

## ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ ОПТИЧЕСКОМ ВОЛОКНЕ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПАРАКСИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

А.С. Стрилец<sup>1</sup>, С.Н. Хонина<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Самарский государственный аэрокосмический университет, Самара, Россия,

<sup>2</sup>Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия

### Аннотация

В данной работе исследуется интеграл, который описывает распространение света в среде с параболическим профилем показателя преломления в параксиальном приближении в рамках скалярной теории. Этот интегральный оператор аналогичен преобразованию Френеля, описывающему в том же приближении распространение света в свободном пространстве.

### 1. Теоретические основы

#### 1.1. Описание распространения электромагнитной монохроматической волны в среде с параболическим профилем показателя преломления

Рассмотрим среду (волновод) с параболической зависимостью показателя преломления от поперечных декартовых координат  $x$  и  $y$

$$n^2(r) = n_0^2 \left( 1 - 2\Delta \frac{r^2}{r_0^2} \right), \quad (1)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  - радиус цилиндрической системы координат;  $n_0$  - показатель преломления на оси  $z$  волновода при значении радиуса  $r = 0$ ;  $r_0$  - радиус волновода;  $\Delta$  - параметр дисперсии показателя преломления среды.

Уравнение (1) можно переписать в следующем виде

$$n^2(r) = n_0^2 - \alpha r^2, \quad (2)$$

где  $\alpha = 2\Delta \frac{n_0^2}{r_0^2}$  - коэффициент при величине  $r^2$ .

Распространение электромагнитной монохроматической волны в среде с указанным показателем преломления  $n(r)$  при условии, что изменения показателя преломления малы по сравнению с длиной волны, описывается уравнением Гельмгольца [1]:

$$\left[ \nabla^2 + k^2 n^2(r) \right] E(x, y, z) = 0, \quad (3)$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  - оператор Лапласа;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  - волновое число, здесь  $\lambda$  - длина волны в вакууме;  $E(x, y, z)$  - комплексная амплитуда светового поля.

В параксиальном приближении справедливо соотношение

$$E(x, y, z) = F(x, y, z) \exp(ikn_0 z), \quad (4)$$

где  $i$  - комплексная единица;  $F(x, y, z)$  - медленно изменяющаяся в зависимости от величины  $z$

комплексная амплитуда (условие медленного изменения  $\left| \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right| \ll 2kn_0 \left| \frac{\partial F}{\partial z} \right|$ ).

Учитывая соотношение (4) уравнение Гельмгольца (3) в параксиальном приближении принимает следующий вид:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ikn_0 \frac{\partial}{\partial z} - \alpha k^2 (x^2 + y^2) \right] \times F(x, y, z) = 0. \quad (5)$$

Согласно [2] от уравнения (5) можно перейти к эквивалентному интегральному соотношению

$$F(\xi, \eta, z) = -\frac{i\alpha}{2\pi \sin(\omega z)} \times \exp \left\{ \frac{i\alpha}{2 \tan(\omega z)} (\xi^2 + \eta^2) \right\} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_0(x, y) \exp \left\{ \frac{i\alpha}{2 \sin(\omega z)} \times \left[ (x^2 + y^2) \cos(\omega z) - 2(x\xi + y\eta) \right] \right\} dx dy, \quad (6)$$

где  $\omega = \frac{\alpha}{k}$  - отношение описанных выше величин  $\alpha$  и  $k$ .

Выражение (6) является параксиальным интегралом распространения электромагнитной волны в волокне с параболическим профилем показателя преломления. Этот интеграл позволяет определять распределение комплексной амплитуды  $F(\xi, \eta, z)$  в плоскости, находящейся на некотором расстоянии  $z$  от начала координат, по начальному распределению  $F_0(x, y)$  в плоскости  $z = 0$ .

#### 1.2. Анализ параксиального интегрального оператора для произвольного монохроматического светового поля

Проанализируем интегральное соотношение (6) на различных расстояниях  $z$  от начальной плоскости.

1. Расстояние, определяемое условием  $\omega z \ll 1$  или, если переписать в другой форме  $z \ll \frac{k}{\alpha}$ .

При этом условии можно считать  $\sin(\omega z) \approx \omega z$ ,  $\cos(\omega z) \approx 1$ , а интеграл (6) примет вид преобразования Френеля:

$$F(\xi, \eta, z) = -\frac{ik}{2\pi z} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_0(x, y) \exp\left\{\frac{ik}{2z} [(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2]\right\} dx dy, \quad (7)$$

которое описывает распространение электромагнитной волны в свободном пространстве в параксиальном приближении.

