

# ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИКА, ОПТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

## ПЛОТНОСТЬ УГЛОВОГО МОМЕНТА ПАРАКСИАЛЬНОГО ОПТИЧЕСКОГО ВИХРЯ С КРУГОВОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ

В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, А.А. Ковалёв<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Институт систем обработки изображений РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Самара, Россия,

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, Самара, Россия

### Аннотация

Получены общие аналитические выражения для вектора плотности углового момента параксиального оптического вихря с эллиптической поляризацией. Показано, что для любого вихревого поля с радиальной симметрией и круговой поляризацией имеет место эффект «углового трактора», то есть поток световой энергии вращается вокруг оптической оси по часовой или против часовой стрелки на разных радиусах в поперечном сечении пучка. Также показано, что осевая проекция плотности углового момента вихревого светового поля меняет знак на тех же радиусах в сечении пучка. То есть микрочастицы, захваченные в вихревой пучок на разных радиусах, будут вращаться либо по часовой стрелке, либо против часовой.

**Ключевые слова:** параксиальный оптический вихрь, плотность углового момента, топологический заряд, круговая поляризация, угловой трактор.

**Цитирование:** Котляр, В.В. Плотность углового момента параксиального оптического вихря с круговой поляризацией / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв // Компьютерная оптика. – 2018. – Т. 42, № 1. – С. 5-12. – DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-1-5-12.

### Введение

Прошло 25 лет с тех пор, как был введен в оптику орбитальный угловой момент (ОУМ) светового поля [1], но свою актуальность вихревые лазерные пучки, несущие ОУМ, не потеряли до сих пор. В первой статье по ОУМ параксиального светового поля была получена формула для плотности ОУМ пучков Лагерра–Гаусса [2]. Однако общей формулы для плотности ОУМ произвольного параксиального поля с круговой поляризацией в [2] нет. Есть только общая формула для плотности линейного момента произвольного параксиального светового поля. В [3] показано, что проекция вектора плотности линейного момента на азимутальный орт для пучка Лагерра–Гаусса (ЛГ) пропорциональна произведению топологического заряда оптического вихря  $n$  на спиновый множитель  $\sigma = \pm 1$ , определяющий левую или правую круговую поляризацию света. То есть показали наличие спин-орбитального взаимодействия у пучков ЛГ в свободном пространстве. В [4] рассматривались полные линейный и угловой моменты (УМ) для произвольных непараксиальных лазерных пучков. В [5] приведены точные формулы для распределения вектора Пойнтинга (ВП) и плотности УМ симметричного непараксиального пучка Бесселя с круговой поляризацией. В [6] рассматривался УМ сильно сходящегося Гауссова пучка. Численно показано, что при острой фокусировке Гауссова пучка с круговой поляризацией спиновый УМ переходит частично в орбитальный УМ. Это связано с увеличением продольной составляющей электрического поля в фокусе, которая несёт единичный топологический заряд  $E_z(r, \varphi) \sim \exp(i\sigma\varphi)$ . В [7] также теоретически рассматривается УМ вихревого Гауссова пучка в области острого фокуса. Показано, что при  $n \geq 2$  и  $\sigma = -1$  вблизи оптической оси

имеет место обратный поток световой энергии по отношению к направлению светового пучка. Обратный поток энергии по отношению к направлению распространения пучка называется «оптическим трактором» [8]. В [9] получена формула для полного ОУМ Гауссова пучка с внедрённым оптическим вихрем, смещённым с оптической оси. Приближённые формулы для ВП и УМ непараксиальных пучков ЛГ получены в [10]. В [11] получены точные формулы для УМ векторных пучков Ханкеля с круговой поляризацией. В [12] в виде рядов получены формулы для УМ векторного Гауссова оптического вихря с линейной поляризацией. В [13] численно изучается поведение ВП и УМ для пучков типа «Ласточкин хвост». В [14] исследуется ОУМ параксиальных пучков Ханкеля–Бесселя [15]. Заметим, что другой подход и другое определение УМ и ОУМ используется в [16]. В работе [16] вместо вектора Пойнтинга  $\mathbf{S} = c\text{Re}[\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}]$ , где  $c$  – скорость света,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  – вектора напряжённости электрического и магнитного поля, вводится плотность канонического момента  $\mathbf{P} = 0,5\text{Im}[\mathbf{E}^* \nabla \mathbf{E} + \mathbf{H}^* \nabla \mathbf{H}]$ . Поэтому все формулы, связанные с УМ, получаются отличными от привычного рассмотрения [2, 3].

Из этого краткого обзора работ по теории ОУМ видно, что общей формулы для плотности УМ произвольного параксиального лазерного пучка с круговой поляризацией не было получено. В данной работе получены общие формулы для плотности линейного и УМ произвольного параксиального лазерного пучка с эллиптической поляризацией. И на их основе детально проанализирован эффект «углового трактора», когда поперечный поток энергии (или проекция вектора линейного момента на азимутальный орт) на разных расстояниях от оптической оси вращается либо по часовой стрелке, либо против при фиксированных значениях топологического заряда  $n$  и спинового пара-

метра  $\sigma$ . Также показано, что проекция вектора плотности УМ на оптическую ось меняет знак согласованно с изменением направления вращения поперечного потока энергии.

