ОБОБЩЁННЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИНУС-КОСИНУСНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Каспарьян М.С.
Институт систем обработки изображений РАН,
Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ)

Аннотация

Вводится обобщённое синус-косинусное преобразование (ОСКП). Получены аналитические условия ортогональности таких преобразований. Доказывается теорема, которая позволяет связать коэффициенты ОСКП в ортогональном случае. Рассматриваются быстрые алгоритмы вычисления ОСКП, и оценивается их сложность.

Ключевые слова: ортогональные преобразования, синус-косинусное преобразование, быстрые алгоритмы (БА).

Введение

Вопросы обработки сигналов-изображений остаются в центре внимания различных специалистов. Изображения выступают и как результат, и как объект исследований в физике, космонавтике, метеорологии, криминалистике и многих других областях науки и техники. Кроме того, системы обработки изображений в настоящее время используются для решения многих прикладных задач.

Несмотря на то, что проблема синтеза дискретных ортогональных преобразований (ДОП) и их быстрых алгоритмов рассматривается уже давно и существует множество работ, посвящённых этой теме, нерешённые проблемы в теории дискретного спектрального анализа, синтеза ДОП и их БА остаются. Это связано с тем, что классы обрабатываемых сигналов довольно общие и спектр вычислительных средств достаточно широк, в силу чего асимптотически хороший алгоритм совершенно не обязательно является таковым же для данного значения ограничивающих параметров: длина преобразования, специфика обрабатываемого сигнала, специфика используемых вычислительных средств.

В связи с этим понятными становятся проблемы теории ДОП, которая уже переросла утилитарную значимость как средство обработки сигналов и превратилась в самостоятельную научную дисциплину, находящуюся на стыке информатики и теоретической математики, причём в теоретической математике используются весьма нетривиальные факты абстрактной алгебры.

В обзорной статье [1] С. С. Агаяна обоснована необходимость рассмотрения дискретных тригонометрических ортогональных преобразований с базисными функциями вида

$$h_m(n) = \mathrm{A}(m)\cos\left(\frac{\pi}{N}\alpha_0(m+\alpha_1)(n+\alpha_2)\right) + \mathrm{B}(m)\sin\left(\frac{\pi}{N}\alpha_0(m+\alpha_1)(n+\alpha_2)\right), \quad (1)$$

где $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ – параметры, которые являются рациональными числами, а A(m), B(m) – коэффициенты преобразования, которые могут быть как действительными, так и комплексными.

В статье [1] приводятся конкретные параметры и коэффициенты, при которых (1) совпадает с известными унитарными преобразованиями, а именно:

1) дискретное преобразование Фурье [2] при (2, 0, 0) и $\left(1/\sqrt{N},\, i/\sqrt{N}\right)$;
2) дискретное преобразование Хартли [3] при (2, 0, 0) и $\left(1/\sqrt{N},\, 1/\sqrt{N}\right)$;
3) дискретные косинусные преобразования [2, 4] при:
   а) $(1, 0, 1/2)$ и $(\lambda(m), 0)$, где
   $$\lambda(m) = \begin{cases} 1/\sqrt{N}, & \text{если } m = 0, \\ \sqrt{2/N}, & \text{если } m \neq 0; \end{cases}$$
   б) $(1,\, 1/2,\, 1/2)$ и $\left(\sqrt{2/N}, 0\right)$;
4) дискретное синусное преобразование [2] при: $(1,\, 1,\, 1/2)$ и $(0, \lambda(m))$, где
   $$\lambda(m) = \begin{cases} 1/\sqrt{N}, & \text{если } m = N-1, \\ \sqrt{2/N}, & \text{если } m \neq N-1; \end{cases}$$
   $(1,\, 1/2,\, 1/2)$ и $\left(0,\, \sqrt{2/N}\right)$.

Классы, которые покрывают преобразования (1), не исчерпываются лишь описанными выше. В статье приводится теорема, обеспечивающая ортогональность этих функций в случае действительных коэффициентов A и B.

1. Обобщённое синус-косинусное преобразование

Базисные функции (1) можно привести к виду, более удобному для дальнейших рассуждений, выразив синус и косинус через сумму и разность экспонент

$$h_m(n) = A\exp\left(\frac{2\pi i}{N}a(m+b)(n+c)\right) + B\exp\left(\frac{-2\pi i}{N}a(m+b)(n+c)\right), \quad (2)$$

где $A = (\mathrm{A} - i\mathrm{B})/2$ и $B = \overline{A} = (\mathrm{A} + i\mathrm{B})/2$.