Так как действие преобразования Френеля (7) на начальный световой пучок увеличивает его эффективный радиус, то можно ожидать аналогичное увеличение результата интеграла (6) по сравнению с начальным распределением.

2. Расстояние, определяемое соотношением

$$z_m = \frac{(\pi/2) + \pi(l-1)}{\omega}, \quad l - \text{натуральное число.}$$

В этом случае  $\sin(\omega z_l) = (-1)^{l-1}$ ,  $\cos(\omega z_l) = 0$ , а параксиальный интеграл переписется в виде

$$F(\xi, \eta, z_l) = -\frac{i\alpha}{2\pi(-1)^{l-1}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_0(x, y) \exp\left\{-\frac{i\alpha}{(-1)^{l-1}}(\xi x + \eta y)\right\} dx dy. \quad (8)$$

Рассмотрим следующие возможные варианты:

1) при нечётном значении  $l$  интеграл (6) принимает вид преобразования Фурье

$$F(\xi, \eta, z_l) = -\frac{i\alpha}{2\pi} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_0(x, y) \exp\{-i\alpha(\xi x + \eta y)\} dx dy; \quad (9)$$

2) при чётном значении  $l$  интеграл (6) имеет вид обратного преобразования Фурье

$$F(\xi, \eta, z_l) = \frac{i\alpha}{2\pi} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_0(x, y) \exp\{i\alpha(\xi x + \eta y)\} dx dy. \quad (10)$$

3. Расстояние, определяемое соотношением  $z_l = \pi l / \omega$ ,  $l$  - натуральное число.

В этой ситуации  $\sin(\omega z_l) = 0$ ,  $\cos(\omega z_l) = (-1)^l$ . При этом интеграл (6) следует рассматривать в пределе при переходе  $z \rightarrow z_l$

$$F(\xi, \eta, z_l) = -\frac{i\alpha}{2\pi} \times \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\sin(t)} \exp\left\{\frac{(-1)^l i\alpha}{2\sin(t)}(\xi^2 + \eta^2)\right\} \right] \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_0(x, y) \exp\left\{\frac{i\alpha}{2\sin(t)} \times \left[(x^2 + y^2)(-1)^l - 2(x\xi + y\eta)\right]\right\} dx dy. \quad (11)$$

Далее возможны две ситуации:

1) если значение  $l$  - нечётное, то, сделав замену

$$\frac{\alpha}{2\sin(t)} \text{ на } u, \text{ получим следующее}$$

$$F(\xi, \eta, z_l) = -\frac{1}{\pi} \lim_{u \rightarrow \infty} \left[ iu \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_0(x, y) \times \exp\{-iu[(\xi+x)^2 + (\eta+y)^2]\} dx dy \right], \quad (12)$$

пользуясь пределом [3]

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{\frac{iu}{\pi}} \exp(-iux^2) \right\} = \delta(x),$$

окончательно имеем

$$F(\xi, \eta, z_m) = -\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_0(x, y) \delta(\xi+x) \delta(\eta+y) dx dy = -F_0(-\xi, -\eta), \quad (13)$$

где  $\delta(x)$  - дельта функция Дирака.

2) если значение  $l$  - чётное, то, сделав замену

$$-\frac{\alpha}{2\sin(t)} \text{ на } u, \text{ аналогично получим следующее}$$

$$F(\xi, \eta, z_m) = \frac{1}{\pi} \lim_{u \rightarrow \infty} \left[ iu \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_0(x, y) \times \exp\{-iu[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2]\} dx dy \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_0(x, y) \delta(\xi-x) \delta(\eta-y) dx dy = F_0(\xi, \eta). \quad (14)$$

Итак, согласно проделанным выкладкам, параксиальный интеграл (6) даёт периодически повторяющееся результирующее распределение комплексной амплитуды  $F(\xi, \eta, z)$  с периодом

$$z_T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi k}{\alpha}. \text{ На отрезке } z \in [0, z_T] \text{ этот интеграл}$$

имеет следующие особые точки:

- 1) при значении  $z = \frac{1}{4}z_T = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi k}{2\alpha}$  распределение  $F(\xi, \eta, z)$  является преобразованием Фурье от  $F_0(x, y)$ ;
- 2) при значении  $z = \frac{1}{2}z_T = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi k}{\alpha}$  результат  $F\left(\xi, \eta, \frac{1}{2}z_T\right) = -F_0(-\xi, -\eta)$ , т.е. является симметрично отраженным исходным распределением;
- 3) при значении  $z = \frac{3}{4}z_T = \frac{3\pi}{2\omega} = \frac{3\pi k}{2\alpha}$  распределение  $F(\xi, \eta, z)$  является обратным преобразованием Фурье от  $F_0(x, y)$ ;
- 4) при значении  $z = z_T$  распределение  $F(\xi, \eta, z)$  в точности равно начальному распределению  $F(\xi, \eta, z_T) = F_0(\xi, \eta)$ .

