

НЕПАРАКСИАЛЬНАЯ ВЕКТОРНАЯ ДИФРАКЦИЯ ГАУССОВОГО ПУЧКА НА СПИРАЛЬНОЙ ФАЗОВОЙ ПЛАСТИНКЕ

А.А. Ковалев^{1,2}, В.В. Котляр^{1,2}

¹Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия,

²Самарский государственный аэрокосмический университет, Самара, Россия

Аннотация

Получены аналитические выражения, описывающие непараксиальную векторную дифракцию гауссова пучка на спиральной фазовой пластинке (СФП). Численно показано, что полученная комплексная амплитуда может заметно (в нашем случае 14%) отличаться от амплитуды, полученной в параксиальном приближении. Численно также показано, что продольная составляющая комплексной амплитуды может давать вклад величиной в несколько процентов от поперечной.

Введение

В современных научных исследованиях изучение вихревых лазерных пучков является важной частью сингулярной оптики [1]. Основные причины возросшего интереса к таким пучкам заключаются в возможности решения с их помощью прикладных задач [2-6].

Вихревые лазерные пучки формируются при прохождении света через спиральные оптические элементы, простейшими из которых являются спиральная фазовая пластинка (СФП) и спиральный аксикон [7].

Существует множество работ, посвященных анализу дифракции света на спиральных оптических элементах, выполненных в рамках скалярной теории дифракции. В данной работе проводится анализ векторной дифракции гауссова пучка на СФП без использования параксиального приближения. В [8] численно показано, что в ряде случаев заметный вклад дает продольная составляющая электрического вектора, не учитываемая в скалярной теории. Поэтому в данной работе получены аналитические выражения также и для продольной составляющей поля.

1. Интегральные преобразования, описывающие распространение вихревых лазерных пучков в свободном пространстве

Известно, что распространение света в свободном пространстве описывается дифракционными интегралами Рэлея-Зоммерфельда [9, 10]:

$$\left\{ \begin{aligned} E_x(u, v, z) &= -\frac{1}{2\pi} \times \\ &\times \iint_{R^2} E_x(x, y, 0) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\exp(ikR)}{R} \right] dx dy, \\ E_y(u, v, z) &= -\frac{1}{2\pi} \times \\ &\times \iint_{R^2} E_y(x, y, 0) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\exp(ikR)}{R} \right] dx dy, \\ E_z(u, v, z) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} \left\{ E_x(x, y, 0) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\exp(ikR)}{R} \right] + \right. \\ &\left. + E_y(x, y, 0) \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\exp(ikR)}{R} \right] \right\} dx dy, \end{aligned} \right. \quad (1)$$

где $R = \left[(u-x)^2 + (v-y)^2 + z^2 \right]^{1/2}$, (x, y) – декартовы координаты в плоскости СФП $z = 0$, (u, v) – декартовы координаты в плоскости, отстоящей на расстоянии z от плоскости СФП, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны.

При вычислении этих интегралов множители, содержащие производные от функции $R^{-1} \exp(ikR)$, обычно заменяют приближенными выражениями. При параксиальном приближении это делают следующим образом: в показателе быстро осциллирующих экспонент делают замену

$$R \approx z + \frac{(u-x)^2 + (v-y)^2}{2z}, \quad (2)$$

а в остальных случаях полагают $R \approx z$. После этих преобразований вместо (1) получаются следующие выражения:

$$\left\{ \begin{aligned} E_{x,y}(u, v, z) &\approx -\frac{ik}{2\pi z} \exp(ikz) \times \\ &\times \iint_{R^2} E_{x,y}(x, y, 0) \exp\left\{ \frac{ik}{2z} \times \right. \\ &\times \left. \left[(u-x)^2 + (v-y)^2 \right] \right\} dx dy, \\ E_z(u, v, z) &\approx \frac{ik}{2\pi z^2} \exp(ikz) \times \\ &\times \iint_{R^2} \left[(x-u) E_x(x, y, 0) + (y-v) E_y(x, y, 0) \right] \times \\ &\times \exp\left\{ \frac{ik}{2z} \left[(u-x)^2 + (v-y)^2 \right] \right\} dx dy, \end{aligned} \right. \quad (3)$$