### 1. Линейный момент параксиального лазерного пучка

Получим выражение для линейного момента параксиального светового поля с круговой поляризацией. Пусть поперечные проекции  $E_x$  и  $E_y$  вектора напряжённости электрического поля  $\mathbf{E}$  связаны соотношением

$$E_y = i\sigma E_x, \quad (1)$$

где  $\sigma$  – произвольное комплексное число, например  $\sigma = 1$  для правой и  $\sigma = -1$  для левой круговой поляризации. Продольную компоненту электрического вектора  $E_z$  можно найти из уравнения непрерывности Максвелла  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ :

$$E_z = \frac{i}{k} \frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\sigma}{k} \frac{\partial E_x}{\partial y}, \quad (2)$$

при условии, что  $\partial E_z / \partial z \approx ikE_z$ , где  $k$  – волновое число света. Для расчёта усреднённой по времени плотности линейного момента светового поля используем формулу

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}]. \quad (3)$$

Проекции вектора напряжённости магнитного поля  $\mathbf{H}$  можно получить из уравнения Максвелла для монохроматического поля с циклической частотой  $\omega$  (магнитная проницаемость  $\mu = 1$ ):

$$\text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mathbf{H}. \quad (4)$$

Для проекций магнитного вектора получим выражения:

$$\begin{aligned} H_x &\approx \frac{-i}{\omega} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} + k\sigma E_x \right) \approx -\frac{ik\sigma}{\omega} E_x, \\ H_y &\approx \frac{-i}{\omega} \left( ikE_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \approx \frac{k}{\omega} E_x, \\ H_z &= \frac{-i}{\omega} \left( i\sigma \frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя (1), (2) и (5) в (3), получим выражение для линейной плотности параксиального светового поля с эллиптической поляризацией:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{-i}{4\omega} (1 + |\sigma|^2) (E_x^* \nabla E_x - E_x \nabla E_x^*) - \\ &- \frac{\text{Re } \sigma}{2\omega} (E_x^* \nabla_{\perp} E_x + E_x \nabla_{\perp} E_x^*) + \\ &+ \frac{k}{2\omega} (1 + |\sigma|^2) |E_x|^2 \mathbf{z}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\nabla = \mathbf{x} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_{\perp} = -\mathbf{x} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{y} \frac{\partial}{\partial x}.$$

В (6)  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  – единичные вектора вдоль декартовых осей. При  $\sigma = 0$  (линейная поляризация) (6) совпадает с известным выражением из [2, 3]. Отличие (6) от аналогичного выражения для линейного момента в [2] заключается во втором слагаемом. Вместо слагаемого  $E_x^* \nabla_{\perp} E_x + E_x \nabla_{\perp} E_x^*$  в (6) в [2] получено слагаемое  $[\partial |A(r, z)|^2 / \partial r] \bar{\phi}$ . Но можно показать, что

$$E_x^* \nabla_{\perp} E_x + E_x \nabla_{\perp} E_x^* = -\frac{1}{r} \frac{\partial |E_x|^2}{\partial \phi} \mathbf{r} + \frac{\partial |E_x|^2}{\partial r} \bar{\phi}.$$

То есть в [2] получено выражение для плотности линейного момента параксиального пучка с интенсивностью, симметричной относительно оптической оси:  $|E_x| = A(r, z)$ .

Выражение (6) – это общее выражение для линейного момента (или для вектора Умова–Пойнтинга  $\mathbf{S}$ , так как  $\mathbf{S} = c\mathbf{p}$ ) и может быть конкретизировано для оптического вихря, амплитуда которого выбирается в виде:

$$E_x = A(r, z) \exp(in\phi), \quad (7)$$

где  $(r, \phi, z)$  – цилиндрические координаты. В цилиндрических координатах операторы набла из (6) будут иметь вид:

$$\nabla = \mathbf{r} \frac{\partial}{\partial r} + \bar{\phi} \frac{\partial}{r \partial \phi}, \quad \nabla_{\perp} = -\mathbf{r} \frac{\partial}{r \partial \phi} + \bar{\phi} \frac{\partial}{\partial r}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{r}$ ,  $\bar{\phi}$  – единичные вектора вдоль полярных координат. Тогда для линейного момента параксиального оптического вихря с круговой поляризацией вместо (6) можно записать:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{1 + |\sigma|^2}{4c} F \mathbf{r} + \frac{1}{2\omega} \left[ \frac{n}{r} (1 + |\sigma|^2) |A(r, z)|^2 - \right. \\ &\left. - \text{Re } \sigma \frac{\partial |A(r, z)|^2}{\partial r} \right] \bar{\phi} + \frac{1 + |\sigma|^2}{2c} |A(r, z)|^2 \mathbf{z}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$F = \frac{-i}{k} \left( A^* \frac{\partial A}{\partial r} - A \frac{\partial A^*}{\partial r} \right).$$

Из (9) следует, что для параксиальных световых полей поток световой энергии (или линейный импульс) всегда направлен вдоль распространения пучка:

$$p_z = \frac{1 + |\sigma|^2}{2c} |A(r, z)|^2, \quad (10)$$

и эффект обратного распространения потока энергии (эффект трактора [8]) не наблюдается. Но зато из (9) следует, что у оптических вихрей имеет место «угловой трактор». Это явление кратко отмечено в [7]. Ниже это свойство рассмотрено подробнее.