Определение

Система функций $\{h_p\}_{p=0}^{N-1}$ называется ортогональной, если $(h_p, h_q) = C\delta_q^p$, где δ_n^k – символ Кронекера,

$C \neq 0$. Если $C = 1$, то система функций $\left\{h_p\right\}_{p=0}^{N-1}$ ортонормирована.

Так как произведение функций $h_p(n)\overline{h_q(n)}$

$$\begin{aligned}h_p(n)\overline{h_q(n)} &= A\overline{A}\exp\left(\frac{2\pi i}{N}\left[na(p-q)+ca(p-q)\right]\right)+\\&+A\overline{A}\exp\left(\frac{-2\pi i}{N}\left[na(p-q)+ca(p-q)\right]\right)+\\&+A^2\exp\left(\frac{2\pi i}{N}\left[na(p+q+2b)+ca(p+q+2b)\right]\right)+\\&+\overline{A^2}\exp\left(\frac{-2\pi i}{N}\left[na(p+q+2b)+ca(p+q+2b)\right]\right),\end{aligned} \tag{3}$$

то, вводя обозначения $X = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\left[ca(p-q+2b)\right]\right)$ и $Y = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\left[ca(p+q+2b)\right]\right)$, преобразуем (3) к виду

$$\begin{aligned}h_p(n)\overline{h_q(n)} &= |A|^2 X\exp\left(\frac{2\pi i}{N}na(p-q)\right)+\\&+|A|^2\overline{X}\exp\left(\frac{-2\pi i}{N}na(p-q)\right)+\\&+A^2Y\exp\left(\frac{2\pi i}{N}na(p+q+2b)\right)+\\&+\overline{A^2}\overline{Y}\exp\left(\frac{-2\pi i}{N}na(p+q+2b)\right).\end{aligned}$$

В этих обозначениях скалярное произведение примет вид

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1}h_p(n)\overline{h_q(n)} &= |A|^2 X\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left(\frac{2\pi i}{N}na(p-q)\right)+\\&+|A|^2\overline{X}\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left(\frac{-2\pi i}{N}na(p-q)\right)+\\&+A^2Y\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left(\frac{2\pi i}{N}na(p+q+2b)\right)+\\&+\overline{A^2}\overline{Y}\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left(\frac{-2\pi i}{N}na(p+q+2b)\right).\end{aligned} \tag{4}$$

Соотношение (4) позволяет получить условия ортогональности.

Теорема 1 (об ортогональности синус-косинусного преобразования)

Пусть

$$h_p(n) = A\exp\left(\frac{2\pi i}{N}a(p+b)(n+c)\right)+ +\overline{A}\exp\left(\frac{-2\pi i}{N}a(p+b)(n+c)\right),$$

$НОД(N,a)=1$ и $b\in\mathbb{R}$, тогда система функций $\left\{h_p(n)\right\}_{p=0}^{N-1}$ ортогональна, если коэффициенты имеют вид

$$\begin{cases} b=\dfrac{\gamma+2g}{4(a-t)},\ c=\dfrac{1}{2}-\dfrac{Nt}{2a},\ \text{при } -\dfrac{\overline{A}^2}{A^2}=\exp(\gamma\pi i),\ \begin{matrix} g,t\in\mathbb{Z},\\ 2ab\notin\mathbb{Z},\end{matrix}\\ c=\dfrac{s}{2l},\ b=\dfrac{t}{2k},\ \text{при } 2ab\in\mathbb{Z},\ s,t\in\mathbb{Z},\ \dfrac{\overline{A}^2}{A^2}=-1,\\ c=\dfrac{\gamma+2t}{4a},\ \text{при } b=\dfrac{1}{2},\ t\in\mathbb{Z},\ -\dfrac{\overline{A}^2}{A^2}=\exp(\gamma\pi i).\end{cases}$$