где $E_{x,y}$ – это либо E_x , либо E_y . Из формулы (3) видно, что для поперечных составляющих получается известное преобразование Френеля. В [11] используется менее грубая аппроксимация: в показателе быстро осциллирующих экспонент делают замену

$$R \approx \sqrt{u^2 + v^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2ux - 2vy}{2\sqrt{u^2 + v^2 + z^2}}, \quad (4)$$

а в остальных случаях полагают

$R \approx (u^2 + v^2 + z^2)^{1/2}$. После этих преобразований вместо (1) можно приближенно записать:

$$\begin{cases} E_{x,y}(u, v, z) \approx -\frac{ikz \exp(ik\sqrt{u^2 + v^2 + z^2})}{2\pi(u^2 + v^2 + z^2)} \times \\ \times \iint_{R^2} E_{x,y}(x, y, 0) \exp\left[\frac{ik}{2\sqrt{u^2 + v^2 + z^2}} \times \right. \\ \left. \times (x^2 + y^2 - 2ux - 2vy)\right] dx dy, \\ E_z(u, v, z) \approx \frac{ik}{2\pi(u^2 + v^2 + z^2)} \exp(ik\sqrt{u^2 + v^2 + z^2}) \times \\ \times \iint_{R^2} [(x-u)E_x(x, y, 0) + (y-v)E_y(x, y, 0)] \times \\ \times \exp\left[\frac{ik}{2\sqrt{u^2 + v^2 + z^2}}(x^2 + y^2)\right] \times \\ \times \exp\left[-\frac{ik}{\sqrt{u^2 + v^2 + z^2}}(ux + vy)\right] dx dy. \end{cases} \quad (5)$$

Можно заметить, что при $(u^2 + v^2)^{1/2} \ll z$ формула (5) преобразуется в (3).

В случае, когда пучок во входной плоскости имеет вихревую составляющую, т. е.

$$\begin{cases} E_x(r, \varphi, 0) \equiv A_x(r) \exp(in\varphi), \\ E_y(r, \varphi, 0) \equiv A_y(r) \exp(in\varphi), \end{cases} \quad (6)$$

где (r, φ) – полярные координаты в плоскости $z = 0$, двойные интегралы в (3) и (5) после перехода

к полярным координатам могут быть сведены к одинарным.

В случае параксиального приближения (3) получаются следующие выражения:

$$\begin{cases} E_{x,y}(\rho, \theta, z) = (-i)^{n+1} \frac{k}{z} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta + ikz\right) \times \\ \times \int_0^\infty A_{x,y}(r) \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) J_n\left(\frac{k\rho r}{z}\right) r dr, \\ E_z(\rho, \theta, z) = (-i)^n \frac{k}{z^2} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta + ikz\right) \times \\ \times \left[\exp(i\theta) \int_0^\infty \frac{A_x(r) - iA_y(r)}{2} \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) \times \right. \\ \times J_{n+1}\left(\frac{k\rho r}{z}\right) r^2 dr - \exp(-i\theta) \times \\ \times \int_0^\infty \frac{A_x(r) + iA_y(r)}{2} \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) J_{n-1}\left(\frac{k\rho r}{z}\right) r^2 dr - \\ \left. - i\rho \int_0^\infty [A_x(r) \cos \theta + A_y(r) \sin \theta] \times \right. \\ \left. \times \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) J_n\left(\frac{k\rho r}{z}\right) r dr \right], \end{cases} \quad (7)$$

где (ρ, θ) – полярные координаты в плоскости, отстоящей на расстоянии z от плоскости СФП, $J_n(x)$ – функция Бесселя первого рода n -го порядка.

