СРАВНЕНИЕ СВОЙСТВ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МОД И МОД БЕССЕЛЯ

С.А. Балалаев[1,2], *С.Н. Хонина*[1,2]
[1]*Самарский государственный аэрокосмический университет, Самара, Россия,*
[2]*Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия*

Аннотация

Выполнено численное моделирование распространения гипергеометрических и бесселевых мод, а также их ограниченных апертурой аналогов. Проведено сравнительное исследование этих четырех типов лазерных пучков.

Введение

Особый интерес в практическом использовании имеют лазерные пучки, обладающие небольшой дифракционной расходимостью, так как сохраняют высокую осевую концентрацию энергии на больших расстояниях. К таким пучкам относятся моды Бесселя [1] и гипергеометрические (ГГ) моды [2-4]. Последние имеют наименьшую расходимость среди известных параксиальных мод лазерного излучения. Распределение интенсивности в поперечном сечении таких пучков похоже на распределение интенсивности для мод Бесселя и представляет собой набор концентрических чередующихся светлых и темных колец. При этом в отличие от бесселевых мод гипергеометрические моды обладают одной особенностью: пространственная частота картины дифракции асимптотически стремиться к бесконечности. Известно так же, что для ограниченных ГГ-пучков, так же как и для Бесселевых, существует некоторое предельное значение расстояния, на котором пучок сохраняет свои модовые свойства.

1. Решение уравнения Шредингера

Параксиальное волновое уравнение в цилиндрических координатах (уравнение типа Шредингера) имеет вид:

$$\left(2ik\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)E(r,\varphi,z)=0\,, \qquad (1)$$

где (r,φ) - поперечные полярные координаты, z - координата, направленная вдоль оптической оси, $k=2\pi/\lambda$ - волновое число света с длинной волны λ. Решая (1) в цилиндрической системе координат вида:

$$\begin{cases} x=r\sqrt{z}\cos\varphi, \\ y=r\sqrt{z}\sin\varphi, \\ z=z, \end{cases} \qquad (2)$$

получаем решения в виде ортонормированного базиса, называемые Гипергеометрическими модами [5]:

$$E_{n,\gamma}(r,\varphi,z)=\frac{1}{2\pi n!}\left(\frac{2z}{kw^2}\right)^{\frac{i\gamma-1}{2}}\left(\frac{kr^2}{2z}\right)^{n/2}\times$$
$$\exp\left[\frac{i\pi}{4}(n-i\gamma+1)\right]\Gamma\left(\frac{n+i\gamma+1}{2}\right)\times \qquad (3)$$
$${}_1F_1\left(\frac{n-i\gamma+1}{2},n+1,\frac{ikr^2}{2z}\right)\exp(in\varphi),$$

где $n\geq 0$ – целое число, γ – комплексное число; данные числа в дальнейшем будем называть параметрами ГГ-мод; w – вещественный параметр, задающий масштаб ГГ моды, аналогичен радиусу перетяжки Гауссового пучка (в данной статье будут рассмотрены пучки для которых w=1); $\Gamma(x)$ – гамма функция и ${}_1F_1(a,\,b,\,x)$ – вырожденная (или конфлюэнтная) гипергеометрическая функция, которые были описаны ранее в работах [4, 5].

При этом на нулевом расстоянии вдоль оптической оси, при z = 0 выражение (3) имеет вид:

$$E_{n,\gamma}(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{w}{r}\right)\exp\left[i\gamma\ln\left(\frac{r}{w}\right)\right]\times \qquad (4)$$
$$\times\exp(in\varphi),$$

Существует сходное семейство решений дифференциального уравнения (1) в системе координат с неполным разделением переменных:

$$\begin{cases} x=rz\cos\varphi, \\ y=rz\sin\varphi, \\ z=z. \end{cases} \qquad (5)$$

Они являются линейно-независимыми параксиальными модами Бесселя [6]:

$$E_{n,r_0}(r,\varphi,z)=(-i)^{n+1}\sqrt{\frac{r_0}{2\pi}\frac{k}{z}}\times$$
$$\times\exp\left[i\frac{k}{2z}\left(r^2+r_0^2\right)\right]J_n\left(\frac{krr_0}{z}\right)\exp(in\varphi)\,, \qquad (6)$$

где $J_n(x)$ – функция Бесселя n-го порядка, r_0 – вещественное число.

Такой бесселевый пучок дифрагирует (расходится) по мере распространения вдоль оси z и обычно формируется с помощью узкой кольцевой диафрагмы в непрозрачном экране [7].

