_1, n_2) g(n_1, j) = E_h \bar{h}_2(j), \\ \sum_{n_1=0}^{N_1-1} [\bar{h}_1(n_1)]^2 \sum_{n_2=0}^{N_2-1} [\bar{h}_2(n_2)]^2 = E_h. \end{array} \right. \quad (32)$$

Перепишем (32) в матричном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}_G \bar{\mathbf{h}} = E_h \bar{\mathbf{h}} \\ \sum_{n_1=0}^{N_1-1} [\bar{h}_1(n_1)]^2 \sum_{n_2=0}^{N_2-1} [\bar{h}_2(n_2)]^2 = E_h \end{array} \right. , \quad (33)$$

где $\bar{\mathbf{h}} = (\bar{h}_1(0), \dots, \bar{h}_1(N_1-1), \bar{h}_2(0), \dots, \bar{h}_2(N_2-1))$, а клеточная матрица $\mathbf{K}_G = \begin{pmatrix} GG^T & 0 \\ 0 & G^T G \end{pmatrix}$ размера (N_1+N_2)

состоит из попарных скалярных произведений строк (верхняя клетка) и столбцов (нижняя клетка) исходной матрицы $G = \{g(n_1, n_2)\}$ отсчетов аппроксимируемой двумерной функции.

Система уравнений (33) по-прежнему не является линейной, так как E_h зависит от \mathbf{h} . Рассмотрим

вспомогательную задачу на нахождение собственных значений $\mathbf{K}_G \bar{\mathbf{h}} = \lambda \bar{\mathbf{h}}$. Существует лишь конечное множество собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_M$, каждому из которых соответствует множество собственных векторов $\bar{\mathbf{h}}_\lambda = t \cdot \bar{\mathbf{e}}_\lambda$, $t \neq 0$, $\|\bar{\mathbf{e}}_\lambda\| = 1$.

Для каждого λ определим такое значение t_λ , чтобы выполнялось второе условие (34):

$$\sum_{n_1=0}^{N_1-1} [\bar{h}_1(n_1)]^2 \sum_{n_2=0}^{N_2-1} [\bar{h}_2(n_2)]^2 = \lambda, \quad \text{которое запишется в виде } \sum_{n_1=0}^{N_1-1} [t_\lambda \bar{e}_1(n_1)]^2 \sum_{n_2=0}^{N_2-1} [t_\lambda \bar{e}_2(n_2)]^2 = \lambda, \quad \text{откуда}$$

$$t_\lambda = \pm \left(\frac{\lambda}{\sum_{n_1=0}^{N_1-1} [\bar{e}_1(n_1)]^2 \sum_{n_2=0}^{N_2-1} [\bar{e}_2(n_2)]^2} \right)^{1/4}. \quad (35)$$

Очевидно, что соответствующие N_1+N_2 собственных векторов $\bar{\mathbf{h}}_\lambda = t_\lambda \bar{\mathbf{e}}_\lambda$ будут являться решением задачи (33).

Замечание 1. Согласно (27) $\bar{h}_1(n_1)$ и $\bar{h}_2(n_2)$ будут определены с точностью до взаимного множителя. Рассчитанное значение t_λ соответствует значениям $\bar{h}_1(n_1)$ и $\bar{h}_2(n_2)$ с равной энергией (суммой квадратов отсчетов).

Замечание 2. Легко показать, что все ненулевые собственные числа матриц GG^T и $G^T G$ совпадают. Поэтому можно ограничиться нахождением максимального собственного значения матрицы размера $\min(N_1, N_2)$.

Замечание 3. Нетрудно показать, что сингулярное разложение матрицы $h(n_1, n_2)$

$$h(n_1, n_2) = \sum_i \delta_i \mathbf{h}_{1i}^T(n_1) \mathbf{h}_{2i}(n_2), \quad (36)$$

определяет разложение произвольной ИХ в сумму разделимых ИХ, где δ_i – собственные числа матриц $G^T G$ и GG^T , а $\mathbf{h}_{1i}^T(n_1)$ – компонента с номером n_1 соответствующего собственного вектора матрицы $G^T G$, а $\mathbf{h}_{2i}(n_2)$ – компонента с номером n_2 соответствующего собственного вектора матрицы GG^T . Исходя из этих соображений легко показать, что в описанном выше алгоритме минимум ошибки аппроксимации будет достигаться при максимальном собственном значении. Для его нахождения удобно использовать, например, метод обратных итераций.