В случае непараксиального приближения (5) получаются похожие, но более точные выражения:

$$\begin{cases} E_{x,y}(\rho, \theta, z) = (-i)^{n+1} \frac{kz \exp(in\theta + ik\sqrt{\rho^2 + z^2})}{\rho^2 + z^2} \int_0^\infty A_{x,y}(r) \exp\left(\frac{ikr^2}{2\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right) J_n\left(\frac{k\rho r}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right) r dr, \\ E_z(\rho, \theta, z) = (-i)^n \frac{k}{\rho^2 + z^2} \exp(ik\sqrt{\rho^2 + z^2} + in\theta) \times \\ \times \left[\exp(i\theta) \int_0^\infty \frac{A_x(r) - iA_y(r)}{2} \exp\left(\frac{ikr^2}{2\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right) J_{n+1}\left(\frac{k\rho r}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right) r^2 dr - \right. \\ - \exp(-i\theta) \int_0^\infty \frac{A_x(r) + iA_y(r)}{2} \exp\left(\frac{ikr^2}{2\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right) J_{n-1}\left(\frac{k\rho r}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right) r^2 dr - \\ \left. - i\rho \int_0^\infty [A_x(r) \cos \theta + A_y(r) \sin \theta] \exp\left(\frac{ikr^2}{2\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right) J_n\left(\frac{k\rho r}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right) r dr \right]. \end{cases} \quad (8)$$

2. Аналитические выражения для векторной дифракции гауссового пучка на спиральной фазовой пластинке

Если на СФП падает гауссов пучок, т. е. $A_{x,y}(r) = B_{x,y} \exp(-r^2/w^2)$, то интегралы в выражениях (7) и (8) можно вычислить с помощью следующего справочного интеграла [12]:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \exp(-px^2) J_\nu(cx) x dx = \\ & = \frac{c\sqrt{\pi}}{8p^{3/2}} \exp(-y) \left[I_{\nu-1/2}(y) - I_{\nu+1/2}(y) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\operatorname{Re} \nu > -2,$$

где $y = c^2/(8\rho)$, $I_n(x)$ – функция Бесселя второго рода, и с помощью еще одного интеграла, который можно получить из (9):

$$\int_0^\infty \exp(-\rho x^2) J_\nu(cx) x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{8\rho^{3/2}} \exp(-y) \left\{ (\nu + 2 - 3y) \times \left[I_{\frac{\nu}{2}}(y) - I_{\frac{\nu+2}{2}}(y) \right] + y \left[I_{\frac{\nu-2}{2}}(y) - I_{\frac{\nu+4}{2}}(y) \right] \right\}, \quad (10)$$

После применения интегралов (9) и (10) к выражениям (8) получим:

$$\left\{ \begin{aligned} E_{x,y}(\rho, \theta, z) &= (-i)^{n+1} \frac{B_{x,y} k z \exp(in\theta + ik\sqrt{\rho^2 + z^2})}{\rho^2 + z^2} \frac{c\sqrt{\pi}}{8\rho^{3/2}} \exp(-y) \left[I_{\frac{n-1}{2}}(y) - I_{\frac{n+1}{2}}(y) \right], \\ E_z(\rho, \theta, z) &= (-i)^n \frac{k}{\rho^2 + z^2} \exp(ik\sqrt{\rho^2 + z^2} + in\theta) \frac{\sqrt{\pi}}{8\rho^{3/2}} \exp(-y) \times \\ &\times \left\{ \frac{B_x - iB_y}{2} \exp(i\theta) \left\{ (n+3-3y) \left[I_{\frac{n+1}{2}}(y) - I_{\frac{n+3}{2}}(y) \right] + y \left[I_{\frac{n-1}{2}}(y) - I_{\frac{n+5}{2}}(y) \right] \right\} - \right. \\ &- \frac{B_x + iB_y}{2} \exp(-i\theta) \left\{ (n+1-3y) \left[I_{\frac{n-1}{2}}(y) - I_{\frac{n+1}{2}}(y) \right] + y \left[I_{\frac{n-3}{2}}(y) - I_{\frac{n+3}{2}}(y) \right] \right\} - \\ &\left. - i(B_x \cos\theta + B_y \sin\theta) \operatorname{erf} \left[I_{\frac{n-1}{2}}(y) - I_{\frac{n+1}{2}}(y) \right] \right\}. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