В данной работе проводится сравнение пучка (6) с пучком, который будет распространяться при формировании во входной плоскости (при $z=0$) ограниченного апертурой распределения:

$$E_{n,\alpha}(r,\varphi)=J_n\left(\alpha r\right)\exp(in\varphi)\,. \qquad (7)$$

В [6] было показано, что бесконечный непараксиальный бесселевый пучок, имеющий распределение (7) во входной плоскости, после преобразования Френеля остается непараксиальным (не расходящимся), однако как будет вести себя ограниченный пучок (7), формируемый, например, с использованием дифракционного оптического элемента, исследовано не было.

Распространение ограниченных апертурой пучков (4) и (7) моделировалось с помощью преобразования Френеля:

$$E(x,y,z)=\frac{k}{2\pi iz}\times \\ \times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\frac{ik}{2z}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right]\right\}\times \\ \times E_0(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta, \tag{8}$$

где $E_0(\xi,\eta)$ – входное световое поле в декартовых координатах, вычисляемое с помощью (4) или (7), а $E(x,y,z)$ – выходное поле, полученное для соответствующего входного поля на расстоянии z.

2. Численное моделирование

В данном разделе проводится сравнение четырех типов пучков: аналитических ГГ и бесселевых мод (в соответствии с формулами (3) и (6), и их ограниченных аналогов по расходимости пучков, спектру пространственной частоты картины дифракции, сохранению модовых свойств, устойчивости к экранированию.

ГГ-моды были выбраны с параметрами $n = 4$, $\gamma = -10$, а бесселевы моды с параметрами $n = 4$, и различными α. Параметр масштабирования α подбирался путем совмещения центральных колец пучков на некотором расстоянии z:

$$\alpha=\frac{kr_0}{z}. \tag{9}$$

Для ограниченного Бесселевого пучка было выбрано $\alpha = 32$ (значение, полученное при $z = 100$ *мм*).

На рис. 1 приведены рассматриваемые типы пучков с длинной волны $\lambda = 633$ *нм*, размером 2×2 *мм* и дискретизацией 1024×1024 отсчетов, на расстоянии $z = 100$ *мм*. Из рисунка видно, что искажения, возникающие из-за ограничения апертурой, сказываются на бесселевых пучках сильнее, чем на ГГ-модах.

Большой интерес также вызывает расходимость пучков. Ранее было показано [3], что ГГ-моды расходятся медленнее параксиальных бесселевых пучков (6). Для того чтобы проверить, как соотносятся расходимости ограниченных пучков (4) и (7), были проведены численные эксперименты. Расходимость отслеживалась по увеличению радиуса первого кольца в зависимости от пройденного расстояния z. Полученные зависимости представлены на рис. 2. Расходимость ограниченной ГГ-моды очень близка к своему аналитическому виду и действительно расходится до некоторого расстояния ($z = 250$ *мм*), т. е. ведет себя как непараксиальный пучок, описанный в [6], однако из-за ограниченности, только на конечном отрезке.

Сравнивая интенсивность ГГ и Бесселевых мод в поперечном сечении (рис. 1), легко заметить уменьшающийся период осцилляций ГГ-моды, в отличие от Бесселевой моды. Более наглядно это видно на рис. 3, где приведены радиальные сечения распределения интенсивности как аналитических, так и ограниченных пучков.

Для более детального исследования этого факта была введена величина, характеризующая пространственную частоту картины дифракции:

$$\omega=\frac{N}{R}, \tag{10}$$

где N – число колец светового пучка, поместившихся в апертуру радиусом R.

Выражение (10) для множества всех значений радиуса пучка, не превышающих радиус апертуры, также можно назвать спектром пространственной частоты картины дифракции:

$$\omega(r)=\frac{N}{r},\ 0<r<R. \tag{11}$$

Графики, полученные для (11) и представленные на рис. 4 показывают, что кольца Бесселевого пучка имеют постоянную, одинаковую ширину, а у гипергеометрических мод кольца постоянно сужаются, так как увеличивается частота картины дифракции. Это верно как для аналитических пучков, так и для их ограниченных аналогов.

Поскольку амплитуда (4) имеет особенность в нуле (неограниченно возрастает при $r = 0$), то сформировать такое распределение корректно невозможно, поэтому для моделирования используется также вырезание центральной области. На рис. 5*а* показано радиальное распределение интенсивности (4) и отмечены ограничители R_1 и R_2. Первый вырезает круг в центре, где интенсивность была устремлена в бесконечность. Второй является ограничителем апертурой или диафрагмой. При моделировании распространения (4) с помощью оператора Френеля (8) были получены дифракционные картины для различных ограничителей R_1 и R_2. Они представлены на рис. 6. Было проведено их сравнение с аналитическим решением (3), график которого изображен на рис. 5*б*, по среднеквадратичному отклонению (СКО):

$$\delta=\sqrt{\frac{\sum_{R_1<r<R_2}\left(I_0(r)-I(r)\right)^2}{\sum_{R_1<r<R_2}I_0^2(r)}}. \tag{12}$$

где $I_0(r)$ – интенсивность эталонного поля, вычисленная в данном случае с помощью (3); $I(r)$ – интенсивность поля, полученная с помощью преобразования Френеля.