Доказательство

Из выражения (4), с учётом обозначений $u = p+q$ и $v = p-q$, получим

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{N-1}h_p(n)\overline{h_q(n)} =\\&=\left.\begin{aligned}&|A|^2 X\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left(\frac{2\pi i}{N}nav\right)+\\&+|A|^2\overline{X}\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left(\frac{-2\pi i}{N}nav\right)\end{aligned}\right\}S_1(u)\\&\left.\begin{aligned}&+A^2Y\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left(\frac{2\pi i}{N}na(u+2b)\right)+\\&+\overline{A}^2\overline{Y}\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left(\frac{-2\pi i}{N}na(u+2b)\right)\end{aligned}\right\}S_2(u).\end{aligned} \tag{5}$$

Найдём отдельно каждую суммы S_1 и S_2 в равенстве (5)

$$S_1(v)=\begin{cases}\dfrac{1-\exp(2a\pi iv)}{1-\exp\left(\dfrac{2a\pi i}{N}v\right)}\left(|A|^2X+|A|^2\overline{X}\dfrac{\exp\left(\dfrac{2a\pi i}{N}v\right)}{\exp(2a\pi iv)}\right),\ v\neq 0,\\ N|A|^2\left(X+\overline{X}\right),\ v=0.\end{cases} \tag{6}$$

$$S_2(u)=\begin{cases}\dfrac{1-\exp(2a\pi i(u+2b))}{1-\exp\left(\dfrac{2a\pi i}{N}(u+2b)\right)}\left(A^2Y+\overline{A}^2\overline{Y}\dfrac{\exp\left(\dfrac{2a\pi i}{N}(u+2b)\right)}{\exp(a\pi i(u+2b))}\right), a(u+2b)\neq 0(\operatorname{mod} N),\\ N\left(A^2Y+\overline{A}^2\overline{Y}\right), a(u+2b)\equiv 0(\operatorname{mod} N).\end{cases} \tag{7}$$

Заметим, что при $v \neq 0$ сумма S_1 всегда равна нулю, а при $v = 0$ $X = \overline{X} = 1$, поэтому S_1 примет вид

$$S_1(v) = \begin{cases} 0,\ v \neq 0, \\ 2N\left|A\right|^2,\ v = 0. \end{cases} \quad (8)$$

При исследовании выражения (7) для $S_2(u)$ возможно различать три случая.

1. $2ab \notin \mathbb{Z}$, тогда S_2 примет вид

$$S_2(u) = \frac{1-\exp\left(2a\pi i\left(u+2b\right)\right)}{1-\exp\left(\frac{2a\pi i}{N}\left(u+2b\right)\right)}\times$$

$$\times\left(\begin{array}{l} A^2Y + \\ +\overline{A}^2\overline{Y}\dfrac{\exp\left(\frac{2a\pi i}{N}\left(u+2b\right)\right)}{\exp\left(a\pi i\left(u+2b\right)\right)} \end{array}\right).$$

Теперь выполнение условия ортогональности равносильно выполнению условия $S_2(u) = 0$.

$$S_2(u) = 0 \Leftrightarrow A^2Y + \overline{A}^2\overline{Y}\frac{\exp\left(\frac{2a\pi i}{N}\left(u+2b\right)\right)}{\exp\left(2a\pi i\left(u+2b\right)\right)} = 0,$$

т.к. $\dfrac{1-\exp\left(2a\pi i\left(u+2b\right)\right)}{1-\exp\left(\frac{2a\pi i}{N}\left(u+2b\right)\right)} \neq 0$.

Подставив Y, получим

$$S_2(u) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^2\exp\left(\frac{2ac\pi i}{N}\left(u+2b\right)\right) +$$

$$+\overline{A}^2\exp\left(\frac{-2ac\pi i}{N}\left(u+2b\right)\right)\frac{\exp\left(\frac{2a\pi i}{N}\left(u+2b\right)\right)}{\exp\left(2a\pi i\left(u+2b\right)\right)} = 0 \Leftrightarrow \quad (9)$$

$$\Leftrightarrow A^2 + \overline{A}^2\frac{\exp\left(\frac{2a\pi i}{N}\left(u+2b\right)\left(1-2c\right)\right)}{\exp\left(2a\pi i\left(2b\right)\right)} = 0.$$

Коэффициент A не должен зависеть от суммы номеров функций, а это равносильно тому, что

$$a\left(1-2c\right) = Nt \Leftrightarrow c = \frac{1}{2} - \frac{Nt}{2a},\ \text{где}\ t \in \mathbb{Z}.$$