Интересно, что для пучков, у которых фаза радиальной части  $A(r, z)$  в уравнении (7) не зависит от  $r$ , и поэтому  $F = 0$ , отсутствует поток энергии (и линейный импульс (9)) вдоль радиальной составляющей. То есть такие пучки являются модами и распростра-

няются без дифракции. Пучок Бесселя – пример такого бездифракционного вихревого лазерного пучка:  $A(r, z) = J_n(k_r r) \exp(ik_z z)$ , где  $J_n(k_r r)$  – функция Бесселя,  $k_r, k_z$  – поперечная и продольная проекции волнового вектора. Противоположным примером, который используется в [14], могут быть расходящиеся параксиальные вихревые пучки Ханкеля–Бесселя [15]. Для таких пучков поток энергии вдоль радиальной координаты будет отличен от нуля, и функция  $F$  также будет отлична от нуля, потому что фаза их амплитудной функции (7) зависит от  $r$ :

$$A(r, z) = H_{n/2}^{(1)}\left(kz + \frac{kr^2}{4z}\right) J_{n/2}\left(\frac{kr^2}{4z}\right), \quad (11)$$

где  $H_{n/2}^{(1)}(x)$  – функция Ханкеля первого рода полуцелого порядка.

Объясним, что понимается под словами «угловой трактор», приведёнными выше. Из (9) видно, что в сечении вихревого пучка энергия движется по окружности, так как вектор линейного момента имеет отличную от нуля проекцию на азимутальный орт:

$$p_\phi = \frac{1}{2\omega} \left[ \frac{n}{r} (1 + |\sigma|^2) |A(r, z)|^2 - \text{Re} \sigma \frac{\partial |A(r, z)|^2}{\partial r} \right]. \quad (12)$$

Причём, как видно из (12), если поляризация не линейная ( $\sigma \neq 0$ ), то азимутальная проекция вектора линейного момента может менять знак, то есть поток энергии на разных радиусах в сечении пучка вращается по часовой или против часовой стрелки при фиксированных  $n$  и  $\sigma$ . В случае круговой поляризации ( $\sigma = \pm 1$ ) уравнение для поиска радиусов, на которых происходит смена знака азимутальной проекции линейного момента, имеет вид:

$$\frac{2n}{\sigma} |A(r, z)|^2 = r \frac{\partial |A(r, z)|^2}{\partial r}. \quad (13)$$

## 2. Угловой момент параксиального лазерного пучка

Зная линейный момент (6) параксиального светового поля, можно получить явное аналитическое выражение для углового момента

$$\mathbf{j} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (14)$$

произвольного параксиального светового поля  $\mathbf{E}$  с эллиптической поляризацией:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} = & \frac{-i}{4\omega} (1 + |\sigma|^2) z (E_x^* \nabla_\perp E_x - E_x \nabla_\perp E_x^*) + \\ & + \frac{\text{Re} \sigma}{2\omega} z (E_x^* \nabla E_x + E_x \nabla E_x^*) + \frac{1 + |\sigma|^2}{2c} |E_x|^2 \mathbf{e} + \\ & + \left[ \frac{i}{4\omega} (1 + |\sigma|^2) (E_x^* \nabla E_x - E_x \nabla E_x^*) \mathbf{e} + \right. \\ & \left. + \frac{\text{Re} \sigma}{4\omega} (E_x^* \nabla_\perp E_x + E_x \nabla_\perp E_x^*) \mathbf{e} \right] \mathbf{z}, \end{aligned} \quad (15)$$

где вектор  $\mathbf{e} = \mathbf{u} \times \mathbf{y}$ . Выражение (15), следующее из общего выражения (6), которого нет в [2], также отсутствует в этой классической работе. Насколько нам

известно, оно получено впервые. Далее из (15) можно получить плотность углового момента параксиального оптического вихря с круговой поляризацией, амплитуда которого описывается (7). Для этого удобно перейти в полярную систему координат и использовать (8), а также следующие формулы для перехода:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \cos \phi \mathbf{r} - \sin \phi \bar{\phi}, \\ \mathbf{y} &= \sin \phi \mathbf{r} + \cos \phi \bar{\phi}, \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \sin \phi \frac{\partial}{r \partial \phi}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \phi \frac{\partial}{r \partial \phi}, \\ \mathbf{e} &= -r \bar{\phi}, \quad \mathbf{e} \nabla = -\frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \mathbf{e} \nabla_\perp = -r \frac{\partial}{\partial r}. \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда вместо (15) для оптического вихря получим плотность углового момента:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} = & \frac{-z}{2\omega} \left[ \frac{n}{r} (1 + |\sigma|^2) |A(r, z)|^2 - \text{Re} \sigma \frac{\partial |A(r, z)|^2}{\partial r} \right] \mathbf{r} + \\ & + \frac{1 + |\sigma|^2}{2c} \left[ \frac{z}{2} F - |A(r, z)|^2 r \right] \bar{\phi} + \frac{1}{2\omega} \left[ n (1 + |\sigma|^2) |A(r, z)|^2 - \right. \\ & \left. - \text{Re} \sigma r \frac{\partial |A(r, z)|^2}{\partial r} \right] \mathbf{z}. \end{aligned} \quad (17)$$

В (17) функция  $F$  такая же, как в уравнении (9). Из (17) видно, что в случае круговой поляризации ( $\sigma = \pm 1$ ) проекция плотности УМ на оптическую ось может менять знак в зависимости от радиальной координаты  $r$ :

$$j_z = \frac{1}{\omega} \left( n |A(r, z)|^2 - \frac{\sigma r}{2} \frac{\partial |A(r, z)|^2}{\partial r} \right). \quad (18)$$

Если топологический заряд положительный ( $n > 0$ ), то при правой поляризации ( $\sigma > 0$ ) проекция УМ (18) может быть отрицательной ( $j_z < 0$ ) в тех местах поперечного сечения оптического вихря, в которых радиальная производная интенсивности  $I = |A(r, z)|^2$  положительная ( $\partial I / \partial r > 0$ ), и наоборот, для левой поляризации ( $\sigma < 0$ ) проекция УМ (17) может быть отрицательной ( $j_z < 0$ ) в тех местах поперечного сечения оптического вихря, в которых радиальная производная интенсивности отрицательная ( $\partial I / \partial r < 0$ ). Для оптического вихря с линейной поляризацией ( $\sigma = 0$ ) плотность УМ (17) во всех точках поперечного сечения пучка положительная ( $j_z > 0$ ), если топологический заряд положительный ( $n > 0$ ).