В табл. 1 приведены параметры R_1 и R_2 подобранные таким образом, чтобы СКО было минимальным для распределения интенсивности пучка на заданном расстоянии. Как видно из таблицы 1 с ростом расстояния СКО увеличивается.

Таблица 1. Подбор параметров R_1 и R_2

z, мм	R_1, мм	R_2, мм	δ, %
100	0,05	0,99	5,29
200	0,12	0,96	11,63
400	0,23	1,00	28,91

Из таблицы 1 также видна зависимость:

$$R_1 \sim z \,. \tag{13}$$

В [2] было показано, что в связи с ограниченностью реально формируемых ГГ-пучков апертурой радиуса R_2, их модовые свойства сохраняются только до расстояния:

$$\frac{R_2}{ctg\left(\gamma/R_2\right)} > z \,. \tag{14}$$

Так же известно [7], что для Бесселевых пучков справедлива аналогичная зависимость:

$$\frac{kR_2}{\alpha} > z \,, \tag{15}$$

т.е. пропорциональность расстояния «жизни» моды радиусу ограничивающей диафрагмы.

При этом имеется обратная зависимость от «масштаба» ГГ и Бесселевых мод - γ и α. У Бесселевых мод, сформированных с помощью узкой кольцевой диафрагмы (6), этот масштаб зависит от пройденного расстояния, как показано в (9). И масштабное согласование пучка (6) с (7) возможно только при фиксированном расстоянии (рис. 7).

Исследования влияния радиуса диафрагмы (рис. 8) показали, что лучше всего оставлять целое число колец, поскольку остатки (обрезанные кольца) вносят сильные помехи в картину дифракции. Особенно хорошо это заметно на рис. 8*б*, где минимумы графиков СКО приходятся как раз на нули рассматриваемой функции Бесселя. Так в частности, лучше установить размер диафрагмы R_2 = 0,95 *мм*, а не R_2 = 1 *мм*, т. к. в этом случае умещается максимальное целое количество колец, как показано на рис. 7*а*.

В этом состоит одно из специфических отличий бесселевых мод от гипергеометрических.

