ОРБИТАЛЬНЫЙ УГЛОВОЙ МОМЕНТ СВЕТОВОГО ПОЛЯ КАК СУПЕРПОЗИЦИИ МОД ЭРМИТА–ГАУССА

В.Г. Волостников
Самарский филиал ФГБУН Физический институт имени П.Н. Лебедева РАН (СФ ФИАН), Самара, Россия,
Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ), Самара, Россия

Аннотация

Рассмотрено поведение орбитального углового момента (ОУМ) для произвольного поля как суперпозиции пучков Эрмита–Гаусса. Получено аналитическое выражение для орбитального углового момента такого поля. Показано, что при эквивалентных исходных условиях величина ОУМ для конечных комбинаций пучков Эрмита–Гаусса (двух) эквивалентна полученному ранее результату. Получены также выражения для более сложных линейных комбинаций пучков Эрмита–Гаусса. Для суперпозиции из трёх мод Эрмита–Гаусса получено, что у такого поля, в отличие от суперпозиции двух мод, модуль ОУМ может превышать значение максимального индекса в суперпозиции при сохранении структурной устойчивости самого светового поля.

Ключевые слова: когерентная оптика, спиральные пучки света, орбитальный угловой момент.

Цитирование: **Волостников, В.Г.** Орбитальный угловой момент светового поля как суперпозиции мод Эрмита–Гаусса / В.Г. Волостников // Компьютерная оптика. – 2015. – Т.39, №4. – С. 459-461. – DOI: 10.18287/0134-2452-2015-39-4-459-461.

Введение

В книге [1] было показано, что электромагнитное поле может обладать ненулевым ОУМ.

В работе [2] данный результат был воспроизведён для лазерных мод Лагерра–Гаусса.

ОУМ интересен для задач микроманипуляций, передачи информации и т. п. [3, 4].

Зачастую ОУМ связывают с наличием оптических вихрей в потоке световой энергии, однако это не всегда справедливо. Конечно, присутствие оптических вихрей, как правило, приводит к возникновению ОУМ светового поля. Однако наличие вихрей не является необходимым условием для его существования. Одним из примеров этого является результат работы [5], где было показано, что посредством специфических астигматических элементов произвольный вещественный пучок Эрмита–Гаусса можно преобразовать в соответствующий пучок Лагерра–Гаусса.

Исходный пучок Эрмита–Гаусса с астигматической фазовой весовой функцией обладает тем же ОУМ, что и результирующий пучок Лагерра–Гаусса. Однако очевидно, что исходное поле лишено оптических вихрей, хотя и в одной плоскости.

В работе [6] показано, что комбинация двух пучков Эрмита–Гаусса может обладать существенно ненулевым ОУМ. С другой стороны, в [7] было получено выражение для ОУМ произвольного светового поля как суперпозиции мод Эрмита–Гаусса. Конечно, результат [7] обладает большей общностью, однако это отнюдь не умаляет результатов [6], т.к. в этой работе найдены факты, которые нелегко выделить из [7].

Примеры невращающихся световых полей с ненулевым ОУМ можно найти также в [7, 8].

На первый взгляд, несколько необычно: сумма полей, не обладающих по отдельности ОУМ, этим моментом обладает, однако понятно, что система функций Эрмита–Гаусса полна и ортогональна и любое световое поле с конечной энергией может быть представлено в виде их суперпозиции, в том числе и поле с ненулевым ОУМ.

Целью данной работы является демонстрация того, что при эквивалентных исходных данных для [6] и [7] результаты также являются эквивалентными.

Получены также выражения для ОУМ в случае световых полей, являющихся линейной комбинацией более чем двух пучков Эрмита–Гаусса.