Подставим получившееся c в равенство (9)

$$A^2 + \overline{A}^2\frac{\exp\left(2t\pi i\left(2b\right)\right)}{\exp\left(2a\pi i\left(2b\right)\right)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^2\exp\left(-2b\left(t-a\right)\pi i\right) + \overline{A}^2\exp\left(2b\left(t-a\right)\pi i\right) = 0. \quad (10)$$

Полагая, что $-(\overline{A}^2/A^2) = \exp(\gamma\pi i)$, выражение (5) примет вид

$$\exp\left(4b\left(a-t\right)\pi i\right) = \exp(\gamma\pi i). \quad (11)$$

Выразим из (11) в явном виде b

$$b = \frac{\gamma + 2g}{4\left(a-t\right)}, \quad (12)$$

где $g \in \mathbb{Z}$.

2. Теперь рассмотрим случай, когда $2ab \in \mathbb{Z}$ и $(\overline{A}^2/A^2) = -1$, тогда S_2 примет вид

$$S_2(u) = \begin{cases} 0, a\left(u+2b\right) \neq 0\left(\operatorname{mod} N\right), \\ N\left(A^2Y + \overline{A}^2\overline{Y}\right), a\left(u+2b\right) \equiv 0\left(\operatorname{mod} N\right). \end{cases} \quad (13)$$

Тогда ортогональность системы $\left\{h_p\left(n\right)\right\}_{p=0}^{N-1}$ равносильна тому, что

$$A^2Y + \overline{A}^2\overline{Y} = 0. \quad (14)$$

Используя условие, что $(\overline{A}^2/A^2) = -1$, равенство (14) преобразуем к виду

$$Y/\overline{Y} = 1. \quad (15)$$

Подставив Y, получим

$$\exp\left(\frac{4ac\pi i}{N}\left(u+2b\right)\right) = 1. \quad (16)$$

Так как $2ab \in \mathbb{Z}$, то будем представлять a в виде $a = k \cdot l$, где k – такое число, что $2kb \in \mathbb{Z}$. Существуют такие u, что $k\left(u+2b\right) = Nt$, где $t \in \mathbb{Z}$. Подставляя $a = k \cdot l$ в (12) и зная, что $k\left(u+2b\right) = Nt$, выразим c в явном виде

$c = s/2l$, где $s \in \mathbb{Z}$.

Так как $2kb \in \mathbb{Z}$, то b выразим тоже в явном виде

$b = \dfrac{t}{2k}$, где $t \in \mathbb{Z}$.

3. $b = \dfrac{1}{2}$ и $-\dfrac{\overline{A}^2}{A^2} = \exp\left(\gamma\pi i\right) \neq 1$.

Данный случай схож со случаем 2, но условие ортогональность функций здесь равносильно не выполнению равенства (16), а выполнению равенства

$$\exp\left(\frac{4ac\pi i}{N}\left(u+1\right)\right) = \exp\left(\gamma\pi i\right). \quad (17)$$

Причём условие $a\left(u+2b\right) \equiv 0\left(\operatorname{mod} N\right)$ выполняется только для *u=N-1*. Поэтому выражение (13) примет вид

$$\exp\left(4ac\pi i\right) = \exp\left(\gamma\pi i\right). \quad (18)$$

Выразив c, получим

$c = \gamma + 2t/4a$. ■

Из доказательства теоремы видно, что нормирующий множитель для преобразований с базисными функциями (2) равен $N\left|A^2\right|$.

С помощью теоремы 1 можно получить известные ортогональные преобразования, например, преобразование Хартли или преобразования Вонга [5].

Для преобразования Хартли, например, коэффициент a равен единице, $s=t=0$, $A=1+i$.

Ниже представлены примеры новых ортогональных базисов, полученных с помощью теоремы 1.

Пример 1. Пусть

$$h_p(n)=\frac{1}{\sqrt{2N}}\sin\left(\frac{18\pi}{N}\left(p+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{108}\right)\right)+$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2N}}\cos\left(\frac{18\pi}{N}\left(p+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{108}\right)\right),$$

где $НОД(N,9)=1$, тогда система функций $\left\{h_p\right\}_{p=0}^{N-1}$ будет ортонормированной.

Пример 2 (косинусное преобразование). Пусть

$$h_p(n)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}}\cos\left(\frac{2\pi}{N}\left(p+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{4}\right)\right),$$

тогда система функций $\left\{h_p\right\}_{p=0}^{N-1}$ будет ортонормированной.

