

Задача двух рефлекторов, формирующих световой пучок с плоским волновым фронтом из точечного источника, как задача перемещения масс

А.А. Мингазов¹, Л.Л. Досколович^{1,2}, Д.А. Быков^{1,2}, Н.Л. Казанский^{1,2}

¹ ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151,

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

В статье рассматривается задача расчета оптического элемента из двух отражающих поверхностей, формирующего заданное распределение освещенности с плоским фронтом, при условии точечного источника света. Формулируется понятие слабого решения для данной задачи, а также устанавливается эквивалентность данной задачи и задачи перемещения масс Монжа–Канторовича с некоторой функцией стоимости.

Ключевые слова: геометрическая оптика, неизображающая оптика, обратная задача, задача Монжа–Канторовича о перемещении масс.

Цитирование: Мингазов, А.А. Задача двух рефлекторов, формирующих световой пучок с плоским волновым фронтом из точечного источника, как задача перемещения масс / А.А. Мингазов, Л.Л. Досколович, Д.А. Быков, Н.Л. Казанский // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 6. – С. 968-975. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-6-968-975.

Введение

Задача расчёта оптического элемента из условия формирования заданного распределения освещённости в некоторой области относится классу обратных задач неизображающей оптики и является крайне вычислительно сложной.

Традиционным подходом к данной задаче является метод согласованных квадрик. Он состоит в следующем. Требуемое распределение освещённости приближается распределением, сосредоточенным в конечном числе точек некоторой сетки. Оптический элемент представляется в виде кусочно-гладкой поверхности, состоящей из фрагментов оптических элементов, каждый из которых фокусирует распределение освещённости в одну точку. В зависимости от задачи эти поверхности могут быть параболами вращения, эллипсоидами, гиперболами или более сложными поверхностями (например, [3]). Далее параметры фрагментов подбираются итерационно в зависимости от того, насколько отличается количество энергии, приходящее в каждую точку, от требуемого количества.

Метод согласованных квадрик является универсальным, то есть применим, по всей видимости, в любых задачах неизображающей оптики. Он позволяет рассчитывать оптические элементы, формирующие очень сложные распределения освещённости. К сожалению, большое время работы алгоритма затрудняет его активное использование.

Наиболее эффективные методы расчета, появившиеся в последние годы [1–2, 4–10, 13], используют переформулировку задач оптики в виде задачи перемещения масс Монжа–Канторовича с некоторой функцией стоимости. К сожалению, данный подход не является универсальным, и далеко не все задачи неизображающей оптики допускают переформули-

ровку в виде задачи перемещения масс. В частности, такой переформулировки не имеет задача формирования заданного распределения освещённости в ближней зоне с помощью отражающего или преломляющего элемента. Тем не менее некоторые подходы, основанные на задаче перемещения масс, возможны и в этих случаях [11, 12]. В диссертации [14] описаны известные на данный момент оптические элементы, задачу расчёта которых можно свести к задаче перемещения масс с некоторой функцией стоимости.

В данной статье мы сформулируем в качестве задачи перемещения масс не рассмотренную ранее задачу расчёта оптического элемента из двух отражающих поверхностей, формирующего заданное распределение освещённости с плоским фронтом, при условии точечного источника света. Близкая постановка задачи, когда входящий световой пучок также имеет плоский фронт, рассматривалась в [4, 14], но результат, приведённый в данной статье, не является их следствием.

1. Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное пространство \mathbb{E}^3 с координатами (x_1, x_2, z) . Пусть \mathcal{O} — начало координат, в котором расположен точечный источник света. Обозначим через \mathbb{S} сферу единичного радиуса с центром в \mathcal{O} . Интенсивность источника света описывается функцией $I(s)$, $s \in \mathbb{S}$, заданной в области $G \subset \mathbb{S}$.

Зададим две отражающих поверхности. Пусть первый рефлектор R_1 задаётся функцией $u_1(s)$, $s \in \mathbb{S}$, где $s = (s_1, s_2)$. Тогда $R_1 = \{u_1(s) | s \in \mathbb{S}\}$.

Зафиксируем некоторую плоскость $z = l$, (x_1, x_2) будем рассматривать как декартовы координаты на этой плоскости. Второй рефлектор R_2 будет задаваться функцией $u_2(x)$ следующим образом:

$$R_2 = \{(x, z) \in \mathbb{E}^3 | z = l - u_2(x)\}.$$

Пара рефлекторов индуцирует отображение лучевого соответствия γ следующим образом. Луч, исходящий из источника в направлении s , попадает в точку $u_1(s)s$ рефлектора R_1 и отражается первым рефлектором в направлении

$$t(s) = m - 2\langle s, n_1(s) \rangle n_1(s),$$

где $n_1(s)$ – нормаль к R_1 в точке $u_1(s)s$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение. Далее луч, исходящий из точки $u_1(s)s$ в направлении t , попадает в некоторую точку $(x, l - u_2(x))$ рефлектора R_2 и отражается в направлении

$$e(x) = t - 2\langle t, n_2(x) \rangle n_2(x),$$

где $n_2(x)$ – нормаль к R_2 в точке $(x, l - u_2(x))$. Далее луч, исходящий из точки $(x, l - u_2(x))$, в направлении $e(x)$ попадает в некоторую точку плоскости $z=l$. Это отображение будем обозначать $\gamma: G \rightarrow D \subset \{z=l\}$. Геометрия описанной системы рефлекторов приведена на рис. 1.