Полный алгоритм нахождения неизвестных отсчетов $\bar{h}_1(n_1)$ и $\bar{h}_2(n_2)$, выглядит следующим образом.

- 1) Находится максимальное по модулю собственное число λ симметричной матрицы \mathbf{K}_G и соответствующий ему нормированный собственный вектор $\bar{\mathbf{e}}_\lambda$.

2) Находится нормирующий коэффициент t_λ из условия (35).

3) Находится $\bar{\mathbf{h}}_\lambda = t_\lambda \mathbf{e}_\lambda$.

Качество аппроксимации, в общем случае, будет определяться отношением $\frac{\lambda_{\max}}{\sum_{i=1, \lambda \neq \lambda_{\max}}^M \lambda_i}$.

Аппроксимация двумерной неразделимой ИХ произведением разделимых ИХ, удовлетворяющих ЛРС

Пусть для исходной ИХ $g(n_1, n_2)$ найдена по (27) аппроксимация $\bar{h}_1(n_1) \cdot \bar{h}_2(n_2)$, и для каждой из $\bar{h}_1(n_1), \bar{h}_2(n_2)$ найдены, согласно (9), оптимальные наборы коэффициентов ЛРС $\{a_{1i}\}_{i=1}^{R_1}$ и $\{a_{2i}\}_{i=1}^{R_2}$. Не трудно заметить (из общего решения ЛРС (2)), что эти коэффициенты определяют базисные функции, а $\{b_{1i}\}_{i=1}^{R_1}$ и $\{b_{2i}\}_{i=1}^{R_2}$ – коэффициенты разложения $\bar{h}_1(n_1)$ и $\bar{h}_2(n_2)$ по рекуррентному базису. Как было отмечено ранее, отсчеты $h(n)$ для произвольного ЛРС при известных a_i линейно выражаются через начальные условия. Можно, конечно, выбирать начальные условия $\mathbf{b}_1 = \{b_{1i}\}$ и $\mathbf{b}_2 = \{b_{2i}\}$ как и в одномерном случае, однако существует возможность подобрать их значения из условия минимизации отклонения двумерной функции

$$\varepsilon^2 = \sum_{n_1, n_2} \left[g(n_1, n_2) - \bar{h}_1(n_1) \bar{h}_2(n_2) \right]^2 = \sum_{n_1, n_2} \left[g(n_1, n_2) - \sum_{i=0}^{R_1-1} \alpha_{1i}(n) b_{1i} \cdot \sum_{i=0}^{R_2-1} \alpha_{2i}(n) b_{2i} \right]^2 \rightarrow \min_{b_{1i}, b_{2i}}$$

Взяв производные по $b_{1j}, j=0, \dots, R_1-1$ и $b_{2j}, j=0, \dots, R_2-1$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial b_{1j}} = \sum_{n_1, n_2=0}^{N_1-1, N_2-1} \left[g(n_1, n_2) - \bar{h}_1(n_1) \bar{h}_2(n_2) \right] \alpha_{1j}(n_1) \bar{h}_2(n_2) = 0 \\ \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial b_{2j}} = \sum_{n_1, n_2=0}^{N_1-1, N_2-1} \left[g(n_1, n_2) - \bar{h}_1(n_1) \bar{h}_2(n_2) \right] \alpha_{2j}(n_2) \bar{h}_1(n_1) = 0 \end{cases} \quad (37)$$

С учетом обозначений $E_2 = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left[\bar{h}_2(n_2) \right]^2$,

$E_1 = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \left[\bar{h}_1(n_1) \right]^2$ система (37) переписывается в

$$\begin{cases} \sum_{n_1, n_2=0}^{N_1-1, N_2-1} g(n_1, n_2) \alpha_{1j}(n_1) \bar{h}_2(n_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \bar{h}_1(n_1) \alpha_{1j}(n_1) \cdot E_2 \\ \sum_{n_1, n_2=0}^{N_1-1, N_2-1} g(n_1, n_2) \alpha_{2j}(n_2) \bar{h}_1(n_1) = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \bar{h}_2(n_2) \alpha_{2j}(n_2) \cdot E_1 \end{cases}$$