Теперь перейдём к исследованию интеграла (6) в случае, когда  $F_0(x, y)$  представляет собой отдельную моду Гаусса–Лагерра или их суперпозицию.

1.3. Анализ действия параксиального интегрального оператора на моды Гаусса-Лагерра

Известно, что в идеальной градиентной среде с параболическим профилем показателя преломления распространяются моды Гаусса-Лагерра, которые образуют полный ортонормированный базис и теоретически позволяют разложить по ним произвольное поле с любой наперёд заданной точностью [4]. Таким образом, наибольший интерес представляет собой исследование действия параксиального интегрального оператора на моды Гаусса-Лагерра и их суперпозиции, так в этом случае можно сравнить полученные результаты с теоретическими.

Комплексную амплитуду мод ГЛ можно представить в цилиндрической системе координат в следующем виде [5]:

$$\Psi_{n,m}(r, \varphi, z) = C_{n,m} \left(\frac{r\sqrt{2}}{\sigma_0}\right)^{|m|} \times \times L_n^{|m|} \left(\frac{2r^2}{\sigma_0^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma_0^2}\right) \exp(im\varphi) \exp(i\beta_{n,m}z), \tag{15}$$

где  $\sigma_0 = \left(\frac{\lambda r_0}{\pi n_0}\right)^{1/2} (2\Delta)^{-1/4}$  - эффективный радиус фундаментальной моды;  $n, m$  - целые числа, определяющие порядок моды,  $n \geq 0$ ;  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\varphi = \arctan(y/x)$ ,  $z$  - координаты цилиндрической системы координат;

$\beta_{n,m} = \sqrt{k^2 n_0^2 - (4/\sigma_0^2)(2n + |m| + 1)}$  - коэффициент, определяющий фазовую скорость соответствующей моды;  $C_{n,m} = \frac{1}{\sigma_0} \sqrt{\frac{2n!}{\pi(n + |m|)!}}$  - константа нормировки;

$L_n^m(x)$  - обобщенный многочлен Лагерра, определяемый следующими соотношениями

$$L_0^m(x) = 1, \quad L_1^m(x) = 1 + m - x, \\ L_n^m(x) = \frac{1}{n} [(2n + m - 1 - x)L_{n-1}^m(x) - (n + m - 1)L_{n-2}^m(x)].$$

Вычислим интеграл (6) в цилиндрической системе координат при начальном распределении

$$F_0(r, \varphi) = \Psi_{n,m}(r, \varphi, 0) = C_{n,m} \left(\frac{r\sqrt{2}}{\sigma_0}\right)^{|m|} \times \times L_n^{|m|} \left(\frac{2r^2}{\sigma_0^2}\right) \exp\left\{-\frac{r^2}{\sigma_0^2} + im\varphi\right\}; \\ F(\rho, \theta, z) = -\frac{i\alpha C_{n,m}}{2\pi \sin(\omega z)} \exp\left\{\frac{i\alpha\rho^2}{2 \tan(\omega z)}\right\} \times \times \int_0^\infty \left(\frac{r\sqrt{2}}{\sigma_0}\right)^{|m|} L_n^{|m|} \left(\frac{2r^2}{\sigma_0^2}\right) \exp\left\{-\frac{r^2}{\sigma_0^2}\right\} \times \times \exp\left\{\frac{i\alpha r^2}{2 \tan(\omega z)}\right\} \left[\int_0^{2\pi} \exp(im\varphi) \times \times \exp\left\{-i\frac{\alpha r \rho}{\sin(\omega z)} \cos(\varphi - \theta)\right\} d\varphi\right] r dr, \tag{16}$$

где  $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ ,  $\theta = \arctan(\eta/\xi)$ .