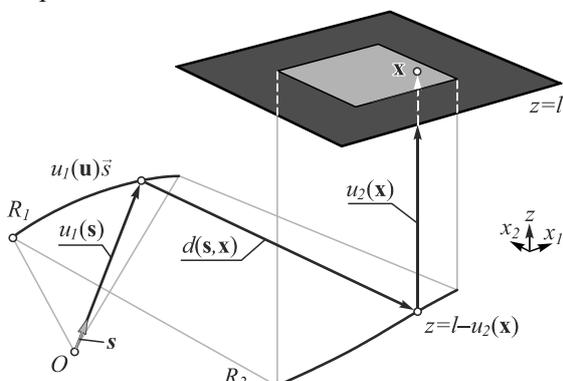


Рис. 1. Геометрия задачи.

Задача, которую мы рассматриваем, в классической постановке формулируется следующим образом.

Пусть задано распределение интенсивности источника $I(s)$, $s \in G \subset \mathbb{S}$ и требуемое распределение освещенности $L(x)$ в области D плоскости $z=l$. Требуется найти такие дифференцируемые функции $u_1(s)$, $u_2(x)$, чтобы выполнялись два условия:

- 1) сформированное распределение освещенности имеет плоский фронт, параллельный плоскости $z=l$. В обозначениях выше это означает, что вектор $e(x)$ не зависит от точки и совпадает с $e = (0, 0, 1)$;
- 2) отображение $\gamma: G \rightarrow D$ взаимно однозначно и удовлетворяет условию сохранения светового потока:

$$\int_{\gamma^{-1}(B)} I(s) d\sigma = \int_B L(x) dx,$$

где $B \subset D$ – произвольное борелевское подмножество, $d\sigma$ – элемент площади на сфере \mathbb{S} .

Лемма 1.1. Условие сохранения энергии для отображения $\gamma: G \rightarrow D$ равносильно любому из условий:

- 1) $I(s) = L(\gamma(s)) \cdot J_\gamma(s)$, а $J_\gamma(s)$ – якобиан отображения γ , вычисленный в точке s ;
- 2) для любой $h \in C(D)$ выполнено

$$\int_D h(x)L(x) dx = \int_G h(\gamma(s))I(s) d\sigma.$$

Доказательство. Доказано в [4, лемма 4.11] или [15, VI.1.1].

В силу леммы 1.1 классическое решение данной проблемы – это решение дифференциального уравнения Монжа–Ампера для функции отображения γ специального вида. Мы сформулируем понятие слабого решения для данной задачи, не предполагающее гладкости рефлекторов.

2. Специальное представление рефлекторов

Предположим, что луч, исходящий из O в направлении s , приходит в точку плоскости $z=l$ с координатой x . Тогда оптическая длина пути может быть записана так:

$$L = u_1(s) + d(s, x) + u_2(x),$$

где $d(s, x)$ – расстояние между точками рефлекторов.

В силу постоянства длины оптического пути между точками фронтов L не зависит от s и x . Отсюда

$$d^2 = (L - u_1(s) - u_2(x))^2.$$

С другой стороны, обозначим $e = (0, 0, 1)$, $t(s)$ – единичный вектор направления луча, отраженного от первого рефлектора, $\eta = (x, l)$ – радиус-вектор точки с координатой x плоскости $z=l$. Тогда

$$u_1(s)s + d(s, x)t(s) + u_2(x)e = \eta,$$

а значит, $d^2 = |u_1(s)s + u_2(x)e - \eta|^2$.

Приравнявая к выражению для d^2 , полученного из оптической длины пути, имеем

$$\begin{aligned} u_1^2(s) + u_2^2(x) + L^2 - 2u_1(s)L - 2u_2(x)L + 2u_1(s)u_2(x) &= \\ = u_1^2(s) + u_2^2(x) + \langle \eta, \eta \rangle + 2u_1(s)u_2(x)\langle s, e \rangle - & \\ - 2u_1(s)\langle s, \eta \rangle - 2u_2(x)\langle e, \eta \rangle. & \end{aligned}$$

Преобразуем с учётом того, что $|\eta|^2 = |x|^2 + l^2$, $\langle e, \eta \rangle = l$:

$$\begin{aligned} L^2 - l^2 - |x|^2 - 2u_1(s)(L - \langle \eta, \eta \rangle) - & \\ - 2u_2(x)(L - l) + 2u_1(s)u_2(x)(1 - \langle s, e \rangle) &= 0. \end{aligned}$$