В уравнении (11) приняты обозначения:

$$p = \frac{1}{w^2} - \frac{ik}{2\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad c = \frac{k\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad y = \frac{c^2}{8p}. \quad (12)$$

Декартовы составляющие вектора напряженности электрического поля (11) описывают в цилиндрических координатах непараксиальную дифракцию Гауссова пучка на СФП с топологическим зарядом n . Заметим, что при $B_x = \pm iB_y$ Гауссовый пучок имеет круговую поляризацию, а например при $B_x \neq 0, B_y = 0$ – линейную поляризацию.

3. Численное моделирование

При численном моделировании интегралы (7) и (8) вычислялись по методу прямоугольников и сравнивались со значениями, получаемыми при использовании формул (11) и формул, получаемых из

(11) для параксиального приближения. Таким образом, было проверено полученное выражение (10).

Затем было проведено численное сравнение параксиального приближения (7) и более точного непараксиального приближения (8). Результаты моделирования приведены на рис. 1. Были использованы следующие значения параметров: длина волны $\lambda = 633$ нм; радиус перетяжки Гауссова пучка $w = 1$ мкм; порядок СФП $n = 3$; расстояние вдоль оптической оси $z = 10$ мм; амплитуды составляющих Гауссова пучка $B_x = 1$ и $B_y = 0, 2i$ (эллиптическая поляризация).

Из рис. 1 видно, что поперечные составляющие вектора напряженности электрического поля, полученные с помощью параксиального и непараксиального приближений, отличаются друг от друга (максимальная ошибка составляла 14%). Продольная составляющая в данном случае мала.

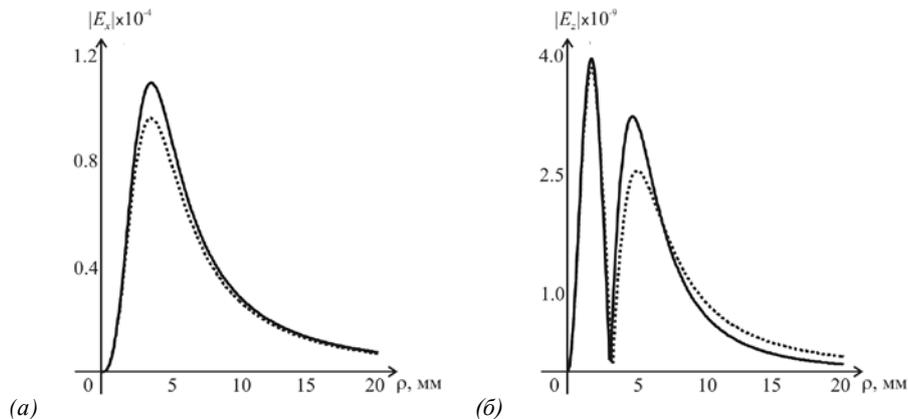


Рис. 1. Дифракция гауссова пучка на СФП: поперечная составляющая $|E_x|$ (а) и продольная составляющая $|E_z|$ (б) (сплошная кривая – в параксиальном приближении, пунктирная – в непараксиальном)

На рис. 2 показана дифракция того же гауссового пучка, но на расстоянии $z = 10$ мкм.

Из рис. 2 видно, что при таких условиях уже следует учитывать влияние на интенсивность продольной проекции вектора электрического поля, так как она составляет примерно 3% от поперечной.

На рис. 3 показано радиальное распределение модуля напряженности электрического вектора, по-

лученное по формуле (11) (сплошная кривая) и с помощью дифракционного интеграла Рэля-Зоммерфельда (1) (в виду трудоемкости вычислений значения показаны отдельными точками). Параметры расчета имеют те же значения, что и для рис. 1 и 2. Расстояние было принято равным $z = 10$ мкм.