Используя справочные интегралы [4]:

$$\int_0^{2\pi} \exp(im\varphi) \exp\{-ix \cos(\varphi)\} d\varphi = \frac{2\pi}{i^{|m|}} J_{|m|}(x), \tag{17}$$

$$\int_0^\infty r^{|m|+1} \exp\{-ar^2\} L_n^{|m|}(br^2) J_{|m|}(cr) dr = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{2}\right)^{|m|} \frac{(a-b)^n}{a^{|m|+n+1}} \exp\left\{-\frac{c^2}{4a}\right\} \times \times L_n^{|m|} \left(\frac{c^2 b}{4a(b-a)}\right), \tag{18}$$

где  $J_{|m|}(x)$  - функция Бесселя первого рода порядка  $|m|$ , в итоге можно получить следующее

$$F(\rho, \theta, z) = C_{n,m} \frac{\sigma_0}{\sigma(z)} \left( \frac{\rho\sqrt{2}}{\sigma(z)} \right)^{|m|} \times \quad (19)$$

$$\times L_n^{|m|} \left( \frac{2\rho^2}{\sigma^2(z)} \right) \exp \left\{ i\beta_{n,m}(\rho, z) - \frac{\rho^2}{\sigma^2(z)} + im\theta \right\},$$

где  $\sigma(z) = \sigma_0 \sqrt{\cos^2(\omega z) + \frac{4 \sin^2(\omega z)}{\alpha^2 \sigma_0^4}}$  - эффективный радиус распределения  $F(\rho, \theta, z)$ ;

$$\beta_{n,m}(\rho, z) = (2n + |m| + 1) \times$$

$$\times \left[ \arctan \left\{ \frac{\alpha \sigma_0^2}{2 \tan(\omega z)} \right\} - \frac{\pi}{2} \right] + \left( 1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2(z)} \right) \frac{\alpha \rho^2}{2 \tan(\omega z)}$$

- функция, определяющая фазовую скорость  $F(\rho, \theta, z)$ .

Результат интегрирования похож на моду ГЛ (15). Отличие состоит в зависимости амплитуды и эффективного радиуса пучка от расстояния  $z$ , а также фазы от радиуса  $\rho$  и расстояния  $z$ .

При условии  $\omega z \ll 1 \ll$  уравнение (19) совпадает с уравнением, описывающим распространение мод ГЛ в свободном пространстве в параксиальном приближении [5]:

$$F(\rho, \theta, z) = C_{n,m} \frac{\sigma_0}{\sigma(z)} \left( \frac{\rho\sqrt{2}}{\sigma(z)} \right)^{|m|} L_n^{|m|} \left( \frac{2\rho^2}{\sigma^2(z)} \right) \times \quad (20)$$

$$\times \exp \left\{ \frac{i\pi\rho^2}{\lambda R(z)} - i\beta_{n,m}(z) - \frac{\rho^2}{\sigma^2(z)} + im\theta \right\},$$

где  $\beta_{nm}(z) = (2n + |m| + 1) \arctan \left( \frac{z}{z_0} \right)$ ,  $R(z) = z \left( 1 + \frac{z_0^2}{z^2} \right)$

- радиус кривизны параболического фронта светового поля,  $\sigma^2(z) = \sigma_0^2 \left( 1 + z^2/z_0^2 \right)$  - эффективный радиус пучка,  $z_0 = \pi\sigma_0^2/\lambda$  - конфокальный параметр.

Ниже на рис. 1, 2 приведено несколько графиков зависимости эффективного радиуса фундаментальной моды из формулы (19) от расстояния при следующих параметрах:  $\lambda = 633 \cdot 10^{-6}$  мм,  $n_0 = 1,5$ .

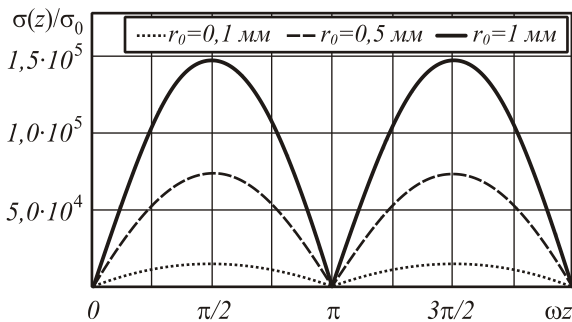


Рис. 1. Зависимость  $\sigma(z)/\sigma_0$  от величины  $\omega z$  при параметре дисперсии  $\Delta = 0,001$  и различных значениях радиуса волокна  $r_0$

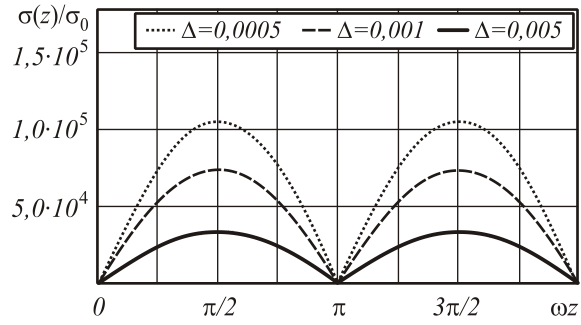


Рис. 2. Зависимость  $\sigma(z)/\sigma_0$  от величины  $\omega z$  для волокна с радиусом  $r_0 = 0,5$  мм и различными значениями дисперсионного параметра  $\Delta$

Из рис. 1, 2 видно, что расходимость пучка уменьшается с уменьшением радиуса волокна  $r_0$  и увеличением его дисперсионного параметра  $\Delta$ .