Таким образом, показано, что продольная проекция плотности УМ для параксиального оптического вихря с круговой поляризацией может менять знак и быть равной нулю при любом топологическом заряде  $n$ . Для оптической микроманипуляции это означает, что микрочастица, захваченная на разных расстояниях от центра пучка, будет вращаться либо по часовой стрелке, либо против часовой. Аналогичное свойство было ранее замечено у векторных пучков Ханкеля с круговой поляризацией [15] и у остро сфокусированный Гауссовых вихрей [7].

Для круговой поляризации радиусы, на которых осевая проекция углового момента (18) меняет знак и в которых  $j_z = 0$ , можно найти из уравнения:

$$2n|A(r, z)|^2 = \sigma r \frac{\partial |A(r, z)|^2}{\partial r}. \tag{19}$$

Заметим, что уравнение (19) совпадает с (13): там, где меняется направление вращения энергии пучка, там меняет направление и осевая проекция УМ. Например, для пучка Бесселя  $A(r) = J_n(k_r r)$  уравнение (19) принимает конкретный вид:

$$\frac{n}{\sigma} J_n(k_r r) = r \frac{\partial J_n(k_r r)}{\partial r}. \tag{20}$$

Из (20) следует, что осевая проекция плотности УМ будет отрицательной  $j_z < 0$  (при  $n/\sigma > 0$ ) при

$$J_n(k_r r) [(1 - \sigma) J_{n-1}(k_r r) + (1 + \sigma) J_{n+1}(k_r r)] < 0,$$

то есть  $J_n(k_r r) J_{n+1}(k_r r) < 0$  для правой круговой поляризации и  $J_n(k_r r) J_{n-1}(k_r r) < 0$  для левой круговой поляризации. Известно, что нули функций Бесселя соседних порядков чередуются (выражение 9.5.2 в [17]):

$$\gamma_{v,1} < \gamma_{v+1,1} < \gamma_{v,2} < \gamma_{v+1,2} < \gamma_{v,3} < \dots,$$

где  $\gamma_{v,m}$  –  $m$ -й ноль функции Бесселя  $v$ -го порядка. Поэтому в случае правой круговой поляризации угловой траектор наблюдается при  $\gamma_{n,m} < k_r r < \gamma_{n+1,m}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), то есть на внутренних сторонах светлых колец (начиная со второго), а в случае левой круговой поляризации – при  $\gamma_{n-1,m} < k_r r < \gamma_{n,m}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), то есть на внешних сторонах светлых колец (начиная с первого).

Заметим, что в (17) проекции вектора плотности УМ на радиальную и продольную оси отличаются только сомножителем  $-(z/r)$ . Из этого свойства следует, что одновременно со сменой знака продольной проекции УМ на радиусах, определяемых уравнением (19), происходит смена знака радиальной составляющей УМ. То есть азимутальная проекция линейного момента в (9), показывающая вращение потока световой энергии вокруг оптической оси, порождает не только проекцию УМ (17) на осевой орт цилиндрической системы координат, но и на радиальный орт. Радиальная проекция УМ так же, как и осевая проекция УМ, и азимутальная проекция линейного момента, меняет знак на тех же радиусах, определяемых уравнением (13) или (19).

Из (19) следует ещё одно интересное свойство плотности УМ, которое ранее не отмечалось: максимальное значение осевой проекции плотности УМ  $j_z$  не совпадает с максимальным значением интенсивности в сечении пучка. Действительно, из (18) следует уравнение для нахождения экстремумов  $j_z$ :

$$\left( \frac{2n}{\sigma} - 1 \right) \frac{\partial I}{\partial r} = r \frac{\partial^2 I}{\partial r^2}. \tag{21}$$

Из (21) следует, что осевая плотность УМ имеет максимальное положительное значение на радиусе большем, чем радиус первого максимума интенсивности ( $\partial I / \partial r = 0$ ), на котором ( $\partial^2 I / \partial r^2 < 0$  (при  $n/\sigma > 0$ )).