Пример 3 (синусное преобразование). Пусть

$$h_p(n)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}}\sin\left(\frac{18\pi}{N}\left(p+\frac{1}{32}\right)\left(n-\frac{1}{9}\right)\right),$$

где $НОД(N,9)=1$, тогда система функций $\left\{h_p\right\}_{p=0}^{N-1}$ будет ортонормированной.

2. Быстрые алгоритмы вычисления синус-косинусных преобразований

Для вычисления спектров ДОП с базисными функциями (2) можно использовать два подхода.

Первый подход основан на том, что базисы с функциями (2) являются рекуррентными базисами, т.е. они удовлетворяют некоторому линейному рекуррентному соотношению с заданными начальными условиями. Поэтому вычислять спектр можно с помощью матричного алгоритма [7].

Второй подход основан на том, что базисные функции (2) являются суммой базисных функций преобразования Фурье, сдвинутых по номеру и аргументу. Поэтому вычисления спектра можно свести к вычислению двух спектров преобразования Фурье.

Пусть $x(n)$ – N-периодическая последовательность, тогда её спектр:

$$\begin{aligned}
X(m)&=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)h_m(n)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\left(\begin{array}{l}A\exp\left(\frac{2\pi ki}{N}(m+b)\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)+\\ +B\exp\left(\frac{-2\pi ki}{N}(m+b)\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)\end{array}\right)=\\
&=A\exp\left(\frac{\pi ki}{N}(m+b)\right)\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\exp\left(\frac{2\pi ki}{N}n(m+b)\right)+B\exp\left(\frac{-\pi ki}{N}(m+b)\right)\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\exp\left(\frac{-2\pi ki}{N}n(m+b)\right)=\\
&=A\exp\left(\frac{\pi ki}{N}(m+b)\right)X_1(m)+B\exp\left(\frac{-\pi ki}{N}(m+b)\right)X_2(m).
\end{aligned}\tag{19}$$

Если представить b в виде частного p/q, то спектры X_1 и X_2 можно вычислить через обычное ДПФ длины N_q.

Пусть $M_{ДПФ}(K)$ – мультипликативная сложность вычисления ДПФ длины K, $A_{ДПФ}(K)$ – аддитивная сложность вычисления ДПФ длины K, тогда мультипликативная и аддитивная сложности ОСКП будут равны

$$\begin{aligned}
M_{ОСКП}(N)&=2M_{ДПФ}(Nq)+2N,\\
A_{ОСКП}(N)&=2A_{ДПФ}(Nq)+N
\end{aligned}\tag{20}$$

соответственно.

Из равенств (19) видно, что сложность алгоритма зависит от конкретной реализации подсчёта ДПФ. Выбор конкретной реализации ДПФ зависит от N и от особенностей входной последовательности, которая может быть как комплексной, так и действительной. В главе 5 [8] собрано множество различных алгоритмов подсчёта ДПФ, там же приводятся оценки сложности этих алгоритмов.

Заключение

Полученные теоремы не покрывают множество возможных базисных функций синус-косинусных преобразований, но покрывают счётное количество базисных функций преобразования данного вида. Следует также отметить, что алгоритмы быстрого вычисления ОСКП хоть и являются быстрыми, но всё же, вероятно, существуют алгоритмы, которые позволяют вычислять ОСКП «быстрее». Например, как это делают для дискретного косинусного преобразования коротких длин [6], для быстрого вычисления которых используются особенности алгебраических характеристик значений базисных функций.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 12-01-00822-а, 13-01-97007-р_поволжье_а).

Литература

1. Распознавание, классификация, прогноз. Математические методы и их применение / С.С. Агаян, В.М. Антоненко, В.И. Васильев, А.В. Гончарский, Н.Г. Гуторова [и др.]; под ред. Ю.И. Журавлёва – Вып. 3. – М.: Наука, 1992. – 320 с.
2. **Ахмед, Н.** Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов / Н. Ахмед, К.Р. Рао; под ред. И.Б. Фоменко; пер. с англ. – М.: Связь, 1980. – 248 с.