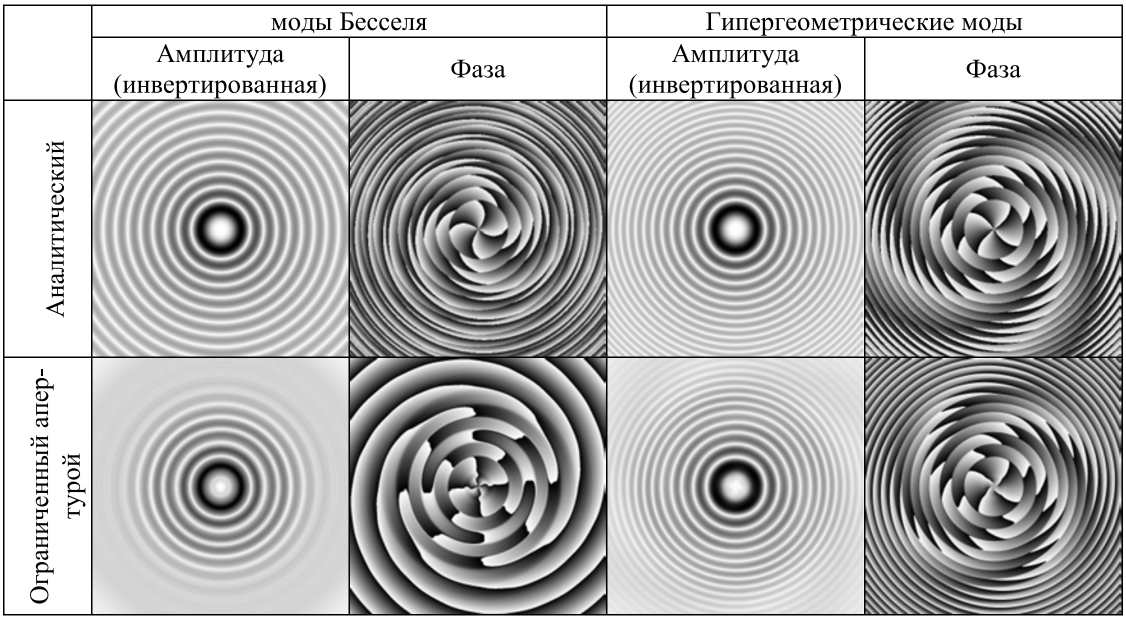


Рис. 1. Примеры гипергеометрических мод и мод Бесселя на расстоянии z=100 мм

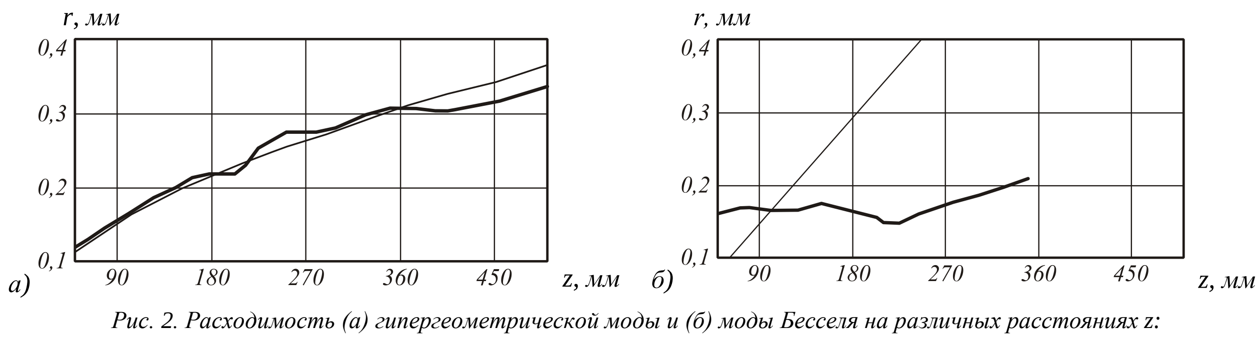


Рис. 2. Расходимость (а) гипергеометрической моды и (б) моды Бесселя на различных расстояниях z: аналитический пучок (тонкая линия), ограниченный апертурой пучок (жирная линия)

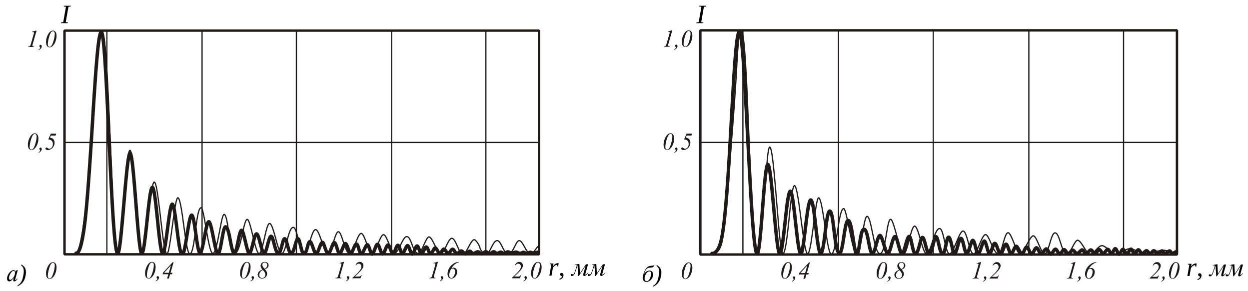


Рис. 3. Распределение интенсивности радиального сечения (а) бесконечного (б) ограниченного апертурой Бесселевого (тонкая линия) и ГГ (жирная линия) пучков

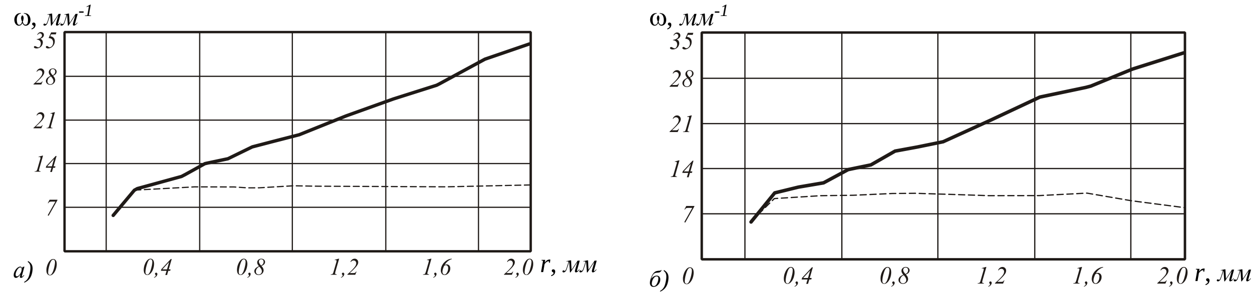


Рис. 4. Спектр пространственной частоты картины дифракции (а) бесконечного (б) ограниченного апертурой пучков: моды Бесселя (тонкая линия), ГГ-моды (жирная линия)