Эффективный радиус принимает максимальное значение  $\sigma = \frac{2}{\alpha\sigma_0}$  в точках  $z_l = \frac{\pi + 2\pi(l-1)}{2\omega}$ , где формируется Фурье спектр исходного пучка, и минимальное значение  $\sigma = \sigma_0$  в точках  $z_l = \frac{\pi l}{\omega}$ .

Если для эффективного радиуса выполняется соотношение

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} = \frac{r_0}{n_0 \sqrt{\Delta}}, \quad (21)$$

то пучок, описываемый уравнением (19), не расширяется. Однако, как видно из выражения (21), в этом случае эффективный радиус будет значительно превышать радиус самого волокна.

Перейдём к анализу суперпозиций световых пучков. В частности рассмотрим суперпозиции мод ГЛ и соответствующих результатов действия на них интегрального параксиального оператора.

1.4. Анализ действия параксиального интегрального оператора на суперпозицию мод Гаусса-Лагерра

Рассмотрим суперпозицию двух пучков  $E(r, \varphi, z) = C_1 E_1(r, \varphi, z) + C_2 E_2(r, \varphi, z)$ . Интенсивность этой суперпозиции определяется следующей формулой

$$I(r, \varphi, z) = I^{(1)}(r, \varphi, z) + I^{(2)}(r, \varphi, z) \cos \{ \Phi(r, \varphi, z) \}, \quad (22)$$

где

$$I^{(1)}(r, \varphi, z) = |C_1 I_1(r, \varphi, z) + C_2 I_2(r, \varphi, z)|,$$

$$I^{(2)}(r, \varphi, z) = 2|C_1 C_2| \sqrt{I_1(r, \varphi, z) I_2(r, \varphi, z)},$$

$$\Phi(r, \varphi, z) = \arg [C_1] - \arg [C_2] + \arg [E_1(r, \varphi, z)] - \arg [E_2(r, \varphi, z)].$$

Для суперпозиции двух мод ГЛ можно записать

$$\Phi(r, \varphi, z) = \arg[C_1] - \arg[C_2] + (\beta_{n_1, m_1} - \beta_{n_2, m_2})z + (m_1 - m_2)\varphi. \quad (23)$$

Приравнивая выражение (23) к константе и, затем, дифференцируя по переменной  $z$ , можно найти скорость вращения суперпозиции вокруг оси волокна

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\beta_{n_1, m_1} - \beta_{n_2, m_2}}{m_1 - m_2}. \quad (24)$$

Суперпозиция двух мод ГЛ представляет собой пучок, не меняющий формы и равномерно вращающийся вокруг оси со скоростью (24). Суперпозиция мод ГЛ, имеющих одинаковое значение  $2n + |m| + 1$ , распространяется, как единая мода, не вращаясь.

Для результата действия интегрального оператора (19) на суперпозицию двух мод можно записать

$$\begin{aligned} \Phi(r, \varphi, z) &= \arg[C_1] - \arg[C_2] + \\ &+ \beta_{n_1, m_1}(\rho, z) - \beta_{n_2, m_2}(\rho, z) + (m_1 - m_2)\theta = \\ &= \arg[C_1] - \arg[C_2] + (2(n_1 - n_2) + |m_1| - |m_2|) \times \\ &\times \arctan \left\{ \frac{\alpha \sigma_0^2}{2 \tan(\omega z)} \right\} + (m_1 - m_2)\theta. \end{aligned} \quad (25)$$

Аналогично можно получить скорость вращения

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{2(n_1 - n_2) + |m_1| - |m_2|}{m_1 - m_2} \frac{2}{k \sigma^2(z)}. \quad (26)$$

В отличие от предыдущего случая (24) здесь скорость вращения уменьшается по модулю с увеличением расстояния  $z$ , и, начиная с некоторого момента, при приближении к точке формирования Фурье-спектра, пучок практически не вращается. При приближении к точке формирования перевернутого исходного изображения скорость вращения вновь возрастает.