Разделим это выражение на

$$2(L^2 - l^2 - |x|^2)(L - l)u_1(s)(1 - \langle s, e \rangle):$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2(L^2 - l^2 - |x|^2)(L - l)u_1(s)(1 - \langle s, e \rangle)} - \\ & \frac{L - \langle s, \eta \rangle}{(L^2 - l^2 - |x|^2)(L - l)(1 - \langle s, e \rangle)} - \\ & \frac{u_2(x)}{(L^2 - l^2 - |x|^2)u_1(s)(1 - \langle s, e \rangle)} + \\ & + \frac{u_2(x)}{(L^2 - l^2 - |x|^2)(L - l)} = 0. \end{aligned}$$

Введём обозначения

$$k_1(s) = \frac{1}{2u_1(s)(1-\langle s, e \rangle)};$$

$$k_2(x) = \frac{u_2(x)}{L^2 - l^2 - |x|^2}.$$

Тогда

$$k_1(s)k_2(x) - \frac{k_1(s)}{2(L-l)} - \frac{k_2(x)}{2(L-l)} + \frac{L - \langle s, \eta \rangle}{(L^2 - l^2 - |x|^2)(L-l)(1-\langle s, e \rangle)} = 0.$$

Раскладывая на множители, можем записать

$$\left(k_1(s) - \frac{1}{2(L-l)}\right) \left(k_2(x) - \frac{1}{2(L-l)}\right) = \frac{1}{4(L-l)^2} - \frac{L - \langle s, \eta \rangle}{2(L^2 - l^2 - |x|^2)(L-l)(1-\langle s, e \rangle)}.$$

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема 2.1. Если система из двух рефлекторов $(u_1(s), u_2(x))$ отображает луч с направлением s в точку x , то выполнено соотношение:

$$F(u_1(s), s) + G(u_2(x), x) = \mathcal{K}(s, x),$$

где

$$F(u_1(s), s) = \log \left(\frac{1}{2u_1(s)(1-\langle s, e \rangle)} - \frac{1}{2(L-l)} \right);$$

$$G(u_2(x), x) = \log \left(\frac{u_2(x)}{L^2 - l^2 - |x|^2} - \frac{1}{2(L-l)} \right);$$

$$\mathcal{K}(s, x) = \log \left(\frac{1}{4(L-l)^2} - \frac{L - \langle s, \eta \rangle}{(L^2 - l^2 - |x|^2)(1-\langle s, e \rangle)} \right).$$

□

Далее мы для краткости будем обозначать

$$\tilde{u}_1(s) = F(u_1(s), s),$$

$$\tilde{u}_2(x) = G(u_2(x), x).$$

Нам также понадобятся функции, обратные к F и G по первой переменной:

$$\tilde{F}(\tilde{u}_1, s) = \frac{1}{\left(2e^{\tilde{u}_1} + \frac{1}{L-l}\right)(1-\langle s, e \rangle)};$$

$$\tilde{G}(\tilde{u}_2, x) = \left(L^2 - l^2 - |x|^2\right) \left(e^{\tilde{u}_2} + \frac{1}{2(L-l)}\right);$$

то есть

$$\tilde{F}(F(u_1, s), s) = u_1; \quad F(\tilde{F}(\tilde{u}_1, s), s) = \tilde{u}_1, \quad (1)$$

$$\tilde{G}(G(u_2, x), x) = u_2; \quad G(\tilde{G}(\tilde{u}_2, x), x) = \tilde{u}_2. \quad (2)$$

Нам понадобится представление поверхностей рефлекторов в виде огибающих семейств поверхностей специального вида. Заметим, что для дифференцируемых рефлекторов R_1, R_2 лучевое соответствие $\gamma: G \rightarrow D$ можно описать следующим образом. Для $s \in G$ луч, приходящий в точку $u_1(s)$ первого рефлектора, приходит в точку $(x, l-u_2(x))$ второго рефлектора. Тогда рефлектор R_1 может быть представлен в виде огибающей семейства рефлекторов R^x , фокусирующих лучи в точки $(x, l-u_2(x))$ рефлектора R_2 . Уравнение рефлектора R^x , фокусирующего в точку $(x, l-u_2(x))$, нетрудно получить, записав условие равенства оптического пути из начала координат \mathcal{O} до точки $(x, l-u_2(x))$ величине $L-u_2(x)$. Заметим, что в теореме 1.1 мы проделывали именно это вычисление. В результате полярная функция $u_1^x(s)$ рефлектора R^x удовлетворяет уравнению:

