АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА ДОЭ

Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, М.А. Моисеев, С.И. Харитонов
Институт систем обработки изображений РАН,
Самарский государственный аэрокосмический университет

Аннотация

Представлен новый асимптотический метод решения задачи дифракции на дифракционных оптических элементах с зонной структурой. Метод включает строгое решение задачи дифракции на периодической структуре с периодом сравнимым с длиной волны и геометрооптический подход. Получено решение задачи дифракции на эталонной квазипериодической структуре, сочетающей в себе функции дифракционной решетки и дифракционной линзы. На основе решения эталонной задачи получено простая аппроксимация для поля непосредственно за дифракционным элементом.

Введение

Рассмотрим дифракцию света на дифракционном оптическом элементе, обладающем зонной структурой. Свет представляет собой электромагнитные волны и поэтому строгое решение задачи дифракции должно быть основано на решении системы уравнений Максвелла с соответствующими задаче граничными условиями. Однако на практике хорошо известно, что решение уравнений Максвелла в коротковолновой области весьма трудоемкая задача даже для современных компьютеров. Для оценки поведения решения системы уравнений Максвелла в коротковолновой области широко используются асимптотические методы. Наиболее известным асимптотическим методом является приближение геометрической оптики [1]. Приближение геометрической оптики хорошо работает в случае, когда свойства среды слабо меняются на расстояниях сравнимых с длиной волны освещающего пучка. Методы решения задач дифракции на периодических структурах, основанные на точном решении уравнений Максвелла, давно известны и рассмотрены в работе [2]. Если структура не является периодической, тогда в этом случае для решения задач дифракции используются конечно-разностные методы [3] или методы, основанные на решении соответствующих интегральных уравнений [4]. В данной работе рассматривается асимптотический подход к решению широкого класса задач дифракции. Подход основан на синтезе геометрооптического метода и решения задач дифракции на периодических структурах. Полученные формулы имеют прозрачный физический смысл. Для упрощения задачи на данном этапе будем рассматривать двумерную систему. Это позволит нам найти закономерности и разработать методы решения, которые впоследствии можно будет распространить на случай трех измерений для системы уравнений Максвелла.

1. Решение модельной задачи дифракции на квазипериодической структуре

Асимптотические методы в физике ассоциируются в основном с квазиклассическим приближением в квантовой механике, геометрической оптикой и вычислением интеграла Кирхгофа-Гюйгенса [5] или Кирхгофа-Котлера [6] методом стационарной фазы или методом перевала. С точки зрения физики геометрическая оптика основана на замене решения исходной задачи на решение задачи дифракции плоской волны на плоской границе раздела. Метод перевала и метод стационарной фазы [7] основаны на замене вычисляемого интеграла эталонным интегралом. Для того чтобы разработать асимптотические методы для решения задач дифракции на дифракционных оптических элементах, обладающих зонной структурой, необходимо найти и решить модельную задачу. В данной работе предложено построить целый класс асимптотических методов, основанных на решении задачи дифракции на структуре, отличной от дифракционной решетки (в пределе совпадающей с дифракционной решеткой). Модельный ДОЭ должен сочетать в себе функции расщепителя пучка (дифракционной решетки) и при этом обладать фокусирующими свойствами. В качестве модельного ДОЭ можно выбрать ДОЭ, расположенный перпендикулярно оси z в области $0 < z < a$, с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon(x) = \sum_m \varepsilon_m \exp\left(ikmg(x)\right), \tag{1}$$

$$g(x) = g(x_0) + \alpha(x - x_0) + \frac{1}{2}\beta(x - x_0)^2, \tag{2}$$

где k – волновое число, $g(x)$ – функция, описывающая зонную структуру, x_0 – точка, в окрестности которой находится поле.

Для решения задачи дифракции необходимо найти поле в трех областях пространства:

- в области вне дифракционного оптического элемента со стороны источника волн;
- в области вне дифракционного оптического элемента со стороны, не содержащей источника волн;
- в области внутри дифракционного оптического элемента.