## 2. Численное моделирование

### 2.1. Результаты численного моделирования распространения мод Гаусса-Лагерра и их суперпозиций

В данном разделе приведены результаты численного моделирования распространения с помощью (6) световых полей, представляющих собой моды Гаусса-Лагерра и их суперпозиции, т.к. их можно сравнить с теоретическим представлением (15).

При расчётах принимались следующие значения параметров электромагнитной волны и среды её распространения:

- 1)  $\lambda = 633 \cdot 10^{-6} \text{ мм}$  - длина волны в вакууме;
- 2)  $\Delta = 0,001$  - дисперсионный параметр градиентной среды;
- 3)  $r_0 = 0,5 \text{ мм}$  - радиус волновода;
- 4)  $n_0 = 1,5$  - показатель преломления на оси волновода.

При указанных параметрах фундаментальная мода волновода имеет следующий эффективный радиус

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \left( \frac{\lambda r_0}{\pi n_0} \right)^{1/2} (2\Delta)^{-1/4} = \\ &= \left( \frac{633 \cdot 10^{-6} \cdot 0,5}{\pi \cdot 1,5} \right)^{1/2} (2 \cdot 0,001)^{-1/4} \approx 0,0388 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Численное интегрирование выражения (6) производилось по методу последовательного интегрирования [6] с использованием квадратурных формул Симпсона. При этом выбирался одинаковый шаг интегрирования  $h$  по каждой из координат. Погрешность вычисления параксиального интеграла при указанном методе порядка  $O(h^4)$ .

На рис. 3 приводятся полученные изображения интенсивности результатов численного расчёта параксиального интеграла для мод ГЛ  $\Psi_{0,0}$  (первая строка),  $\Psi_{0,1}$  (вторая строка) и суперпозиции  $\Psi_{1,0} + \Psi_{0,2} + \Psi_{0,-2}$  (третья строка).

Как видно из (15) интенсивность отдельных мод при распространении в градиентном волокне не должна меняться. Каждая компонента суперпозиции  $\Psi_{1,0} + \Psi_{0,2} + \Psi_{0,-2}$  имеет одинаковое число  $2n + |m| + 1 = 3$  и, следовательно, одну и ту же фазовую скорость, поэтому данная суперпозиция должна распространяться, как единая мода, с сохранением начального распределения интенсивности на любом расстоянии.

Однако из рис. 3 видно, что при сохранении структуры, поперечная картина всех этих пучков уширяется. Причем, в связи с очень малым значением  $\omega$ , уширение будет происходить на расстоянии сотни километров, и только после прохождения точки формирования Фурье-спектра начнется сужение.

На рис. 4 приводятся полученные изображения интенсивности результатов численного интегрирования параксиального интеграла (6) (вторая строка) и расчёта суперпозиции  $\Psi_{0,1} + \Psi_{1,0}$  по аналитической формуле (15) (первая строка). Размер изображений на первой и второй строках – 0,2 мм. Если бы эффективный радиус выбирался в соответствии с соотношением (21), то размер изображений был около 50 мм.

Теоретическое распределение интенсивности данной суперпозиции вращается вокруг оси волновода с постоянной скоростью, определяемой уравнением (24). Распределение интенсивности результата действия параксиального оператора на данную суперпозицию вращается с переменной скоростью вокруг оси волновода, определяемой формулой (26). Вблизи формирования Фурье-спектра это вращение практически прекращается.