Получим на основе (17) полный УМ параксиального оптического вихря с круговой поляризацией (пусть  $F = 0$ ):

$$L = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \mathbf{j} r dr d\phi. \tag{22}$$

Получим:

$$L_r = -\pi \frac{z}{\omega} \left[ n(1 + |\sigma|^2) + \text{Re } \sigma \right] \int_0^\infty I(r, z) dr,$$

$$L_\phi = -\pi \frac{1 + |\sigma|^2}{c} \int_0^\infty I(r, z) r^2 dr, \tag{23}$$

$$L_z = \pi \frac{n(1 + |\sigma|^2) + 2 \text{Re } \sigma}{\omega} \int_0^\infty I(r, z) r dr.$$

Из (23) следует, что для модовых лазерных пучков (пучков Бесселя [3]), у которых усреднённая по времени энергия (или мощность) не ограничены:

$$W = \frac{1 + |\sigma|^2}{2} 2\pi \int_0^\infty I(r) r dr \rightarrow \infty, \tag{24}$$

все три проекции УМ (23) также не ограничены. Однако если рассмотреть УМ, нормированный на энергию (24), то неограниченным будет только азимутальный момент

$$\frac{L_\phi}{W} = -\frac{1}{c} \frac{\int_0^\infty I(r, z) r^2 dr}{\int_0^\infty I(r, z) r dr} \rightarrow \infty, \tag{25}$$

радиальный УМ будет равен нулю:

$$\frac{L_r}{W} = -\frac{z}{\omega} \left( n + \frac{\text{Re } \sigma}{1 + |\sigma|^2} \right) \frac{\int_0^\infty I(r, z) dr}{\int_0^\infty I(r, z) r dr} \rightarrow 0, \tag{26}$$

и только продольный УМ будет конечным

$$\frac{L_z}{W} = \frac{1}{\omega} \left( n + \frac{2 \text{Re } \sigma}{1 + |\sigma|^2} \right) \tag{27}$$

и в случае круговой поляризации пропорциональным ( $n \pm 1$ ).

Из (27) также следует, что продольная проекция УМ параксиального оптического вихря является инвариантом, так как не зависит от  $z$ . В частности, для линейной ( $\sigma = 0$ ) и круговой поляризации ( $\sigma = \pm 1$ ) получим простое выражение, совпадающее с полученным в [2]:

$$\frac{L_z}{W} = \frac{n + \sigma}{\omega}.$$

Для немодовых вихревых пучков с конечной энергией, например, для Гауссова оптического вихря с круговой поляризацией и начальной амплитудой

$$E_x(r, \phi) = \exp\left(-\frac{r^2}{\delta^2} + in\phi\right), \quad (28)$$

$$E_y = i\sigma E_x,$$

где  $\delta$  – радиус перетяжки Гауссова пучка, вместо (26) получим, что все три проекции полного УМ в начальной плоскости конечные:

$$L_r = 0, L_\phi = -\frac{1}{2c}\left(\frac{\pi\delta}{2}\right)^{3/2}, L_z = \frac{\pi\delta^2}{2} \frac{n+\sigma}{\omega}. \quad (29)$$

### 3. Численное моделирование

На рис.1 показано распределение интенсивности моды Бесселя при следующих параметрах: длина волны  $\lambda = 532$  нм, топологический заряд  $n = 3$ , масштабирующий параметр моды Бесселя  $k_r = k/10$ , поляризация – круговая правая ( $\sigma = 1$ ) (рис. 1а) и круговая левая ( $\sigma = -1$ ) (рис. 1б), расчётная область  $-R \leq x, y \leq R, R = 25\lambda$ .

На двумерные распределения интенсивности наложены графики продольной составляющей вектора плотности углового момента  $j_z$ . Из рис. 1 видно, что осевая составляющая вектора углового момента отрицательна на внутренних сторонах светлых колец (начиная со второго) для правой круговой поляризации и на внешних сторонах светлых колец (начиная с первого) для левой круговой поляризации.

Расчёт показал, что в случае левой круговой поляризации первое кольцо с отрицательной плотностью углового момента ( $\gamma_{2,1}/k_r < r < \gamma_{3,1}/k_r$ ) даёт вклад в полный угловой момент, равный 20,7% от вклада первого кольца с положительной плотностью углового момента ( $0 < r < \gamma_{2,1}/k_r$ ). В табл. 1 приведены аналогичные относительные вклады первого кольца с отрицательной плотностью углового момента для правой и левой круговой поляризации и разных топологических зарядов.

Табл. 1. Относительный вклад первого кольца с отрицательной плотностью углового момента по сравнению к вкладу первого кольца с положительной плотностью углового момента

Топологический заряд, $n$	Правая круговая поляризация ( $\sigma = 1$ )	Левая круговая поляризация ( $\sigma = -1$ )
1	36,1 %	100 %
2	20,7 %	36,1 %
3	14,1 %	20,7 %
4	10,6 %	14,1 %
5	8,4 %	10,6 %

Видно, что вклад отрицательного углового момента убывает с ростом топологического заряда.

Кроме того, для правой круговой поляризации он всегда меньше и совпадает с вкладом для левой круговой поляризации при топологическом заряде, большем на единицу. Покажем это аналитически.

Из (18) следует, что суммарный угловой момент на кольце  $r_1 \leq r \leq r_2$  равен

$$L_{z,r_1,r_2} = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} j_z r dr d\phi = L_{z,r_2} - L_{z,r_1}, \quad (30)$$

где  $L_{z,R}$  – угловой момент для круга радиуса  $R$ :

$$L_{z,R} = \frac{\pi}{\omega} R^2 \times \left[ nJ_n^2(k_r R) - (n+\sigma) J_{n-1}(k_r R) J_{n+1}(k_r R) \right]. \quad (31)$$