Подставляя в предыдущее равенство выражение для $\bar{h}_1(n_1)$ и $\bar{h}_2(n_2)$ в виде (37), получаем:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{R_2} \left[\sum_{n_1, n_2=0}^{N_1-1, N_2-1} g(n_1, n_2) \alpha_{1j}(n_1) \alpha_{2i}(n_2) \right] b_{2i} = \\ = \sum_{i=1}^{R_1} \left[\sum_{n_1=0}^{N_1-1} \alpha_{1j}(n_1) \alpha_{ii}(n_1) \right] b_{1i} \cdot E_2 \\ \sum_{i=1}^{R_1} \left[\sum_{n_1, n_2=0}^{N_1-1, N_2-1} g(n_1, n_2) \alpha_{2j}(n_2) \alpha_{1i}(n_1) \right] b_{1i} = \\ = \sum_{i=1}^{R_2} \left[\sum_{n_2=0}^{N_2-1} \alpha_{2j}(n_2) \alpha_{2i}(n_2) \right] b_{2i} \cdot E_1 \end{cases} \quad (38)$$

Перепишем (38) в матрично-векторном виде,

$$\begin{cases} \mathbf{K}_1 \mathbf{b}_2 = \mathbf{A}_1 \mathbf{b}_1 E_2 \\ \mathbf{K}_2 \mathbf{b}_1 = \mathbf{A}_2 \mathbf{b}_2 E_1 \end{cases} \quad (39)$$

используя обозначения

$$\mathbf{K}_1 = \{k_1(i, j)\}, \quad k_1(i, j) = \sum_{n_1, n_2} g(n_1, n_2) \alpha_{1j}(n_1) \alpha_{2i}(n_2),$$

$$\mathbf{K}_2 = \{k_2(i, j)\}, \quad k_2(i, j) = \sum_{n_1, n_2} g(n_1, n_2) \alpha_{2j}(n_2) \alpha_{1i}(n_1),$$

$$\mathbf{A}_1 = \{a_1(i, j)\}, \quad a_1(i, j) = \sum_{n_1} \alpha_{1j}(n_1) \alpha_{1i}(n_1),$$

$$\mathbf{A}_2 = \{a_2(i, j)\}, \quad a_2(i, j) = \sum_{n_2} \alpha_{2j}(n_2) \alpha_{2i}(n_2),$$

$$\mathbf{b}_1 = \{b_{1i}\}, \quad \mathbf{b}_2 = \{b_{2i}\}.$$

Умножим первое уравнение (39) на E_1 , а второе – на E_2 и выполним эквивалентные преобразования, используя выражения для $\mathbf{b}_2 E_1$ и $\mathbf{b}_1 E_2$ из (39).

$$\begin{cases} \mathbf{K}_1 \mathbf{b}_2 E_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{b}_1 E_2 E_1 \\ \mathbf{K}_2 \mathbf{b}_1 E_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{b}_2 E_2 E_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{K}_1 \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{K}_2 \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1 E_2 E_1 \\ \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{K}_2 \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{K}_1 \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2 E_2 E_1 \end{cases}$$

Окончательно получим систему нелинейных уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{K}_1 \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{K}_2 \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1 E_h \\ \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{K}_2 \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{K}_1 \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2 E_h \\ E_h = (\mathbf{b}_1^t \cdot \mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2^t \cdot \mathbf{b}_2) \end{cases} \quad (40)$$

где $E_h = E_1 E_2$. Для решения (40) можно использовать алгоритм, описанный в предыдущем параграфе (см. (33)-(35)), использующий нахождение собственных чисел и векторов клеточной матрицы

$$K_G = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{K}_1 \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{K}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{K}_2 \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{K}_1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что приведенный алгоритм может использоваться для расчета коэффициентов разложения по произвольным заданным базисным функциям,

удовлетворяющим ЛРС заданного порядка (многочленам, тригонометрическим функциям и пр.).