Распространение света в скалярном приближении во всех трех областях пространства описывается уравнением Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 E(x,z)}{\partial z^2} = HE(x,z), \tag{3}$$

где $E(x,z)$ – электрическое поле, а оператор H в координатном представлении имеет вид:

$$H = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2\varepsilon(x) . \quad (4)$$

Представим решение уравнения и функцию диэлектрической проницаемости в виде

$$\varepsilon(x,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(\omega,z)\exp\left(ik\omega\left(x-x_0\right)\right)d\omega , \quad (5)$$

$$E(x,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega,z)\exp\left(ik\omega\left(x-x_0\right)\right)d\omega , \quad (6)$$

где ω – пространственная частота.

В этом случае решение уравнения Гельмгольца сводится к решению интегродифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 E(\omega,z)}{dz^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-k^2\varepsilon(\omega-\eta) + k^2\alpha^2\delta(\omega-\eta)\right)\times$$

$$\times E(\eta,z)d\eta , \quad (7)$$

$$\varepsilon(\omega) = \sum_m \sqrt{\frac{ik}{2\pi m\beta}}\varepsilon_m \exp\left(ikmg\left(x_0\right)\right)\times$$

$$\times\exp\left(-ik\frac{(\omega-m\alpha)^2}{2m\beta}\right). \quad (8)$$

Подставим выражение (8) в уравнение (7)

$$\frac{\partial^2 E(\omega,z)}{\partial z^2} = k^2\omega^2 E(\omega,z) -$$

$$-k^2\sum_m \sqrt{\frac{k}{2\pi m\beta}}\varepsilon_m \exp\left(ikmg\left(x_0\right)\right)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-ik\frac{(\omega-\eta-m\alpha)^2}{2m\beta}\right)E(\eta,z)d\eta . \quad (9)$$

Для решения интегродифференциального уравнения представим теперь волновое поле в окрестности точки x_0 в виде

$$E(\omega,z) = \sum_s E^s\left(x_0,z\right)\left|F_s(\omega)\right\rangle , \quad (10)$$

где

$$\left|F_s(\omega)\right\rangle = \sqrt{\frac{ik}{2\pi s\beta}}\exp\left(iksg\left(x_0\right)\right)\times$$

$$\times\exp\left(-ik\frac{(\omega-s\alpha)^2}{2s\beta}\right). \quad (11)$$

Подставив выражение (10) в интегро-дифференциальное уравнение, получим

$$\sum_n \frac{d^2E^n(z)}{dz^2}\left|F_n(\omega)\right\rangle = k^2\omega^2\sum_n E^n(z)\left|F_n(\omega)\right\rangle -$$

$$-k^2\sum_{ns}\varepsilon_{n-s}E^s\left(x_0,z\right)\left|F_n(\omega)\right\rangle . \quad (12)$$

Выберем некоторый набор ортогональных функций $G_m(\omega)$ и умножим уравнение (12) на каждый элемент этого множества

$$\sum A_n^m \frac{d^2E^n\left(x_0,z\right)}{dz^2} = k^2\sum_n B_n^m E^n\left(x_0,z\right) -$$

$$-k^2\sum_{ns} A_n^m\varepsilon_{n-s}E^s\left(x_0,z\right) , \quad (13)$$

где

$$A_n^m = \left\langle G_m(\omega)\right|\left|F_n(\omega)\right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} G_m^*(\omega)F_n(\omega)d\omega , \quad (14)$$

$$B_{mn} = \left\langle G_m(\omega)\right|\left|\omega^2F_n(\omega)\right\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2G_m^*(\omega)F_n(\omega)d\omega . \quad (15)$$

В качестве примера получим асимптотики для этих матриц с помощью метода стационарной фазы

$$A_m^n = i\exp\left(iksg\left(x_0\right)\right)G_m(n\alpha) , \quad (16)$$

$$B_m^n = i\exp\left(iksg\left(x_0\right)\right)\left(G_m(n\alpha)(n\alpha)^2 + e\right), \quad (17)$$

где

$$e = \sqrt{\frac{ik}{2\pi n\beta}}\left(\omega^2G_m^*(\omega)\right)'_{\omega=n\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega\exp\left(\frac{-ik\omega^2}{2n\beta}\right)d\omega +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\omega_n^2G_m^*(\omega)\right)''_{\omega=n\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\exp\left(\frac{-ik\omega^2}{2s\beta}\right)d\omega . \quad (18)$$