1. Орбитальный угловой момент светового поля

Рассмотрим плоско-поляризованное поле:

$$\begin{aligned} &E_x = F(x,y,l)\times\exp(ikl - i\omega t),\\ &E_y = 0, \\ &E_l = g\times\exp(ikl - i\omega t). \end{aligned} \tag{1}$$

Из уравнения Максвелла $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ найдём в параксиальном приближении связь между продольной и поперечной составляющими электрического вектора:

$$g(x,y,l) \approx \frac{i}{k}\frac{\partial F}{\partial x} \tag{2}$$

Из уравнения Максвелла $\mathbf{B} = \dfrac{1}{ik_0}\operatorname{rot}\mathbf{E}$ найдём компоненты магнитного поля:

$$\begin{aligned} &B_x \approx 0,\\ &B_y \approx F(x,y,l)\times\exp(ikl - i\omega t), \\ &B_l \approx i\frac{1}{k_0}\frac{\partial F}{\partial y}\times\exp(ikl - i\omega t). \end{aligned} \tag{3}$$

Усреднённая по времени плотность ОУМ вдоль оси l определяется следующим выражением [1]:

$$M_l = \frac{1}{8\pi c}\operatorname{Re}[\,\mathbf{r}\times[\,\varepsilon\,\mathbf{E}\times\overline{\mathbf{B}}\,]_l\,. \tag{4}$$

Подставляя в это выражение составляющие электрического и магнитного полей, получим:

$$\begin{aligned} &M_l = \operatorname{Re}[-x(\varepsilon E_x\overline{B_l} - \overline{B_x}\varepsilon E_l) - \\ &-y(\varepsilon E_y\overline{B_l} - \varepsilon E_l\overline{B_y})] = \end{aligned}$$

$$= \frac{\varepsilon}{8\pi c k_0} \mathrm{Im}\left(x\overline{F}\frac{\partial F}{\partial y} - y\overline{F}\frac{\partial F}{\partial x} \right) =$$
$$= -\frac{\varepsilon}{8\pi c k_0} \mathrm{Im}\left(xF\frac{\partial \overline{F}}{\partial y} - yF\frac{\partial \overline{F}}{\partial x} \right). \quad (5)$$

2. ОУМ светового поля как суперпозиции пучков Эрмита–Гаусса

Найдём теперь плотность ОУМ для конкретного поля.

Пусть

$$F = \sum C_{N,M} \times HG_{N,M} \ , \quad (6)$$

где

$$HG_{N,M} = H_{N,M}(x,y) \times \exp(-\frac{x^2+y^2}{2})$$

– пучки Эрмита–Гаусса, $H_{N,M}(x,y)$ – полиномы Эрмита $H_N(x) \times H_M(y)$.

Плотность ОУМ (1) для разложения (5) и при использовании следующих рекуррентных формул [7]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H_N(t) = 2NH_{N-1}(t),$$
$$2tH_N(t) = H_{N+1}(t) + 2NH_{N-1}(t), \quad (7)$$

где $H_N(t)$ – полиномы Эрмита, будет после простых вычислений (без константы):

$$M_l = -\exp(-x^2-y^2) \times \mathrm{Im} \sum_{N_0,M_0} C_{N_0,M_0} H_{N_0,M_0}(x,y) \times$$
$$\times \sum_{N_1,M_1} (\overline{C}_{N_1,M_1-1} M_1 H_{N_1}(y) H_{M_1-1}(x) - \quad (8)$$
$$-\overline{(C}_{N_1-1,M_1} N_1 H_{N_1-1}(y) H_{M_1}(x)).$$

Индексы при полиномах Эрмита могут быть только неотрицательными, поэтому сделаем замену:

$$M_1 - 1 = M, M = 0,1...$$
$$N_1 - 1 = N, N = 0,1... \quad (9)$$

После простых вычислений, используя ортогональность функций Эрмита–Гаусса, получим:

$$L_l = \iint M_l \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{2} \mathrm{Im} \sum_{N,M} ((C_{N+1,M} \times \overline{C}_{N,M+1} -$$
$$-C_{N,M+1} \times \overline{C}_{N+1,M}) \times 2^{N+M+1}(N+1)!(M+1)!). \quad (10)$$

Мощность светового поля будет определяться выражением:

$$E = \iint F\overline{F} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} \sum_{N,M} (C_{N,M} \overline{C}_{N,M} \times$$
$$\times 2^{N+M} N!M!). \quad (11)$$