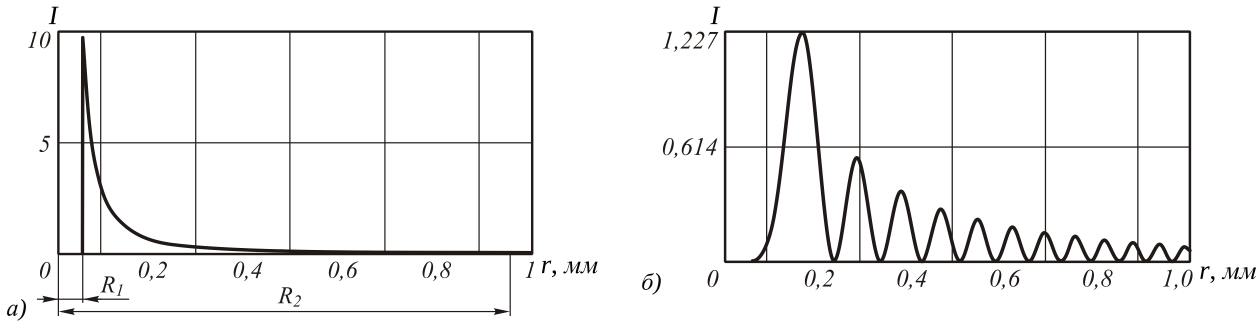


Рис. 5. Радиальное распределение интенсивности гипергеометрической моды (n = 4, γ = -10) при (а) z = 0 мм и (б) z = 100 мм (аналитический вид)

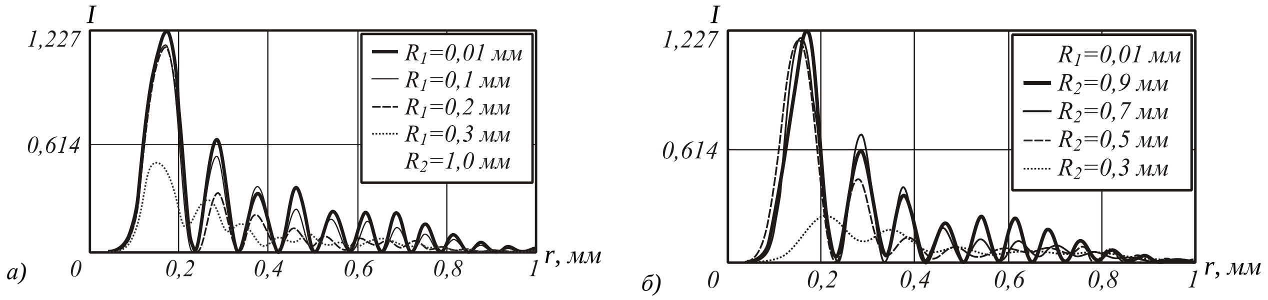


Рис. 6. Радиальное распределение интенсивности гипергеометрической моды рассчитанное с использованием преобразования Френеля при начальном распределении, показанном на рис. 5а, с апертурой, ограниченной радиусами R_1 и R_2 на расстоянии z = 100 мм: (а) варьируется радиус R_1 и (б) варьируется радиус R_2

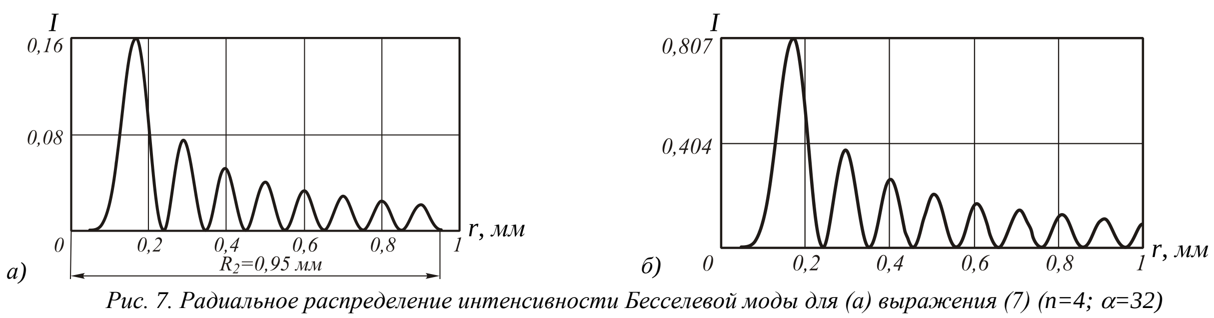


Рис. 7. Радиальное распределение интенсивности Бесселевой моды для (а) выражения (7) (n=4; α=32) при z = 0 мм и (б) аналитического решения (6) (n=4; α=64) при z = 100 мм