При $k\to\infty, e\to 0$ система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\frac{d^2E^n\left(x_0,z\right)}{dz^2} = k^2(n\alpha)^2 E^n\left(x_0,z\right) -$$

$$-k^2\sum_{ns}\varepsilon_{n-s}E^s\left(x_0,z\right) . \quad (19)$$

Это в свою очередь совпадает с системой уравнений, полученной для периодической дифракционной решетки. Это выражение объясняет тот факт, что дифракцию на ДОЭ можно заменить дифракцией на локальной дифракционной решетке. В общем случае система уравнений выглядит следующим образом:

$$\frac{d^2E^n\left(x_0,z\right)}{dz^2} = -k^2L_s^nE^s\left(x_0,z\right) , \quad (20)$$

где $L_s^n = \varepsilon_{n-s} - \left(A^{-1}B\right)_s^n$.

Решение системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$E^n\left(x_0,z\right) =$$

$$= \sum\left(a^m\exp\left(ik\lambda_mz\right) + b^m\exp\left(-ik\lambda_mz\right)\right)E_m^n , \quad (21)$$

где λ_m – собственные числа оператора L.

Подставляя это выражение, получим представление общего решения в виде

$$E^{(2)}(\omega,z)=\sum_{sm}\sqrt{\frac{ik}{2\pi s\beta}}\times$$
$$\times\sum\left(a^m\exp\left(ik\lambda_m z\right)+b^m\exp\left(-ik\lambda_m z\right)\right)\times$$
$$\times E_m^s\exp\left(iksg\left(x_0\right)\right)\exp\left(-ik\frac{\left(\omega-s\alpha\right)^2}{2s\beta}\right). \qquad (22)$$

Решение в области перед дифракционным оптическим элементом имеет вид

$$E^{(1)}(\omega,z)=\sum_{s}\sqrt{\frac{ik}{2\pi s\beta}}\times$$
$$\times\left(I^s\exp\left(ik\sqrt{1-\omega^2}z\right)+R^s\exp\left(-ik\sqrt{1-\omega^2}z\right)\right)\times$$
$$\times I^s\exp\left(iksg\left(x_0\right)\right)\exp\left(-ik\frac{\left(\omega-s\alpha\right)^2}{2s\beta}\right). \qquad (23)$$

Решение в области за дифракционным оптическим элементом имеет вид

$$E^{(3)}(\omega,z)=\sum_{s}\sqrt{\frac{ik}{2\pi s\beta}}T^s\exp\left(ik\sqrt{1-\omega^2}z\right)\times$$
$$\times\exp\left(iksg\left(x_0\right)\right)\exp\left(-ik\frac{\left(\omega-s\alpha\right)^2}{2s\beta}\right). \qquad (24)$$

Коэффициенты T^s и R^s находятся из условия сшивки на обеих границах области 2 [8].

2. Асимптотические методы для решения задач дифракции на ДОЭ

В данном пункте рассмотрим применение вышеизложенных методов для расчета поля в случае дифракции волны на дифракционных оптических элементах, которые обладают зонной структурой. В предыдущем пункте мы рассматривали дифракцию на модельном ДОЭ. Рассмотрим теперь диэлектрический слой с диэлектрической проницаемостью, которая описывается выражением (1), где $g(x)$ - произвольная функция. Случай, когда функция $g(x)$ является линейной, соответствует чисто периодической структуре (дифракционной решетке). Если функция $g(x)$ не является линейной, получаем дифракционную структуру с изменяющимся периодом.