Из рис. 3 видно, что формула (11) дает результаты, практически совпадающие с точной формулой (1).

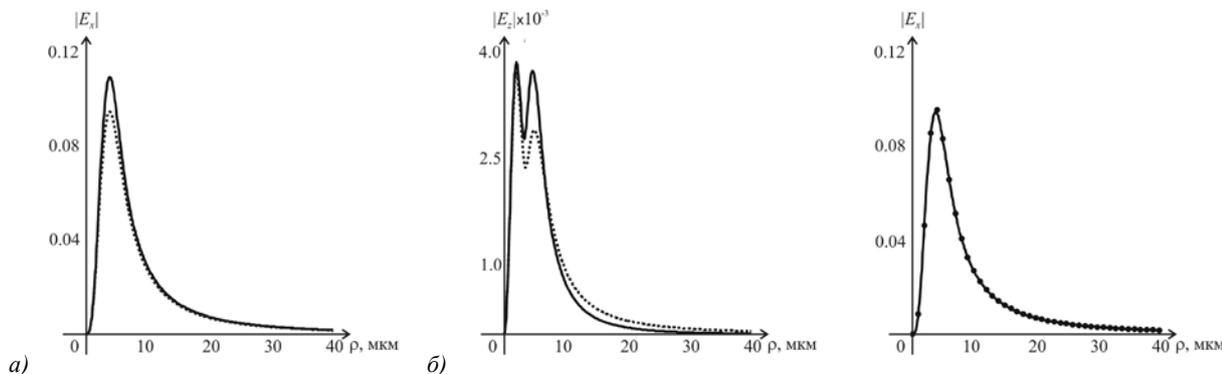


Рис. 2 Дифракция гауссового пучка на СФП при $z = 10$ мкм:
поперечная составляющая $|E_x|$ (а)
и продольная составляющая $|E_z|$ (б)
(сплошная кривая – в параксиальном приближении,
пунктирная – в непараксиальном)

Рис. 3 Сравнение результатов
расчета картины дифракции
гауссового пучка с использованием
приближенной формулы (11)
(сплошная кривая) и с помощью
точной формулы (1) (график показан
отдельными точками)

Заключение

В работе получены аналитические выражения, описывающие параксиальную и непараксиальную векторную дифракцию гауссового пучка на СФП. Численно показано, что при использовании обоих приближений полученная амплитуда может отличаться более, чем на 10%. Также показано, что продольная составляющая в некоторых случаях может составлять несколько процентов от поперечной.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (грант CRDF RUX0-014-Sa-06), а также грантов РФФИ 05-08-50298 и 07-07-97600.

Литература

1. **Soskin, M.S.** Singular Optics / M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov // Progress in Optics / ed. E. Wolf // Elsevier, Amsterdam, 2001. – V.42. – P. 219-276.
2. **Khonina, S.N.** Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements / S.N. Khonina [and other] // J. Mod. Opt., 2004. – V.51, No.14. – P. 2167-2184.
3. **Menon, R.** Absorbance-modulation optical lithography / R. Menon, H.I. Smith // J. Opt. Soc. Am. A, 2006. – V.23, No.9. – P.2290-2294.
4. **Jesacher, A.** Spiral interferogram analysis / A. Jesacher [and other] // J. Opt. Soc. Am. A, 2006. – V.23, No.6. – P.1400-1409.
5. **Palacios, D.M.** Low-order aberration sensitivity of an optical vortex coronagraph / D.M. Palacios, S.L. Hunyadi // Opt. Lett., 2006. – V.31, No.20. – P.2981-2983.
6. **Guo, C.** Radial Hilbert transform with Laguerre-Gaussian spatial filters / C. Guo [and other] // Opt. Lett., 2006. – V.31, No.10. – P.1394-1396.
7. **Khonina, S.N.** The rotor phase filter / S.N. Khonina [and other] // J. Mod. Opt., 1992. – V.39, No.5. – P.1147-1154.
8. **Ganic, D.** Focusing of doughnut laser beams by a high numerical-aperture objective in free space / D. Ganic, X. Gan, M. Gu // Opt. Express, 2003. – V.11. – P.2747-2752.
9. **Lü, B.** Nonparaxial propagation of vectorial Gaussian beams diffracted at a circular aperture / B. Lü, K. Duan // Opt. Lett., 2003. – V.28. – P.2440-2442.
10. **Luneburg, R.K.** Mathematical Theory of Optics / R.K. Luneburg – University of California Press, Berkeley, Calif., 1996.
11. **Mei, Z.** Nonparaxial analysis of vectorial Laguerre-Bessel-Gaussian beams / Z. Mei, D. Zhao // Opt. Express, 2007. – V.15. – P.11942-11951.
12. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев – М.: Наука, 1983.