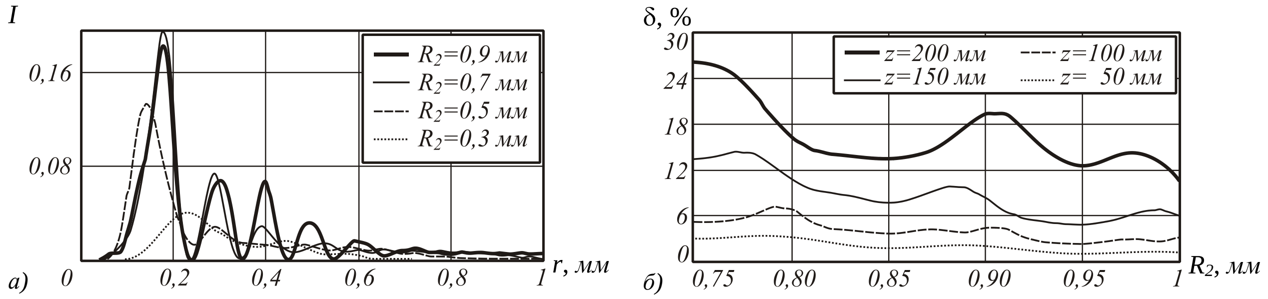


Рис. 8. Радиальное распределение интенсивности Бесселевой моды (n=4; α=32), полученное с помощью интеграла Френеля для апертуры, ограниченной радиусом R_2, при z = 100 мм (а). Зависимость среднеквадратичного отклонения полученного распределения интенсивности на различных расстояниях от исходного (7) в зависимости от радиуса апертуры R_2 (б)

Дальнейшее сравнение ограниченных ГГ и Бесселевых мод сводилось к определению максимального расстояния, на котором сохранялись их модовые свойства. С этой точки зрения ГГ-моды показали лучшие результаты. При одинаковых R_2 = 0,95*мм* и подобранных масштаба, таких что центральное кольцо было одинакового размера, ограниченная ГГ-мода отклонялась при распространении от своего аналитического вида гораздо медленней, чем бесселевый ограниченный пучок (рис. 9).

На рис. 10 можно сравнить распространение аналитических и ограниченных ГГ. Из рис. 10*б* и рис. 11 видно, что ограниченный ГГ пучок разрушается постепенно, разглаживая дифракционные осцилляции по всему радиусу пучка равномерно.

Ограниченный бесселевый пучок разрушается постепенно с периферии от кольца к кольцу (рис. 12). Для установления данного факта при расчете СКО рассматривалась область, ограниченная *N*-м кольцом (рис. 13*а*).

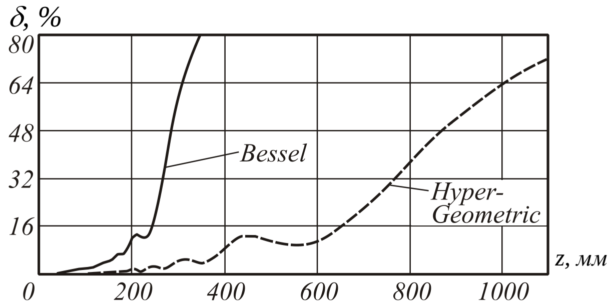


Рис. 9. Среднеквадратическое отклонение от аналитического вида для ограниченной гипергеометрической моды (n=4; γ=-10) (тонкая линия) и моды Бесселя (n=4; α=32) (жирная линия) зависимости от z.

Далее было интересно выяснить, с какой скоростью разрушаются кольца. Для этого был установлен порог визуальной «разрушенности» кольца, которая наступает при достижении значения СКО δ = 20%. График зависимости разрушения колец (по номеру) от пройденного пучком расстояния приведен на рис. 13*б*, он имеет линейный характер.

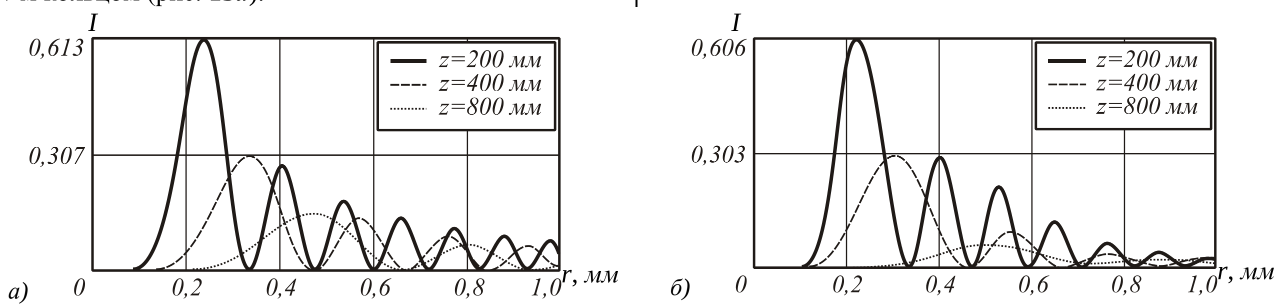


Рис. 10. Радиальное распределение интенсивности гипергеометрической моды (n=4; γ=-10) на различных расстояниях (а) для аналитического решения (3) и (б) при моделировании распространения пучка (7), ограниченной кольцевой апертурой с радиусами R_1=0,01 мм и R_2=1 мм

Заключение

В заключении кратко сформулируем полученные результаты.