Пусть теперь световое поле имеет вид [6]:

$$F = HG_N(x) HG_{N+1}(y) +$$
$$+iHG_{N+1}(x) HG_N(y). \quad (12)$$

Тогда для удельного ОУМ получим:

$$\frac{L_l}{E} = -\frac{2\pi (N+1)!(N+1)! \times 2^{2N}}{\frac{\pi}{2} 2^{2N+1} \times 2 \times N!(N+1)!} =$$
$$= -\frac{(N+1)!(N+1)!}{N!(N+1)!} = -(N+1). \quad (13)$$

Это находится, конечно, в полном согласии с результатами работы [6]. В то же время, пользуясь вышеприведёнными результатами и книгой [7], можно получить и выражения для более сложных суперпозиций. Рассмотрим, например, следующее световое поле:

$$F = HG_N(x) HG_{N+1}(y) +$$
$$+iHG_{N+1}(x) HG_N(y) +$$
$$+i^2 \times C \times HG_{N+2}(x) HG_{N-1}(y), \quad (14)$$
$$N \geq 1.$$

Удельный ОУМ для него будет:

$$\frac{L_l}{E} = -\frac{2(N+1)!(N+1)! + 2C(N+2)!N!}{2N!(N+1)! + C^2(N+2)!(N-1)!} =$$
$$= -\frac{2(N+1) + 2C(N+2)}{2 + C^2 \dfrac{(N+2)}{N}}. \quad (15)$$

Характерными чертами этого поля являются следующие. Во-первых, модуль удельного ОУМ зависит теперь от двух переменных: N и C. Во-вторых, он может быть не только равен, но и превышать величину $N+2$, или величину максимального индекса моды Эрмита–Гаусса в суперпозиции, что было невозможно для суперпозиции из работы [6].

Например, при $C = 1/2$ это достигается для $N \geq 2$.

С ростом N скорость нарастания модуля удельного ОУМ будет увеличиваться. При $N \to \infty$ величина $L_l/E(N+2)$ стремится к 4/3.

Этот ОУМ может быть и целым. Например, для $C = 2/3$ и $N = 10$ он равен 15.

Задачей этой части работы не являлся поиск неких максимумов: вполне достаточно показать, что модуль удельного ОУМ может превышать величину максимального индекса составляющих мод в суперпозиции. Приведём, наконец, выражение для удельного ОУМ светового поля в виде суперпозиции четырёх пучков Эрмита–Гаусса:

$$F = HG_{N,}(x) HG_{N+1}(y) + iHG_{N+1}(x) HG_N(y) +$$
$$+i^2 \times A \times HG_{N+2}(x) HG_{N-1}(y) + i^3 \times \quad (16)$$
$$\times B \times HG_{N+3}(x) HG_{N-2}(y), \quad N \geq 2.$$

Удельный ОУМ для него будет:

$$\frac{L_l}{E} =$$
$$= -\frac{2(N+1) + 2A(N+2) + 2AB(N+3)(N+2)/N}{2 + A^2 \dfrac{(N+2)}{N} + B^2 \dfrac{(N+3)(N+2)}{(N-1)N}}. \quad (17)$$

Последнее выражение также требует, конечно, строгого анализа, но это не является задачей данной части работы. Отметим, однако, что в этом случае величина $L_l/E(N+3)$ (например, при $A = B = 1$) может превышать 3/2.

Заключение

Таким образом, проведено сравнение двух способов нахождения удельного ОУМ светового поля как суперпозиции мод Эрмита–Гаусса, и показана их эквивалентность.

Для суперпозиции из трёх и четырёх мод Эрмита–Гаусса получено, что у такого поля, в отличие от суперпозиции двух мод, модуль удельного ОУМ может превышать значение максимального индекса в суперпозиции при сохранении структурной устойчивости самого светового поля.

Благодарности

Выражаю благодарность профессору В.В. Котляру за ценные обсуждение работы и доценту А.М. Майоровой за помощь в оформлении статьи.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ.