**Аппроксимация неразделимой ИХ
семейством разделимых ИХ,
удовлетворяющих ЛРС**

В общем случае при аппроксимации исходной ИХ семейством разделимых ИХ

$$\varepsilon^2 = \sum_{n_1, n_2} \left(g(n_1, n_2) - \sum_i h_1^{(i)}(n_1) h_2^{(i)}(n_2) \right)^2 \longrightarrow \min ,$$

можно использовать сингулярное разложение (36) с последующей аппроксимацией каждого звена одномерными функциями. Однако более глубокого минимума удастся достичь, используя метод покоординатного спуска, на каждом шаге итерации попеременно фиксируя отсчеты всех звеньев, кроме одного, и последовательно увеличивая количество звеньев для достижения заданной ошибки аппроксимации. При этом коэффициенты аппроксимации на предыдущем шаге (с (i-1) звеньями) выступают в качестве начальных приближений для нахождения коэффициентов с i звеньями.

В общем виде алгоритм выглядит следующим образом.

- 1) При наличии I звеньев. Фиксирование отсчетов всех звеньев, кроме одного (звена j). Для выбранного звена выполняются шаги 2-5.
- 2) Аппроксимация функции $g(n_1, n_2) - \sum_{i \neq j} h_1^{(i)}(n_1) h_2^{(i)}(n_2)$ разделимой импульсной характеристикой общего вида $\bar{h}_1(n_1) \cdot \bar{h}_2(n_2)$, где отсчеты $\bar{h}_1(n_1)$ и $\bar{h}_2(n_2)$ находятся по (33)-(35).
- 3) Одномерные аппроксимации каждой из $\bar{h}_1(n_1), \bar{h}_2(n_2)$ функциями вида (1) – $h_1^{(j)}(n_1), h_2^{(j)}(n_2)$, удовлетворяющими ЛРС соответствующего порядка R.
- 4) Поиск начальных условий b_{1i} и b_{2i} (коэффициенты аппроксимации базисными функциями) по (40).
- 5) Вычисление разностного сигнала $\Delta(n_1, n_2) = g(n_1, n_2) - \sum_i h_1^{(i)}(n_1) h_2^{(i)}(n_2)$ и ошибки аппроксимации $\varepsilon^2(\Delta(n_1, n_2))$. Если ошибка аппроксимации устраивает, то – конец алгоритма.
- 6) Если ошибка уменьшается слабо относительно предыдущих шагов, то переход к шагу 1 с количеством звеньев $I:=I+1$ (при этом шаг 2 начинается с последнего звена с номером I+1, а найденные на предыдущем шаге I звеньев

используются в качестве начальных приближений). Иначе – переход к шагу 2 с фиксированием всех звеньев, кроме (j+1) mod I для получения следующих элементов семейства $h_1^{(j+1)}(n_1), h_2^{(j+1)}(n_2)$.

Заключение

Полученные в работе алгоритмы обобщают результаты по проектированию одномерных и двумерных рекурсивных КИХ-фильтров. Приводится обобщение метода аппроксимации на двумерный случай. Алгоритмы позволяют при заданной сложности вычислений (количестве операций на отсчет) подобрать оптимальный рекурсивный КИХ-фильтр, минимизирующий ошибку аппроксимации исходного КИХ-фильтра.

Благодарность

Работа выполнена при поддержке Министерства образования РФ, Администрации Самарской области и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF Project SA-014-02) в рамках российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BRHE), а также гранта Президента РФ № НШ-1007.2003.01.

Литература

1. Оппенгейм А.В., Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов // М.: Мир, 1979. - 416с.
2. Сергеев В.В. Параллельно-рекурсивные КИХ-фильтры в задачах обработки изображений // Радиотехника. 1990. N8. С. 38-41.
3. Сергеев В.В. Параллельно-рекурсивные КИХ-фильтры для обработки изображений // Компьютерная оптика. М.: МЦНТИ, 1992. Вып.10-11. С. 186-201.
4. Ярославский Л.П. О возможности параллельной и рекурсивной организации цифровых фильтров // Радиотехника. 1984. N 3. С. 87-91.
5. Glumov N.I., Myasnikov V.V., Sergeyev V.V.: Polynomial Bases for Image Processing in a Sliding Window// *Pattern Recognition and Image Analysis*, 1994. No.4. P. 408-413.
6. Холл Г. Комбинаторика // М., Мир, 1970.
7. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей // 2-е изд., доп. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литры, 1959. 398 с.
8. Каппелини В., Константиноидис А.Дж., Эмилиани П. Цифровые фильтры и их применение // М.: Энергоатомиздат. 1983.
9. Методы компьютерной обработки изображений // Под ред В.А. Сойфера. М.: Физматлит, 2001. 784 с.