3. **Ярославский, Л.П.** Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии. Введение в цифровую оптику / Л.П. Ярославский. – М.: Радио и связь, 1987. – 296 с.
4. **Ярославский, Л.П.** Введение в цифровую обработку изображений. – М.: Советское радио, 1979. – 312 с.
5. **Wang, Z.** Fast Algorithm for the discrete W transform and for the discrete Fourier transform // IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing. – 1984. – Vol. 32. – P. 803-816.
6. **Чернов, В.М.** Арифметические методы синтеза быстрых алгоритмов дискретных ортогональных преобразований. – М.: Физматлит, 2007. – 264 с.
7. **Чернов, В.М.** Двумерные дискретные ортогональные преобразования с рекуррентным базисом // Научное приборостроение. – 1993. – Т. 3, № 1. – С. 110-115.
8. Методы компьютерной обработки изображений / М.В. Гашников, Н.И. Глумов, Н.Ю. Ильясова, В.В. Мясников, С.Б. Попов, В.В. Сергеев, В.А. Сойфер, А.Г. Храмов, А.В. Чернов, В.М. Чернов, М.А. Чичева, В.А. Фурсов; под ред. В.А. Сойфера. – 2-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2003. – 784 с.

References

1. Pattern recognition, classification, forecasting. Mathematical methods and their application / S.S. Agayan, V.M. Antonenko, V.I. Vasilyev, A.V. Goncharsky, N.G. Gutorova; ed. by Yu.I. Zhuravlev. – Vol. 3. – Moscow: “Nauka” Publisher, 1992. – 320 p. – (In Russian).
2. **Ahmed, N.** Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing / N. Ahmed, K.R. Rao. – Moscow: “Svyaz” Publisher, 1980. – 248 p. – (In Russian).
3. **Yaroslavsky, L.P.** Digital signal processing in optics and holography / L.P. Yaroslavsky. – Moscow: "Radio i svyaz" Publisher, 1987. – 296 p. – (In Russian).
4. **Yaroslavsky, L.P.** Introduction to digital image processing. / L.P. Yaroslavsky. – Moscow: “Sovetskoe Radio” Publisher, 1979. – 312 p. – (In Russian).
5. **Wang, Z.** Fast Algorithm for the discrete W transform and for the discrete Fourier transform // IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing. – 1984. – Vol. 32. – P. 803-816.
6. **Chernov, V.M.** Arithmetical methods of synthesis of fast algorithms of Discrete orthogonal Transforms / V.M. Chernov. – Moscow: “Fizmatlit” Publisher, 2007. – 264 p. – (In Russian).
7. **Chernov, V.M.** Two-dimensional discrete orthogonal transformation with recurrent basis // Scientific instrumentation. – 1993. – Vol. 3, N 1. – P. 110-115. – (In Russian).
8. Computer Image Processing, Part II: Methods and algorithms / A.V. Chernov, V.M. Chernov, M.A. Chicheva, V.A. Fursov, M.V. Gashnikov, N.I. Glumov, N.Yu. Ilyasova, A.G. Khramov, A.O. Korepanov, A.V. Kupriyanov, E.V. Myasnikov, V.V. Myasnikov, S.B. Popov, V.V. Sergeyev; ed. by V.A. Soifer. – VDM Verlag, 2009. – 584 p.

GENERALIZED DISCRETE ORTHOGONAL SINE-COSINE TRANSFORM

M.S. Kasparyan
Image Processing Systems Institute, Russian Academy of Sciences,
Samara State Aerospace University

Abstract

We introduce a generalized sine-cosine transform (GSCT). Analytical conditions of orthogonality of these transformations are derived. A theorem that allows one to find the relation between the GSCT coefficients in the orthogonal case is proven. Fast algorithms for computing the GSCT are considered and their complexity is analyzed.

Key words: orthogonal transforms, sine-cosine transform, fast algorithms.

Сведения об авторе

Каспарьян Михаил Суренович, 1988 года рождения. В 2011 году с отличием окончил Адыгейский государственный университет по специальности «Прикладная математика». В данный момент является аспирантом Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва. Стажёр – исследователь Института систем обработки изображений РАН.

E-mail: *kasparyanm@gmail.com* .

Mikhail Surenovich Kasparyan (b. 1988) graduated with honours (2011) from Adyghe State University, majoring in Applied Mathematics, postgraduate student of S. P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU). Trainee researcher of the Image Processing Systems Institute of the RAS. Research interests are image processing, programming, applied mathematics.

Поступила в редакцию 11 ноября 2014 г.