$$F(u_1^x(s), s) + G(u_2(x), x) = \mathcal{K}(s, x),$$

или, выражая u_1^x , можем записать

$$u_1^x(s) = \tilde{F}(\mathcal{K}(s, x) - \tilde{u}_2(x), s).$$

Итак, функция $u_1(s)$ удовлетворяет уравнениям огибающей семейства поверхностей $u_1^x(s)$:

$$\begin{cases} u_1(s) = \tilde{F}(\mathcal{K}(s, x) - \tilde{u}_2(x), s), \\ \frac{\partial}{\partial x_i} [\tilde{F}(\mathcal{K}(s, x) - \tilde{u}_2(x), s)] = 0, \quad i = \overline{1, 2}. \end{cases} \quad (3)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} [\tilde{F}(\mathcal{K}(s, x) - \tilde{u}_2(x), s)] &= \\ &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} [\mathcal{K}(s, x) - \tilde{u}_2(x)]. \end{aligned}$$

Как нетрудно установить дифференцированием соотношений (1), выражение $\partial \tilde{F} / \partial \tilde{u}_1$ не равно 0. Значит, второе условие в (3) равносильно

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [\mathcal{K}(s, x) - \tilde{u}_2(x)] = 0, \quad i = \overline{1, 2}.$$

Теперь, применяя к первому уравнению в (3) функцию F , можно записать соотношение (3) в терминах функций \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 :

$$\begin{cases} \tilde{u}_1(s) = \mathcal{K}(s, x) - \tilde{u}_2(x), \\ \frac{\partial}{\partial x_i} [\mathcal{K}(s, x) - \tilde{u}_2(x)] = 0, \quad i = \overline{1, 2}. \end{cases} \quad (4)$$

Это соотношение говорит о том, что функция $\tilde{u}_1(s)$ является огибающей семейства $\tilde{u}_1^x(s) = \mathcal{K}(s, x) - \tilde{u}_2(x)$, которые по построению соответствуют рефлекторам $\tilde{F}(\mathcal{K}(s, x) - \tilde{u}_2(x), s)$, фокусирующим весь световой пучок в точки $(x, l-u_2(x))$ второго рефлектора.

Второй рефлектор R_2 аналогично можно рассматривать как огибающую семейства поверхностей, фо-

кусирующую при обратном распространении все лучи в одной точке $u_1(s)s$. Это соотношение может быть также записано в терминах функций \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 :

$$\begin{cases} \tilde{u}_2(s) = \mathcal{K}(s, x) - \tilde{u}_1(x), \\ \frac{\partial}{\partial s_i} [\mathcal{K}(s, x) - \tilde{u}_1(x)] = 0, \quad i = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

В дальнейшем мы будем работать только с функциями \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 , предполагая, что рефлекторы R_1 и R_2 по ним восстанавливаются.

Мы будем рассматривать частный случай огибающей (4), когда второе условие соответствует не просто какой-то экстремальной точке, а минимуму или максимуму. В этом случае соотношения примут вид:

$$\tilde{u}_1(s) = \min_{x \in D} (\mathcal{K}(s, x) - \tilde{u}_2(x))$$

или

$$\tilde{u}_1(s) = \max_{x \in D} (\mathcal{K}(s, x) - \tilde{u}_2(x)).$$

Далее мы будем предполагать, что выполнено первое соотношение

$$\tilde{u}_1(s) = \min_{x \in D} (\mathcal{K}(s, x) - \tilde{u}_2(x)). \quad (5)$$

Лемма 2.1. Пусть для системы рефлекторов $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$, индуцирующих взаимно однозначное лучевое соответствие, имеет место представление (5). Тогда для функции \tilde{u}_2 выполнено

$$\tilde{u}_2(x) = \min_{s \in G} (\mathcal{K}(s, x) - \tilde{u}_1(s)).$$

Доказательство. Из (5) сразу следует, что

$$\tilde{u}_1(s) \leq \mathcal{K}(s, x) - \tilde{u}_2(x) \quad \forall s \in G, x \in D.$$

Значит, выполнено

$$\tilde{u}_2(x) \leq \mathcal{K}(s, x) - \tilde{u}_1(s) \quad \forall s \in G, x \in D.$$

Отсюда, переходя к минимуму по s , получаем неравенство

$$\tilde{u}_2(x) \leq \min_{s \in G} (\mathcal{K}(s, x) - \tilde{u}_1(s)).$$

Предположим теперь, что существует $x_0 \in D$, для которого

$$\tilde{u}_2(x_0) < \min_{s \in G} (\mathcal{K}(s, x_0) - \tilde{u}_1(s)).$$

Значит,

$$\tilde{u}_2(x_0) < \mathcal{K}(s, x_0) - \tilde{u}_1(s) \quad \forall s \in G,$$

или

$$\tilde{u}_1(s) + \tilde{u}_2(x_0) < \mathcal{K}(s, x_0) \quad \forall s \in G.$$

Последнее равенство означает, что ни для какой точки $s \in G$ оптический путь до x_0 не совпадает с $\mathcal{K}(s, x_0)$, то есть никакая точка не отображается в x_0 , что противоречит биективности γ .