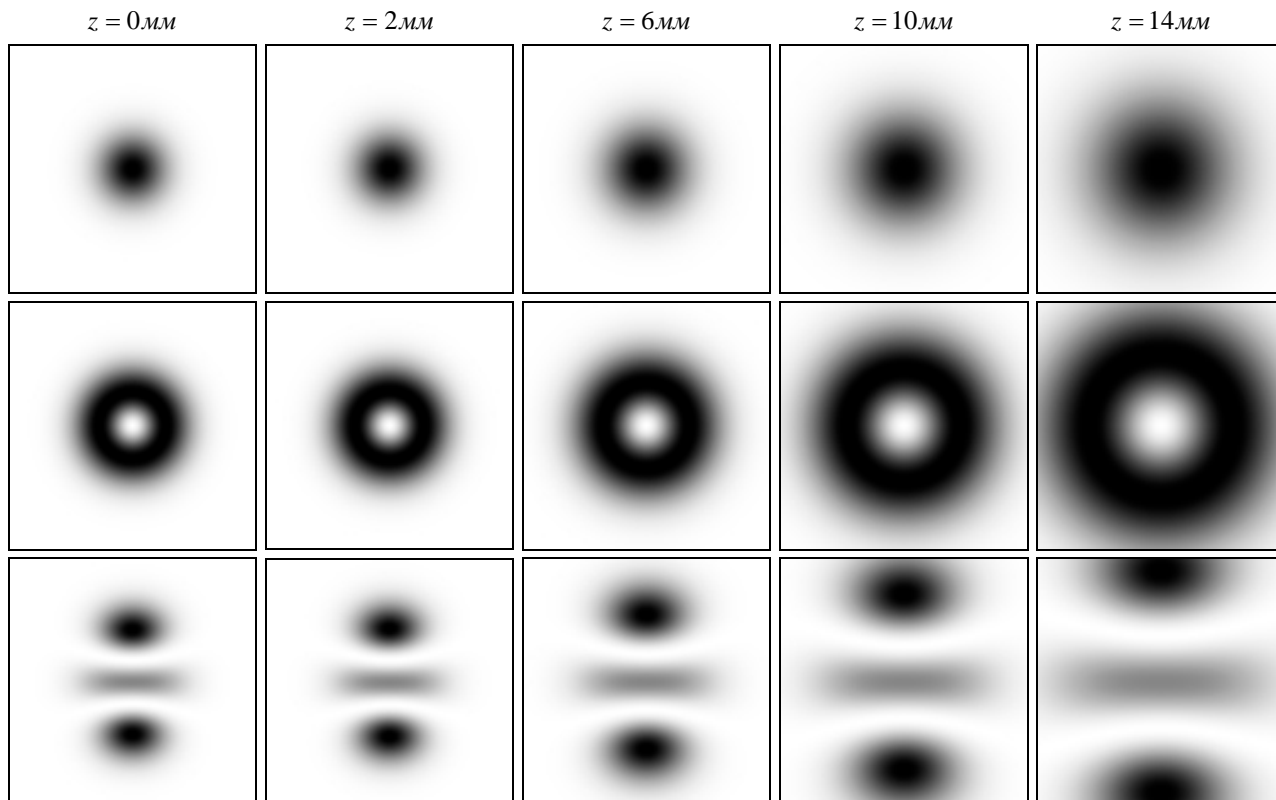


Рис. 3. Интенсивность на различных расстояниях, полученная с помощью (б) при использовании в качестве исходных распределений мод ГЛ  $\Psi_{0,0}$  (первая строка),  $\Psi_{0,1}$  (вторая строка) и суперпозиции  $\Psi_{1,0} + \Psi_{0,2} + \Psi_{0,-2}$  (третья строка)