Для того, что бы воспользоваться результатами предыдущего пункта сделаем предположение о том что поле в данной точке зависит от распределения диэлектрической проницаемости в окрестности данной точки. Это предположение основано все на том же принципе локализации, который был рассмотрен выше. Далее разложим функцию $g(x)$ в окрестности точки x_0 в ряд Тейлора с точностью до членов второго порядка

$$g(x)=g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}g''(x-x_0)^2 \qquad (25)$$

и решим задачу дифракции в окрестности точки x_0. Рассмотрим только поле, прошедшее через дифракционный оптический элемент (случай поля, отраженного от оптического элемента рассматривается аналогичным образом). В пространственно-частотном представлении поле на выходе имеет вид

$$E^{(3)}(\omega)=\sum_{s}\sqrt{\frac{ik}{2\pi s\beta}}T^s\left(x_0\right)\times$$
$$\times\exp\left(iksg\left(x_0\right)\right)\exp\left(-ik\frac{\left(\omega-s\alpha\right)^2}{2s\beta}\right), \qquad (26)$$

где $\alpha=g'(x_0)$, $\beta=g''(x_0)$.

Обратимся теперь к координатному представлению. Координатное представление поля связано с пространственно-частотным представлением обычным образом с помощью преобразования Фурье

$$E^{(3)}(x,x_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}E(\omega)\exp\left(ik\omega\left(x-x_0\right)\right)d\omega. \qquad (27)$$

Подставляем и получаем следующий вид для поля в окрестности в координатном представлении

$$E^{(3)}(x,x_0)=\sum_{s}T^s\left(x_0\right)\times$$
$$\times\exp\left(iks\left(g\left(x_0\right)+\alpha\left(x-x_0\right)+\frac{1}{2}\beta\left(x-x_0\right)^2\right)\right). \qquad (28)$$

Заменяя обратно разложение в ряд Тейлора на исходную функцию, получаем, что поле в окрестности точки x_0

$$E^{(3)}(x,x_0)=\sum_{s}T^s\left(x_0\right)\exp\left(iksg\left(x\right)\right). \qquad (29)$$

Полученное выражение по форме совпадает с выражением для поля на выходе дифракционного оптического элемента, полученного в рамках метода предыскажения, рассмотренного в работе [9]. Оно также объясняет возможность использования приближения тонкого оптического элемента. Сравнивая два этих выражения, мы видим, что функция $g(x)$ имеет смысл функции эйконала для геометрооптического фокусатора. Отличие состоит в том, что коэффициент $T^s(x_0)$ имеет другой физический смысл. Напомним, что в методе предыскажения $T^s(x_0)$ совпадал с коэффициентом разложения в ряд Фурье функции предыскажения. В нашем случае он определяется согласно методу, изложенному в предыдущем пункте настоящей работы.

Заключение

В данной работе разработан асимптотический метод решения задач дифракции на ДОЭ, который сочетает в себе решение задачи дифракции на периодической структуре с периодом сравнимым с длиной волны и геометрооптический подход. Решена задача дифракции на эталонной квазипериодической структуре, сочетающей в себе функции расщепителя пучка и дифракционной линзы. На основе решения эталонной задачи получено простое выражение для поля в плоскости непосредственно прилегающей к ДОЭ. Полученное выражение позволяет оценить распределение поля на выходе ДОЭ, не прибегая к сложным вычислительным методам.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 04-01-96517, гранта CRDF RUE1-005064-SA-05, а также при поддержке российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (“BRHE”) и гранта INTAS 04-77-7198.

Литература

1. Кравцов В.В., Орлов А.А. Геометрическая оптика неоднородных сред // М.: Наука, 1979.
2. Moharam M.G., Gaylord T.K. Rigorous coupled-wave analysis of metallic surface-relief gratings // JOSA A. 1986. Vol. 3. Issue 11. P. 1780.
3. Taflove A., Hagness S. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method. – Arthech House Publishers, Boston, 2nd ed., 2000. P. 852.
4. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. // М.: Высшая школа, 1991.
5. Борн М., Вольф Э. Основы Оптики // Pergamon Press, 1986.
6. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн // М.: Наука, 1976.
7. Федорюк М.В. Асимптотики, интегралы и ряды // М.: Наука, 1987.
8. Electromagnetic Theory on Gratings / Ed. by R.Petit. Springer-Verlag, 1980.
9. Golub M.A., Doskilovich L.L., Kazansky N.L., Soifer V.A., Kharitonov S.I. Computer Generated Diffractive Multi-focal Lens // Journal of modern optics 1992. Vol. 39(6). P. 1245.