3. Слабое решение и задача перемещения масс

Мы сформулируем понятие слабого решения, не требующего дифференцируемости функций $(\tilde{u}_1(s), \tilde{u}_2(x))$.

Определение 3.1. \mathcal{K} -выпуклой парой $(\tilde{u}_1(s), \tilde{u}_2(x))$ будем называть пару функций $\tilde{u}_1(s) \in C(G), \tilde{u}_2(x) \in C(D)$ таких, что

$$\tilde{u}_1(s) = \min_{x \in D} (\mathcal{K}(s, x) - \tilde{u}_2(x));$$

$$\tilde{u}_2(x) = \min_{s \in G} (\mathcal{K}(s, x) - \tilde{u}_1(s)).$$

Лемма 3.1. Пусть $(\tilde{u}_1(s), \tilde{u}_2(x))$ – \mathcal{K} -выпуклая пара. Тогда функции \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 липшицевы.

Доказательство. Аналогично доказательствам [1, lemma 3.2], [7, Приложение 1].

По теореме Радемахера [15, XI.4.2] липшицева функция является почти всюду дифференцируемой. Поэтому, если $(\tilde{u}_1(s), \tilde{u}_2(x))$ – \mathcal{K} -выпуклая пара, то $\tilde{u}_1(s)$ и $\tilde{u}_2(x)$ почти всюду дифференцируемы. Значит, они почти всюду определяют дифференцируемые поверхности рефлекторы. Поэтому определено (почти всюду) лучевое соответствие $\gamma: G \rightarrow D$ как отображение отражения от двух поверхностей (см. параграф 1).

Лемма 3.2. Пусть $(\tilde{u}_1(s), \tilde{u}_2(x))$ – \mathcal{K} -выпуклая пара, $\gamma: G \rightarrow D$ – лучевое соответствие, определенное почти всюду. Тогда минимум в формуле

$$\tilde{u}_1(s) = \min_{x \in D} (\mathcal{K}(s, x) - \tilde{u}_2(x))$$

достигается в точке $x = \gamma(s)$ (там, где отображение γ определено). Аналогично для функции $\tilde{u}_2(x)$.

Доказательство. Пусть $s_0 \in G$ – точка, в которой лучевое соответствие γ определено, x_0 – точка, в которой достигается минимум. Тогда в точке s_0 функция $\tilde{u}_1(s)$ касается функции $\mathcal{K}(s, x) - \tilde{u}_2(x)$, которая соответствует рефлектору, фокусирующему весь световой пучок в точке $(x_0, l - \tilde{u}_2(x))$. А значит, $\gamma(s_0) = x_0$.

Поскольку, как уже было отмечено, функции $\tilde{u}_1(s), \tilde{u}_2(x)$ почти всюду дифференцируемы, многозначное отображение

$$\gamma(s) = \{x \in D \mid \tilde{u}_1(s) + \tilde{u}_2(x) = \mathcal{K}(s, x)\}$$

почти всюду однозначно. Следовательно, можно говорить о том, удовлетворяет ли оно условию сохранения энергии или нет.

Определение 3.2. Слабым решением называется \mathcal{K} -выпуклая пара функций $\tilde{u}_1(s) \in C(G), \tilde{u}_2(x) \in C(D)$, для которой обобщённое отображение отражения

$$\gamma(s) = \{x \in D \mid \tilde{u}_1(s) + \tilde{u}_2(x) = \mathcal{K}(s, x)\}$$

удовлетворяет условию сохранения энергии: для любого борелевского $B \in D$ выполнено

$$\int_B L(x) dx = \int_{\gamma^{-1}(B)} I(s) d\sigma.$$

Задача о нахождении слабого решения оказывается эквивалентна задаче перемещения масс Монжа–Канторовича. Точная формулировка приведена в следующей теореме.

Теорема 3.1. Пусть $(\tilde{u}_1(s), \tilde{u}_2(x))$ – слабое решение. Тогда отображение γ из определения 3.2 минимизирует функционал

$$\mathcal{F}(P) = \int_G \mathcal{K}(s, P(s)) I(s) d\sigma,$$

заданный на пространстве отображений $P: G \rightarrow D$ (возможно, определённых почти всюду), удовлетворяющих условию сохранения светового потока, то есть для любого борелевского $B \subset D$ выполнено

$$\int_B L(x) dx = \int_{P^{-1}(B)} I(s) d\sigma.$$

Доказательство. Поскольку $(\tilde{u}_1(s), \tilde{u}_2(x))$ является слабым решением, выполнено неравенство

$$\tilde{u}_1(x) + \tilde{u}_2(x_0) \leq \mathcal{K}(s, x), \quad \forall s \in G, \forall x \in D.$$