- Ограниченная ГГ-мода демонстрирует такую же расходимость, как и аналитическая – пропорционально $\sqrt{z}$, однако ограниченный бесселевый пучок имеет расходимость, среднюю между непараксиальным и параксиальным своим аналитическим решением.
- Проведенный анализ спектра частот поперечного распределения интенсивности показал, что, в отличие от Бесселевых, у ГГ-мод ширина колец сужается, линейно увеличивая свою пространственную частоту, с ростом радиуса пучка.
- Получены зависимости радиусов апертуры R_1 и R_2 для ограниченных пучков ГГ-моды и R_2 – бесселевой для формирования дифракционной картины на определенных расстояниях z с наименьшей погрешностью. Численно подтверждены зависимости (14), (15).

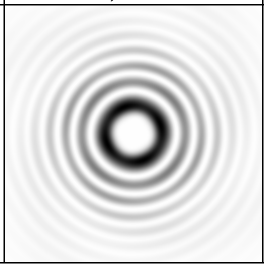
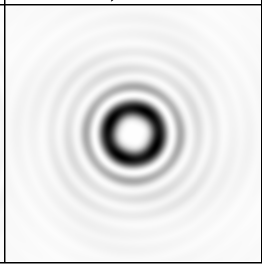
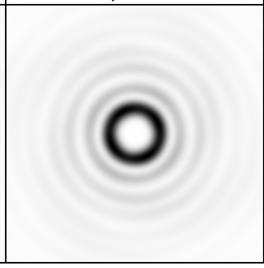
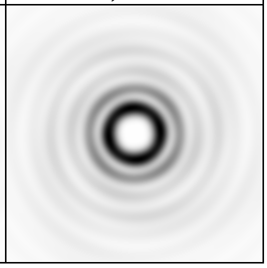
z	200 *мм*	400 *мм*	600 *мм*	800 *мм*
$R_{вых}$	1,0 *мм*	1,5 *мм*	2,0 *мм*	2,5 *мм*
Интенсивность инв..				

Рис. 11. Распределение инвертированной интенсивности гипергеометрического пучка на различных расстояниях z для кольцевой апертуры с радиусами R_1 = 0,01 мм R_2 = 1,0 мм.

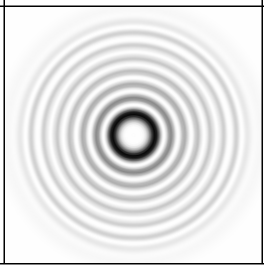
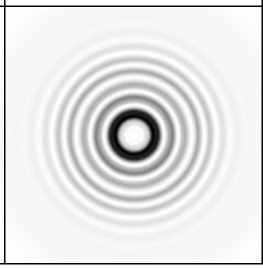
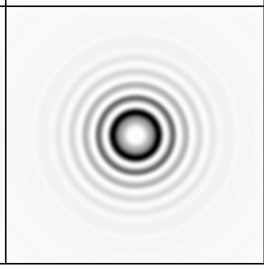
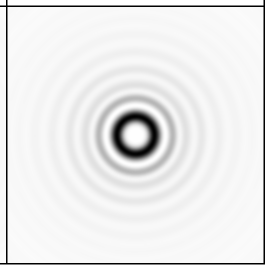
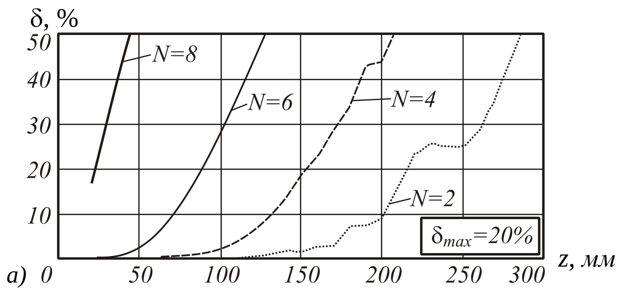
z	25 *мм*	87 *мм*	152 *мм*	215 *мм*
N	8	6	4	2
Интенсивность инв..				

Рис. 12. Распределение инвертированной интенсивности бесселевого пучка (с N уцелевшими кольцами) на различных расстояниях z для круглой апертуры радиуса R2 = 1,0 мм.