NON-PARAXIAL VECTOR DIFFRACTION OF A GAUSSIAN BEAM BY A SPIRAL PHASE PLATE

A.A. Kovalev^{1,2}, V.V. Kotlyar^{1,2}

¹Image Processing Systems Institute of the RAS,

²Samara State Aerospace University

Abstract

Analytical expressions describing non-paraxial vector diffraction of a Gaussian beam by a spiral phase plate (SPP) were obtained. It was numerically shown that the obtained complex amplitude can significantly differ (in this case, by 14%) from the amplitude obtained in paraxial approximation. It was also numerically demonstrated that a longitudinal component of the complex amplitude can contribute a few percent of a transverse component.

Keywords: spiral phase plate, non-paraxial vector diffraction, Gaussian beam

Acknowledgements: The work was supported by the Russian-American Basic Research and Higher Education Program (CRDF grant RUX0-014-Sa-06), and by the Russian Foundation for Basic Research grants No. 05-08- 50298 and No. 07-07-97600.

Citation: Kovalev AA, Kotlyar VV. Non-paraxial vector diffraction of a Gaussian beam by a spiral phase plate [In Russian]. Computer Optics 2007; 31(4): 19-22.

References:

- [1] Soskin MS, Vasnetsov MV. Singular Optics. Progress in Optics. Ed. E. Wolf. Elsevier, Amsterdam 2001; 42: 219-276.
- [2] Khonina SN, et al. Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements. J Mod Opt 2004; 51(14): 2167-2184.
- [3] Menon R, Smith HI. Absorbance-modulation optical lithography. J Opt Soc Am A 2006; 23(9): 2290-2294.
- [4] Jesacher A, et al. Spiral interferogram analysis. J Opt Soc Am A 2006; 23(6): 1400-1409.
- [5] Palacios DM, Hunyadi SL. Low-order aberration sensitivity of an optical vortex coronagraph. Opt Lett 2006; 31(20): 2981-2983.
- [6] Guo C, et al. Radial Hilbert transform with Laguerre-Gaussian spatial filters. Opt Lett. 2006; 31(10): 1394-1396.
- [7] Khonina SN, et al. The rotor phase filter. J Mod Opt 1992; 39(5): 1147-1154.
- [8] Ganic D, Gan X, Gu M. Focusing of doughnut laser beams by a high numerical-aperture objective in free space. Opt Express 2003; 11: 2747-2752.
- [9] Lü B, Duan K. Nonparaxial propagation of vectorial Gaussian beams diffracted at a circular aperture. Opt Lett. 2003; 28: 2440-2442.
- [10] Luneburg RK. Mathematical Theory of Optics. University of California Press, Berkeley, Calif., 1996.
- [11] Mei Z, Zhao D. Nonparaxial analysis of vectorial Laguerre-Bessel-Gaussian beams. Opt Express 2007; 15: 11942-11951.
- [12] Prudnikov AP, Brychkov YuA, Marichev OI. Integrals and series. Special functions [In Russian]. Moscow: "Nauka" Publisher, 1983.