В частности, если P – произвольный план, имеет место неравенство

$$\tilde{u}_1(s) + \tilde{u}_2(P(s)) \leq \mathcal{K}(s, P(s)),$$

причём равенство достигается, только если $P = \gamma$. Умножим это неравенство на $I(x)$ и проинтегрируем:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(P) &= \int_G \mathcal{K}(s, P(s)) I(s) d\sigma \geq \\ &\geq \int_G \tilde{u}_1(s) I(s) d\sigma + \int_G \tilde{u}_2(P(s)) I(s) d\sigma. \end{aligned}$$

Делая замену переменных в последнем интеграле и пользуясь условиями сохранения светового потока для отображения P , получим

$$\mathcal{F}(P) \geq \int_G \tilde{u}_1(s) I(s) d\sigma + \int_G \tilde{u}_2(x) L(x) dx.$$

Теперь делаем обратную замену, пользуясь условием сохранения светового потока для γ

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(P) &\geq \int_G \tilde{u}_1(s) I(s) d\sigma + \int_G \tilde{u}_2(\gamma(s)) I(s) d\sigma = \\ &= \int_G \mathcal{K}(s, \gamma(s)) I(s) d\sigma = \mathcal{F}(\gamma). \end{aligned}$$

Если план P отличается от γ на множестве положительной меры, то неравенство строгое. \square

Повторяя рассуждения из [1, Theorem 3.4] или [7, Теорема 1], можно получить следующую теорему, которую можно рассматривать как двойственную задачу (см. [16, Theorem 1.3]) для задачи перемещения масс Монжа–Канторовича, сформулированной в теореме 3.1.

Теорема 3.2. Рассмотрим пространство пар непрерывных функций

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathcal{K}} &= \{(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in C(G) \times C(D) : \\ &: \tilde{u}_1(s) + \tilde{u}_2(x) \leq \mathcal{K}(s, x)\}, \end{aligned}$$

на котором задан функционал

$$\mathcal{G}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = \int_G \tilde{u}_1(s) I(s) d\sigma + \int_D \tilde{u}_2(x) L(x) dx.$$

Пара $(\tilde{u}_1^0, \tilde{u}_2^0) \in C(G) \times C(D)$ максимизирует функционал \mathcal{G} тогда и только тогда, когда является слабым решением.

Доказательство. Мы опишем только идею доказательства. Как уже отмечалось, оно полностью аналогично [1, Theorem 3.4] или [7, Теорема 1]. Доказательство того, что слабое решение $(\tilde{u}_1^0, \tilde{u}_2^0)$ максимизирует функционал \mathcal{G} , является тривиальным. Достаточно заметить, что для $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in \Omega_{\mathcal{K}}$ выполнено

$$\tilde{u}_1(s) + \tilde{u}_2(\gamma(s)) \leq \mathcal{K}(s, \gamma(s)) = \tilde{u}_1^0(s) + \tilde{u}_2^0(\gamma(s)),$$

где $\gamma: G \rightarrow D$ – лучевое соответствие, индуцированное слабым решением $(\tilde{u}_1^0, \tilde{u}_2^0)$. Далее, интегрируя левую и правую часть неравенства по $I(s) d\sigma$ и пользуясь условием сохранения энергии для γ , получим

$$\mathcal{G}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \leq \mathcal{G}(\tilde{u}_1^0, \tilde{u}_2^0).$$

Обратное утверждение доказывается несколько сложнее. Если пара функций $(\tilde{u}_1^0, \tilde{u}_2^0)$ максимизирует функционал \mathcal{G} , то условие сохранения энергии для отображения соответствующего лучевого соответствия γ

$$\int_{\gamma^{-1}(B)} I(s) d\sigma = \int_B L(x) dx$$

получается из уравнения Эйлера–Лагранжа для функционала \mathcal{G} при варьировании его на функцию $\mathcal{X}'(x)$, являющуюся непрерывной аппроксимацией индикатора $\mathcal{X}_B(x)$ произвольного борелевского множества $B \subset D$. \square

4. Восстановление рефлекторов по лучевому соответствию

Теоремы 3.1 и 3.2 позволяют находить решения поставленной задачи расчёта системы рефлекторов. Но если теорема 3.2 позволяет сразу найти функции $(\tilde{u}_1^0, \tilde{u}_2^0)$ и восстановить рефлекторы по формулам

$$u_1(s) = \tilde{F}(\tilde{u}_1, s), \quad u_2(x) = \tilde{G}(\tilde{u}_2, x),$$

то из теоремы 3.1 мы получаем только лучевое соответствие, индуцированное решением.