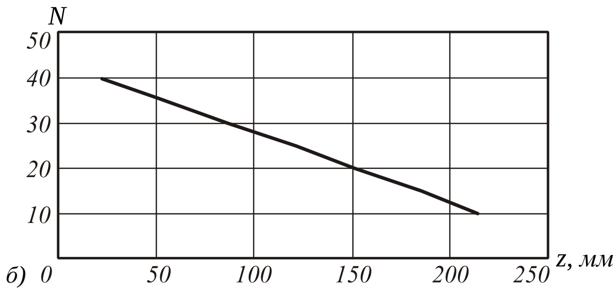


Рис. 13. Среднеквадратическое отклонение ограниченного Бесселевого пучка от идеального в области, ограниченной N-м кольцом на различных расстояниях z(а).
Зависимость количества не разрушенных колец бесселевого пучка N от пройденного им расстояния z(б)

- Установлено, что ограниченная ГГ-мода сохраняет свои свойства на расстоянии, которое примерно в 3 раза больше, чем расстояние, на котором сохраняет свои свойства ограниченный бесселевый пучок, имеющий тот же масштаб.
- Кольца ограниченных бесселевых мод при распространении разрушаются постепенно от кольца к кольцу, начиная с крайнего, причем зависимость разрушения от расстояния z линейна. Ограниченная ГГ-мода разрушается по всему радиусу равномерно.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 07-07-97600.

Литература

1. Miller W. Jr. Symmetry and Separation of Variables, Addison-Wesley Pub., MA, 1977.
2. Kotlyar V.V., Skidanov R.V., Khonina S.N., Soifer V.A. Hypergeometric modes // Opt. Lett., 2007. - V.32. - N.7. - P. 742-744.
3. Котляр В.В., Хонина С.Н., Алмазов А.А., Сойфер В.А. Оптические чистые вихри и гипергеометрические моды // Компьютерная оптика, Самара, ИСОИ РАН, 2005. - № 27. - С. 21-27. Котляр В.В., Скиданов Р.В., Хонина С.Н., Балалаев С.А. Гипергеометрические моды // Компьютерная оптика, 2006. - № 30. - С. 16-22.
4. А.А. Ковалев, В.В. Котляр, С.Н. Хонина, В.А. Сойфер Параксиальные гипергеометрические лазерные пучки с особенностью в центре перетяжки // Компьютерная оптика. - Самара, ИСОИ РАН, 2007. - № 31. - С. 9-13.
5. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Skidanov R.V., Soifer V.A., Jefimovs K., Simonen J., Turunen J. Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements // J. Mod. Opt., 2004. - V.51. - N. 14. - P. 2167-2184.
6. Durnin J., et al. Diffraction-free beams. Phys. Rev. Lett., 1987

COMPARISON OF PROPERTIES OF HYPERGEOMETRIC MODES AND BESSEL MODES

S.A. Balalayev[1], S.N. Khonina[1,2]
[1]Samara State Aerospace University,
[2]Image Processing Systems Institute of the RAS

Abstract

Propagation of hypergeometric and Bessel modes, and their aperture-limited analogues was numerically simulated. The comparative study of these four types of laser beams was performed.

<u>*Keywords:*</u> Bessel modes, hypergeometric modes, aperture-limited beams, beams propagation

<u>*Citation:*</u> Balalayev SA, Khonina SN. Comparison of properties of hypergeometric modes and Bessel modes [In Russian]. Computer Optics 2007; 31(4): 23-28.

<u>*Acknowledgements*</u>: The work was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research grant No. 07-07-97600.

References:

[1] Miller WJr. Symmetry and Separation of Variables. Addison-Wesley Pub, MA, 1977.
[2] Kotlyar VV, Skidanov RV, Khonina SN, Soifer VA. Hypergeometric modes. Opt Lett. 2007; 32(7): 742-744.
[3] Kotlyar VV, Khonina SN, Almazov AA, Soifer VA. Optical pure vortices and hypergeometric modes [In Russian]. Computer Optics 2005; (27): 21-27.
[4] Kotlyar VV, Skidanov RV, Khonina SN, Balalayev SA. Hypergeometric modes [In Russian]. Computer Optics 2006: (30): 16-22.
[5] Kovalev AA, Kotlyar VV, Khonina SN, Soifer VA. Paraxial hypergeometric laser beams with singularity at the waist center [In Russian]. Computer Optics 2007; 31(1): 9-13.
[6] Khonina SN, Kotlyar VV, Skidanov RV, Soifer VA, Jefimovs K, Simonen J, Turunen J. Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements. J. Mod. Opt. 2004; 51(14): 2167-2184.
[7] Durnin J, et al. Diffraction-free beams. Phys. Rev. Lett., 1987.