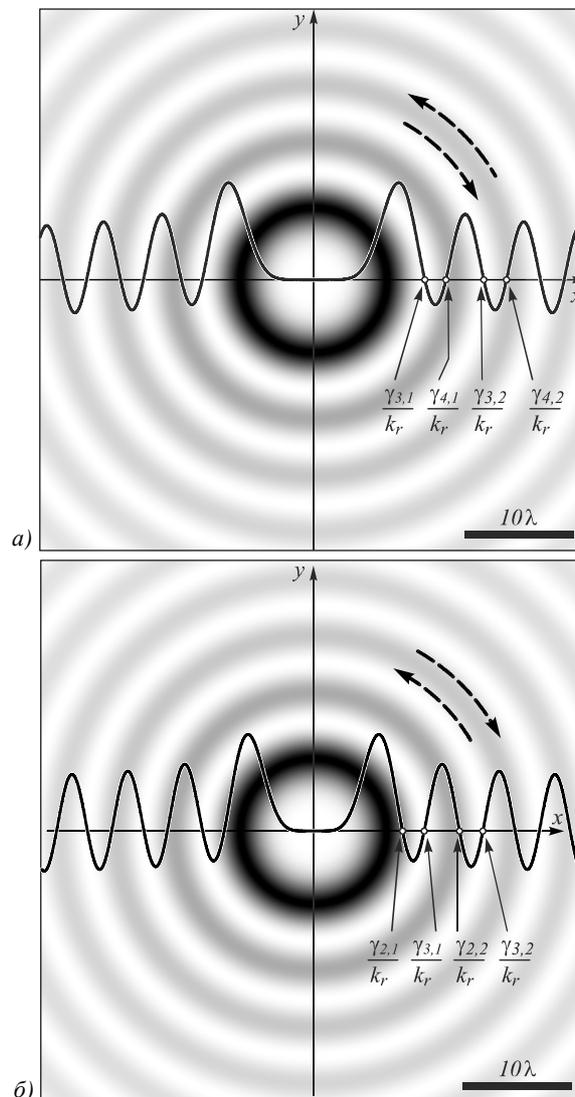


Рис. 1. Распределения интенсивности (негатив) моды Бесселя третьего порядка ( $n = 3$ ) с масштабирующим множителем  $k_r = k/10$  (параксиальный случай) с правой ( $\sigma = 1$ ) (а) и левой ( $\sigma = -1$ ) (б) круговой поляризацией. Размер расчётной области  $2R = 50\lambda$ . Графики показывают продольную составляющую вектора плотности углового момента. Пунктирные стрелки показывают направление вращения потока энергии

Из этого выражения следует, что в случае левой круговой поляризации первое кольцо с отрицательной плотностью даёт вклад в угловой момент по сравнению с первым кольцом с положительной плотностью, равный

$$\left| \frac{L_{z,\gamma_{n,1}/k_r} - L_{z,\gamma_{n-1,1}/k_r}}{L_{z,\gamma_{n-1,1}/k_r}} \right| = 1 - \frac{n-1}{n} \left[ \frac{\gamma_{n,1} J_{n-1}(\gamma_{n,1})}{\gamma_{n-1,1} J_n(\gamma_{n-1,1})} \right]^2. \quad (32)$$

Для правой же круговой поляризации аналогичное выражение имеет вид:

$$\left| \frac{L_{z,\gamma_{n+1,1}/k_r} - L_{z,\gamma_{n,1}/k_r}}{L_{z,\gamma_{n,1}/k_r}} \right| = 1 - \frac{n}{n+1} \left[ \frac{\gamma_{n+1,1} J_n(\gamma_{n+1,1})}{\gamma_{n,1} J_{n+1}(\gamma_{n,1})} \right]^2. \quad (33)$$

Как видно, выражение (33) совпадает с (32) при замене  $n$  на  $n-1$ .

### Заключение

В работе получены следующие результаты. Для произвольного параксиального светового поля с эллиптической поляризацией получено явное выражение для вектора плотности линейного момента (6). Ранее в [2] был получен частный случай для вектора плотности линейного момента для светового поля с осесимметричной интенсивностью.

Из общего выражения получен частный случай: выражение для вектора плотности линейного момента произвольного оптического вихря с эллиптической поляризацией (9). Для параксиальных световых полей с линейной поляризацией эффект «оптического трактора» [8] не может иметь места, так как для любого параксиального поля проекция вектора плотности линейного момента на оптическую ось всегда больше нуля, так как пропорциональна интенсивности.

На основе выражения для плотности линейного момента оптического вихря с эллиптической поляризацией (9) показано, что у параксиальных оптических вихрей с круговой поляризацией имеет место эффект «углового трактора» (13), когда на определенном радиусе от оптической оси происходит смена знака у азимутальной проекции вектора плотности линейного момента. Этот эффект «углового трактора» состоит в том, что у оптического вихря с круговой поляризацией на разном расстоянии от оптической оси энергия будет распространяться либо по правой, либо по левой спирали. Также для произвольного параксиального светового поля с эллиптической поляризацией получено явное выражение для вектора плотности углового момента (15), из которого следует более простое выражение для углового момента произвольного оптического вихря с эллиптической поляризацией (17). Уравнение (17) также подтверждает, что для круговой поляризации имеет место эффект «углового трактора», то есть проекция на оптическую ось вектора плотности углового момента на некоторых расстояниях от оптической оси меняет знак. Причём уравнение для радиусов, на которых меняет знак азимутальная проекция линейного момента (13), совпадает с уравнением (19), определяющим смену знака осевой проекции углового момента. Также из полученных выражений следует интересное свойство, заключающееся в том, что у параксиального оптического вихря с круговой поляризацией локальные максимумы интенсивности и локальные максимумы осевой проекции углового момента не совпадают и лежат на разных радиусах (21).

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства научных организаций (соглашение № 007-ГЗ/Ч3363/26) в параграфе «Линейный момент параксиального лазерного пучка» и Российского научного фонда (грант № 17-19-01186) в параграфах «Угловой момент параксиального лазерного пучка» и «Численное моделирование».