Литература

1. **Джексон, Дж.** Классическая электродинамика / Дж. Джексон; пер. с англ.– М.: Мир, 1965. – 703 с.
2. **Allen, L.** Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian modes / L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J. Spreeuw, J.P. Woerdman // Physical Review A. – 1992. – Vol. 45. – P. 8185-8189.
3. **Yao, A.** Orbital angular momentum: origins, behavior and applications / A.M. Yao, M.J. Padgett // Advances in Optics and Photonics. – 2011. – Vol. 3. – P. 161-204.
4. **Котляр, В.В**. Вихревые лазерные пучки / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв. – Самара: Новая техника, 2012. – 248 с.
5. **Abramochkin, E**. Beam transformations and nontransformed beams / E. Abramochkin, V. Volostnikov // Optics Communications. – 1991. – Vol. 83. – P. 123-135.
6. **Kotlyar, V.V.** Hermite-Gaussian modal laser beams with orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // JOSA A. – 2014. – Vol. 31. – P. 274-281.
7. **Абрамочкин, Е.Г.** Современная оптика гауссовых пучков / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников. – М.: Физматлит, 2010. – 185 с.
8. **Волостников, В.Г.** Методы анализа и синтеза когерентных световых полей / В.Г. Волостников. – М.: Физматлит, 2014. – 256 с.

References

[1] Jackson J. The classical electrodynamics. [In Russian] Moscow: „Mir“ Publisher; 1965.

[2] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJ, Woerdman JP. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian modes. Physical Review A 1992; 45: 8185-9. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.

[3] Kotlyar VV, Kovalev AA. Vortex Laser Beams [In Russian]. Samara: “Novaya Technika” Publisher, 2012.

[4] Yao A, Padgett MJ. Orbital angular momentum: origins, behavior and applications. Adv Opt Photon 2011; 3: 161-204. DOI:10.1364/AOP.3.000161.

[5] Abramochkin E, Volostnikov V. Beam transformations and nontransformed beams. Optics Communications 1991; 83: 123-35. DOI:10.1016/0030-4018(91)90534-K.

[6] Kotlyar VV**,** Kovalev AA. Hermite-Gaussian modal laser beams with orbital angular momentum. JOSA A 2014; 31: 274-81. DOI: 10.1364/JOSAA.31.000274.

[7] Abramochkin EG, Volostnikov VG. The modern optics of the Gaussian beams [In Russian]. Moscow: “Fizmatlit” Publisher; 2010.

[8] Volostnikov VG. The methods of analysis and synthesis of coherent light fields. Moscow: “Fizmatlit” Publisher, 2014.

ANGULAR MOMENTUM OF A LIGHT FIELD AS SUPERPOSITION OF HERMITE-GAUSSIAN MODES

V.G. Volostnikov
Lebedev Physical Institute,
Samara State Aerospace University

Abstract

The orbital angular momentum (OAM) for an arbitrary light field as superposition of Hermite-Gaussian modes is considered. An analytical formula for the OAM of such fields is obtained. It is shown that under equal initial conditions, OAM of a linear combination of two Hermite-Gaussian beams derived in this work is equal to that obtained earlier [JOSA A, 31, 274 (2014)]. Relations for more complex combinations of Hermite-Gaussian modes are also derived. It is found that unlike two-mode superposition, in three-mode superposition the OAM can be larger than the maximum index of the superposition for structurally stable light fields.

Keywords: coherent optics, spiral beams, orbital angular momentum.

Citation: Volostnikov VG. Orbital angular momentum of the light field as a superposition of Hermite-Gaussian modes. Computer Optics 2015; 39(4): 459-61. DOI: 10.18287/0134-2452-2015-39-4-459-461.

Acknowledgments: I wish to thank Professor V. Kotlyar for the useful discussion of the work and Associate Professor A. Maiorova for their help in preparing the manuscript. The work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation.

Сведения об авторе

Волостников Владимир Геннадьевич, 1951 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник СФ ФИАН и по совместительству ведущий научный сотрудник Самарского государственного аэрокосмического университета (СГАУ). Область научных интересов: фазовая проблема в оптике, оптика Гауссовых пучков, сингулярная оптика, оптические вихри.

Volostnikov V.V. was burn in 1951, Phys.-Math. Doctor, professor, senior researcher in Samara Branch FIAS and leading researcher in Samara Aerospace University. The area of scientific interest: phase retrieval in optics, Gaussian beam optics, singular optics, optical vortices.

Поступила в редакцию 14 сентября 2015 г.
Окончательный вариант – 28 сентября 2015 г.