Опишем способ восстановления поверхностей рефлекторов $(u_1(s), u_2(x))$ по лучевому соответствию $\gamma: G \rightarrow D$. Из определения 3.1:

$$\tilde{u}_1(s) = \min_{x \in D} (\mathcal{K}(s, x) - \tilde{u}_2(x));$$

причём, как следует из леммы 5.2, минимум достигается при $x = \gamma(s)$. В результате имеет место система дифференциальных уравнений, которая выполняется почти всюду (в силу дифференцируемости функции \tilde{u}_2 почти всюду):

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} [\tilde{u}_2(x) - \mathcal{K}(s, x)] \right|_{x=\gamma(s)} = 0, \text{ где } i = \overline{1, 2}.$$

Эта система позволяет восстановить функцию \tilde{u}_2 , а далее

$$u_2(x) = \tilde{G}(\tilde{u}_2, x). \quad \square$$

Функцию $u_1(s)$ можно восстановить аналогичным образом.

Заключение

В работе показано, что расчет системы двух рефлекторов, формирующих из точечного источника освещения излучение с плоским фронтом и заданным распределением интенсивности, может быть сформулирована как задача перемещения масс Монжа–Канторовича с функцией \mathcal{K} , приведённой в теореме 2.1. Данный результат является основой для эффективных методов численного решения данной задачи.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ 18-19-00326 (формулировка задачи расчёта двух зеркал как задачи о перемещении масс) и Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (соглашение № 007-ГЗ/ЧЗ363/26) в части формулировки слабого решения задачи.

Литература

1. **Glimm, T.** Optical design of single reflector systems and the Monge-Kantorovich mass transfer problem / T. Glimm, V.I. Oliker // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2003. – Vol. 117, Issue 3. – P. 4096-4108. – DOI: 10.1023/A:1024856201493.
2. **Wang, X.-J.** On design of a reflector antenna II / X.-J. Wang // *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*. – 2004. – Vol. 20, Issue 3. – P. 329-341. – DOI: 10.1007/s00526-003-0239-4.
3. **Андреева, К.В.** Метод расчёта оптических элементов с поверхностью свободной формы, работающей по принципу полного внутреннего отражения / К.В. Андреева, М.А. Моисеев, С.В. Кравченко, Л.Л. Досколович // *Компьютерная оптика*. – 2016. – Т. 40, № 4. – С. 467-474. – DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-4-467-474.
4. **Glimm, T.** Optical design of two-reflector systems, the Monge-Kantorovich mass transfer problem and Fermat's principle / T. Glimm, V.I. Oliker // *Indiana University Mathematics Journal*. – 2004. – Vol. 53, Issue 5. – P. 1255-1277. – DOI: 10.1512/iumj.2004.53.2455.
5. **Rubinstein, J.** Intensity control with a free-form lens / J. Rubinstein, G. Wolansky // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2007. – Vol. 24, Issue 2. – P. 463-469. – DOI: 10.1364/JOSAA.24.000463.
6. **Doskolovich, L.L.** Variational approach to calculation of light field eikonal function for illuminating a prescribed region / L.L. Doskolovich, A.A. Mingazov, D.A. Bykov, E.S. Andreev, E.A. Bezus // *Optics Express*. – 2017. – Vol. 25, Issue 22. – P. 26378-26392. – DOI: 10.1364/OE.25.026378.
7. **Досколович, Л.Л.** Вариационный подход к расчёту функции эйконала / Л.Л. Досколович, А.А. Мингазов, Д.А. Быков, Е.С. Андреев // *Компьютерная оптика*. – 2018. – Т. 42, № 4. – С. 557-567. – DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-4-557-567.
8. **Doskolovich, L.L.** Designing double freeform surfaces for collimated beam shaping with optimal mass transportation and linear assignment problems / L.L. Doskolovich, D.A. Bykov, E.S. Andreev, E.A. Bezus, V. Oliker // *Optics Express*. – 2018. – Vol. 26, Issue 19. – P. 24602-24613. – DOI: 10.1364/OE.26.024602.
9. **Doskolovich, L.L.** Optimal mass transportation and linear assignment problems in the design of freeform refractive optical elements generating far-field irradiance distributions / L.L. Doskolovich, D.A. Bykov, A.A. Mingazov, E.A. Bezus // *Optics Express*. – 2019. – Vol. 27, Issue 9. – P. 13083-13097. – DOI: 10.1364/OE.27.013083.
10. **Bykov, D.A.** Linear assignment problem in the design of freeform refractive optical elements generating prescribed irradiance distributions / D.A. Bykov, L.L. Doskolovich, A.A. Mingazov, E.S. Andreev, N.L. Kazanskiy // *Optics Express*. – 2018. – Vol. 26, Issue 21. – P. 27812-27825. – DOI: 10.1364/OE.26.027812.
11. **Graf, T.** An optimal mass transport approach to near-field reflector problem in optical design / T. Graf, V. Oliker // *Inverse Problems*. – 2012. – Vol. 28, No. 2. – 025001. – DOI: 10.1088/0266-5611/28/2/025001.
12. **Gutierrez, C.E.** The near field refractor / C.E. Gutierrez, Q. Huang // *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*. – 2014. – Vol. 31, Issue 4. – P. 655-684. – DOI: 10.1016/j.anihpc.2013.07.001.
13. **Schwartzburg, Y.** High-contrast computational caustic design / Y. Schwartzburg, R. Testuz, A. Tagliasacchi, M. Pauly // *ACM Transactions on Graphics (TOG)*. – 2014. – Vol. 33, Issue 4. – 74. – DOI: 10.1145/2601097.2601200.
14. **Yadav, N.K.** Monge-Ampere problems with nonquadratic cost function: application to freeform optics / N.K. Yadav // *Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven*, 2018. – 152 p. – ISBN: 978-90-386-4574-2.
15. **Макаров, Б.М.** Лекции по вещественному анализу / Б.М. Макаров, А.Н. Подкорытов // Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2011. – 688 с.
16. **Villani, C.** Topics in optimal transportation / C. Villani. – Providence, RI: American Mathematical Society, 2003. – 370 p.