### Литература

1. **Padgett, M.J.** Orbital angular momentum 25 years on / M.J. Padgett // Optics Express. – 2017. – Vol. 25, Issue 10. – P. 11265-11274. – DOI: 10.1364/OE.25.011265.
2. **Allen, L.** Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian Laser modes / L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, J.P. Woerdman // Physical Review A. – 1992. – Vol. 45, Issue 11. – P. 8185-8189. – DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.
3. **Allen, L.** Spin-orbit coupling in free-space Laguerre-Gaussian light beams / L. Allen, V.E. Lembessis, M. Babiker // Physical Review A. – 1996. – Vol. 53, Issue 5. – P. 2937-2939. – DOI: 10.1103/PhysRevA.53.R2937.
4. **Barnett, S.M.** Orbital angular momentum and nonparaxial light beams / S.M. Barnett, L. Allen // Optics Communications. – 1994. – Vol. 110, Issues 5-6. – P. 670-680. – DOI: 10.1016/0030-4018(94)90269-0.
5. **Volke-Sepulveda, K.** Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam / K. Volke-Sepulveda, V. Garcés-Chavez, S. Chavez-Cedra, J. Arlt, K. Dholakia // Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics. – 2002. – Vol. 4, Issue 2. – P. S82-S89. – DOI: 10.1088/1464-4266/4/2/373.
6. **Nieminen, T.A.** Angular momentum of a strongly focused Gaussian beam / T.A. Nieminen, A.B. Stilgoe, N.R. Heckenberg, H. Rubinsztein-Dunlop // Journal of Optics A: Pure and Applied Optics. – 2008. – Vol. 10(11). – P. 115005. – DOI: 10.1088/1464-4258/10/11/115005.
7. **Monteiro, P.B.** Angular momentum of focused beams: beyond the paraxial approximation / P.B. Monteiro, P.A. Maia Neto, H.M. Nessenzeig // Physical Review A. – 2009. – Vol. 79, Issue 3. – P. 033830. – DOI: 10.1103/PhysRevA.79.033830.
8. **Novitsky, A.V.** Negative propagation of vector Bessel beams / A.V. Novitsky, D.V. Novitsky // Journal of the Optical Society of America A. – 2007. – Vol. 24, Issue 9. – P. 2844-2849. – DOI: 10.1364/JOSAA.24.002844.
9. **Oemrawsingh, S.S.R.** Intrinsic orbital angular momentum of paraxial beams with off-axis imprinted vortices / S.S.R. Oemrawsingh, E.R. Eliel, G. Nienhuis, J.P. Woerdman // Journal of the Optical Society of America A. – 2004. – Vol. 21, Issue 11. – P. 2089-2096. – DOI: 10.1364/JOSAA.21.002089.
10. **Cerjan, A.** Orbital angular momentum of Laguerre-Gaussian beams beyond the paraxial approximation / A. Cerjan, C. Cerjan // Journal of the Optical Society of America A. – 2011. – Vol. 28, Issue 11. – P. 2253-2260. – DOI: 10.1364/JOSAA.28.002253.
11. **Kotlyar, V.V.** Circularly polarized Hankel vortices / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // Optics Express. – 2017. – Vol. 25, Issue 7. – P. 7778-7790. – DOI: 10.1364/OE.25.007778.
12. **Zhou, G.Q.** Angular momentum density of a Gaussian vortex beam / G.Q. Zhou, X.G. Wang, C.Q. Dai, X.X. Chu // Science China Physics. – 2014. – Vol. 57, Issue 4. – P. 619-627. – DOI: 10.1007/s11433-013-5276-1.

13. Cheng, K. The Pointing vector and angular momentum density of Swallowtail-Gauss beams / K. Cheng, G. Lu, X. Zhong // *Optics Communications*. – 2017. – Vol. 396. – P. 58-65. – DOI: 10.1016/j.optcom.2017.03.038.
14. Zhu, Y. Probability density of the orbital angular momentum mode of Hankel-Bessel beams in an atmospheric turbulence / Y. Zhu, X. Liu, J. Gao, Y. Zhang, F. Zhao // *Optics Express*. – 2014. – Vol. 22, Issue 7. – P. 7765-7772. – DOI: 10.1364/OE.22.007765.
15. Kotlyar, V.V. Hankel-Bessel laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2012. – Vol. 29, Issue 5. – P. 741-747. – DOI: 10.1364/JOSAA.29.000741.
16. Bliokh, K.Y. Transverse and longitudinal angular momenta of light / K.Y. Bliokh, F. Nori // *Physics Reports*. – 2015. – Vol. 592. – P. 1-38. – DOI: 10.1016/j.physrep.2015.06.003.
17. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

### Сведения об авторах

**Котляр Виктор Викторович**, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета. В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств.

**Ковалёв Алексей Андреевич**, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. В списке научных работ более 150 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, фотонно-кристаллические устройства. E-mail: [alanko@smr.ru](mailto:alanko@smr.ru).

ГРПТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 16 ноября 2017 г. Окончательный вариант – 29 декабря 2017 г.