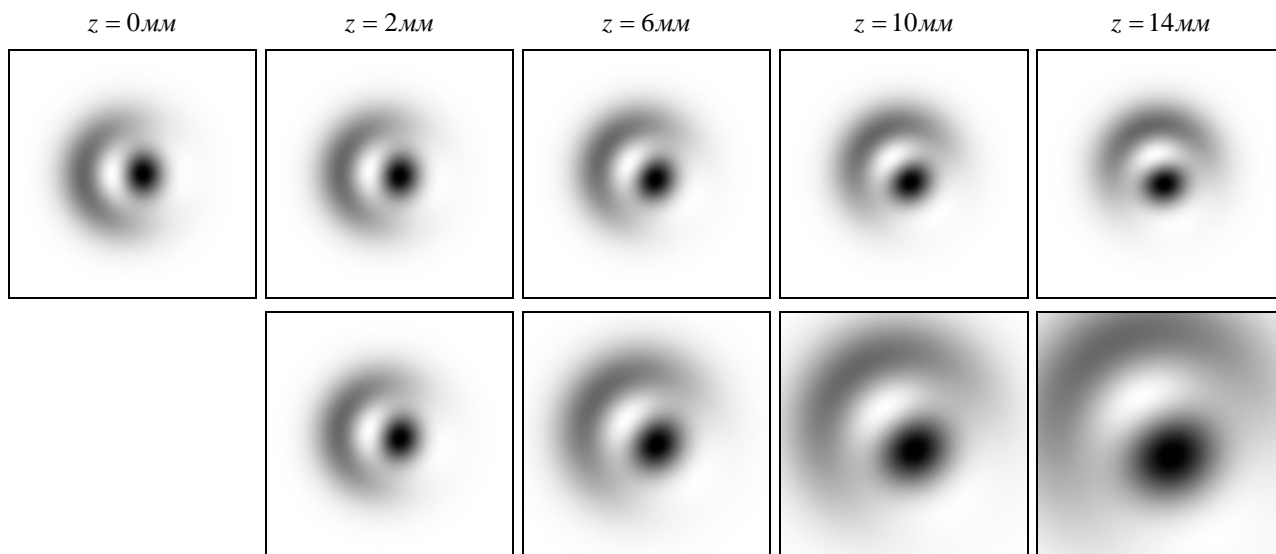


Рис. 4. Интенсивность на различных расстояниях для суперпозиции мод ГЛ  $\Psi_{0,1} + \Psi_{1,0}$ , полученная по аналитической формуле (15) (первая строка), с помощью численного интегрирования выражения (б) (вторая строка)

### 3. Заключение

При анализе параксиального интеграла (б) было установлено, что его результаты повторяются с определённым периодом по координате  $z$ . На четверти и трёх четвертях периода формируется Фурье-спектр начального распределения, на полу-периоде образуется с точностью до знака повёрнутое исходное распределение.

Аналитически был получен результат действия исследуемого оператора на отдельные моды Гаусса-Лагерра и их суперпозиции и показано, что в этом случае пучок при сохранении модовой структуры периодически масштабно уширяется и сужается. При условии  $\omega z \ll 1$  (которое ввиду очень малого значения  $\omega$  выполняется на расстоянии около сотни километров), полученное урав-

нение совпадает с уравнением, описывающим распространение мод ГЛ в свободном пространстве в параксиальном приближении. Также скорость вращения для «вращающихся» суперпозиций становится не постоянной, а уменьшается с увеличением пройденного расстояния, затем снова увеличивается после точки формирования Фурье-спектра.

Численное моделирование подтвердило полученные аналитические выкладки.

#### *Благодарности*

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 07-07-99007.

#### *Литература*

1. **Agrawal, G.P.** Fiber-Optic Communication Systems / G.P. Agrawal - John Wiley, (3rd Edition), 2002
2. **Котляр, В.В.** Операторное описание параксиальных световых полей / В.В. Котляр, С.Н. Хонина, Я. Ванг // Компьютерная оптика, 2001. - № 21. - С. 45 - 52.
3. **Смокий, О.И.** Методы теории систем и преобразований в оптике / О.И. Смокий, В.А. Фабриков - М.: Наука, 1987.
4. **Корн, Г.** Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн - М.: Наука, 1977. - 832 с.
5. Методы компьютерной оптики / Под ред. В.А. Соифера. - М.: Физматлит, 2003. - 688 с.
6. **Калиткин, Н.Н.** Численные методы / Н.Н. Калиткин - М.: Наука, 1978. - 512 с.

### INVESTIGATION OF PROPAGATION OF LASER BEAMS IN A PARABOLIC OPTICAL FIBER WITH AN INTEGRAL PARAXIAL OPERATOR

*A.S. Striletz<sup>1</sup>, S.N. Khonina<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Samara State Aerospace University, Samara, Russia,*

<sup>2</sup>*Image Processing Systems Institute of the RAS, Samara, Russia*

#### **Abstract:**

The paper investigates an integral which describes light propagation in medium with a parabolic-like refractive index profile in the paraxial approximation within the framework of the scalar theory. This integral operator is similar to the Fresnel transform that describes the same approximation of light propagation in free space.

**Keywords:** parabolic optical fiber, paraxial approximation, integral propagation operator, Fresnel transform.

**Citation:** Striletz AS, Khonina SN. Investigation of propagation of laser beams in a parabolic optical fiber with an integral paraxial operator [In Russian]. Computer Optics 2007; 31(4): 33-39.

**Acknowledgement:** The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research grant No. 07-07-99007.

#### **References:**

- [1] Agrawal GP. Fiber-Optic Communication Systems. 3rd Edition. John Wiley, 2002.
- [2] Kotlyar VV, Khonina SN, Wang Ya. Operator description of paraxial light fields [In Russian]. Computer Optics 2001; (21): 45-52.
- [3] Smokiy OI, Fabrikov VA. Methods of systems theory and transformations in optics [In Russian]. Moscow: "Nauka" Publisher, 1987.
- [4] Korn G, Korn T. Mathematical Handbook [In Russian]. Moscow: "Nauka" Publisher, 1977; 832 p.
- [5] Methods of Computer Optics. Edited by V.A. Soifer [In Russian]. Moscow: "Fizmatlit" Publisher, 2003; 688 p.
- [6] Kalitkin NN. Numerical methods [In Russian]. Moscow: "Nauka" Publisher, 1978; 512p.