## ANGULAR MOMENTUM DENSITY OF A CIRCULARLY POLARIZED PARAXIAL OPTICAL VORTEX

V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> *Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Samara, Russia,*

<sup>2</sup> *Samara National Research University, Samara, Russia*

### Abstract

We obtain general analytic expressions for the angular momentum density of a vectorial circularly polarized paraxial optical vortex. It is shown that for any vortex field with the rotational symmetry and circular polarization, an effect of the “angular tractor” takes place, which means that the flow of light energy rotates around the optical axis clockwise or counter-clockwise at different radii in the beam cross section. It is also shown that on the circles of these radii in the beam cross section, the axial component of the angular momentum density of the vortex light field changes its sign. Thus, microparticles trapped in the vortex beam at different radii will rotate either clockwise or counterclockwise.

**Keywords:** paraxial optical vortex, angular momentum density, topological charge, circular polarization, angular tractor.

**Citation:** Kotlyar VV, Kovalev AA. Angular momentum density of a circularly polarized paraxial optical vortex. *Computer Optics* 2018; 42(1): 5-12. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-1-5-12.

**Acknowledgements:** This work was supported by the Federal Agency of scientific organization (Agreement 007-Г3/43363/26) in part “Linear momentum of paraxial laser beam” and by the Russian Science Foundation (#17-19-01186) in parts “Angular momentum of a paraxial laser beam” and “Computer Simulation”.

### References

- [1] Padgett MJ. Orbital angular momentum 25 years on. *Opt Express* 2017; 25(10): 11265-11274. DOI: 10.1364/OE.25.011265.
- [2] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian Laser modes. *Phys Rev A* 1992; 45(11): 8185-8189. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.
- [3] Allen L, Lembessis VE, Babiker M. Spin-orbit coupling in free-space Laguerre-Gaussian light beams. *Phys Rev A* 1996; 53(5): 2937-2939. DOI: 10.1103/PhysRevA.53.R2937.
- [4] Barnett SM, Allen L. Orbital angular momentum and non-paraxial light beams. *Opt Commun* 1994; 110(5-6): 670-680. DOI: 10.1016/0030-4018(94)90269-0.
- [5] Volke-Sepulveda K, Garces-Chavez V, Chavez-Cedra S, Arlt J, Dholakia K. Orbital angular momentum of a high-

- order Bessel light beam. *J Opt B: Quantum S O* 2002; 4(2): S82-S89. DOI: 10.1088/1464-4266/4/2/373.
- [6] Nieminen TA, Stilgoe AB, Heckenberg NR, Rubinsztein-Dunlop H. Angular momentum of a strongly focused Gaussian beam. *J Opt A: Pure Appl Opt* 2008; 10(11): 115005. DOI: 10.1088/1464-4258/10/11/115005.
- [7] Monteiro PB, Maia Neto PA, Nessenzeig HM. Angular momentum of focused beams: beyond the paraxial approximation. *Phys Rev A* 2009; 79(3): 033830. DOI: 10.1103/PhysRevA.79.033830.
- [8] Novitsky AV, Novitsky DV. Negative propagation of vector Bessel beams. *JOSA A* 2007; 24(9): 2844-2849. DOI: 10.1364/JOSAA.24.002844.
- [9] Oemrawsingh SSR, Eliel ER, Nienhuis G, Woerdman JP. Intrinsic orbital angular momentum of paraxial beams with off-axis imprinted vortices. *JOSA A* 2004; 21(11): 2089-2096. DOI: 10.1364/JOSAA.21.002089.
- [10] Cerjan A, Cerjan C. Orbital angular momentum of Laguerre-Gaussian beams beyond the paraxial approximation. *JOSA A* 2011; 28(11): 2253-2260. DOI: 10.1364/JOSAA.28.002253.
- [11] Kotlyar VV, Kovalev AA. Circularly polarized Hankel vortices. *Opt Express* 2017; 25(7): 7778-7790. DOI: 10.1364/OE.25.007778.
- [12] Zhou GQ, Wang XG, Dai CQ, Chu XX. Angular momentum density of a Gaussian vortex beam. *Science China Physics* 2014; 57(4): 619-627. DOI: 10.1007/s11433-013-5276-1.
- [13] Cheng K, Lu G, Zhong X. The Pointing vector and angular momentum density of Swallowtail-Gauss beams. *Opt Commun* 2017; 396: 58-65. DOI: 10.1016/j.optcom.2017.03.038.
- [14] Zhu Y, Liu X, Gao J, Zhang Y, Zhao F. Probability density of the orbital angular momentum mode of Hankel-Bessel beams in an atmospheric turbulence. *Opt Express* 2014; 22(7): 7765-7772. DOI: 10.1364/OE.22.007765.
- [15] Kotlyar VV, Kovalev AA, Soifer VA. Hankel-Bessel laser beams. *JOSA A* 2012; 29(5): 741-747. DOI: 10.1364/JOSAA.29.000741.
- [16] Bliokh KY, Nori F. Transverse and longitudinal angular momenta of light. *Phys Rep* 2015; 592: 1-38. DOI: 10.1016/j.physrep.2015.06.003.
- [17] Abramowitz M, Stegun IA. *Handbook of Mathematical Functions*. National Bureau of Standards, Applied Math Series; 1979.

---

#### Author's information

**Victor Victorovich Kotlyar** is the head of a laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS and a professor of Computer Science department at Samara National Research University. He graduated from Kuibyshev State University (1979), received his Candidate's and Doctor's Degrees in Physics & Mathematics from Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation of the RAS (1992). He is a co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current research interests include diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices.

**Alexey Andreevich Kovalev** (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a co-author of more than 150 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices. E-mail: [alanko@smr.ru](mailto:alanko@smr.ru).

---

*Received November 16, 2017. The final version – December 29, 2017.*

---