Сведения об авторах

Мингазов Альберт Айдарович, в 2010 году окончил Самарский государственный университет (СамГУ, ныне – Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва) по специальности «Математика». В 2012 году окончил магистратуру НИУ ВШЭ по направлению «Математика», в 2015 окончил аспирантуру Санкт-Петербургского отделения математического института имени В.А. Стеклова. Кандидат физико-математических наук (2015), научный сотрудник лаборатории дифракционной оптики Института систем обработки изображений РАН – филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН.
E-mail: mingazov88@gmail.com.

Сведения об авторах **Досколович Леонид Леонидович, Быков Дмитрий Александрович** см. стр.953 этого номера.

Сведения об авторе **Казанский Николай Львович** см. стр.954 этого номера.

ГРПТИ: 29.19.16

Поступила в редакцию 20 мая 2019 г. Окончательный вариант – 14 августа 2019 г.

The two reflector design problem for forming a flat wavefront from a point source as an optimal mass transfer problem

A.A. Mingazov¹, L.L. Doskolovich^{1,2}, D.A. Bykov^{1,2}, N.L. Kazanskiy^{1,2}

¹ IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,
443001, Russia, Samara, Molodogvardeyskaya 151,

² Samara National Research University, 443086, Russia, Samara, Moskovskoye Shosse 34

Abstract

The article deals with a problem of calculating two reflecting surfaces that form a given irradiance distribution with a flat wavefront, provided that a point source of light is used. A notion of a weak solution for the said problem is formulated and the equivalence of this problem and the Monge–Kantorovich mass transfer is proven.

Keywords: geometric optics, optical design, nonimaging optics, inverse problem, Monge–Kantorovich mass transfer problem, optimal mass transportation.

Citation: Mingazov AA, Doskolovich LL, Bykov DA, Kazanskiy NL. The two reflector design problem for forming a flat wavefront from a point source as an optimal mass transfer problem. *Computer Optics* 2019; 43(6): 968-975. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-6-968-975.

Acknowledgements: This work was supported by Russian Science Foundation (RSF) under grants 18-19-00326 (formulation of the problem of calculating of two reflector as an optimal mass transportation problem) and by Ministry of Science and Higher Education within the State assignment FSRC “Crystallography and Photonics” RAS under agreement 007-Г3/Ч3363/26 (formulation of the weak solution of the problem).

References

- [1] Glimm T, Olikier VI. Optical design of single reflector systems and the Monge-Kantorovich mass transfer problem. *J Math Sci* 2003; 117(3): 4096-4108. DOI: 10.1023/A:1024856201493.
- [2] Wang X-J. On design of a reflector antenna II. *Calc Variations Partial Differ Equ* 2004; 20(3): 329-341. DOI: 10.1007/s00526-003-0239-4.
- [3] Andreeva KV, Moiseev MA, Kravchenko SV, Doskolovich LL. Design of optical elements with TIR freeform surface [In Russian]. *Computer Optics* 2016; 40(4): 467-474. DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-4-467-474.
- [4] Glimm T, Olikier VI. Optical design of two-reflector systems, the Monge-Kantorovich mass transfer problem and Fermat’s principle. *Indiana University Mathematics Journal* 2004; 53(5): 1255-1277. DOI: 10.1512/iumj.2004.53.2455.
- [5] Rubinstein J, Wolansky G. Intensity control with a freeform lens. *J Opt Soc Am A* 2007; 24(2): 463-469. DOI: 10.1364/JOSAA.24.000463.
- [6] Doskolovich LL, Mingazov AA, Bykov DA, Andreev ES, Bezus EA. Variational approach to calculation of light field eikonal function for illuminating a prescribed region. *Opt Express* 2017; 25(22): 26378-26392. DOI: 10.1364/OE.25.026378.
- [7] Doskolovich LL, Mingazov AA, Bykov DA, Andreev ES. Variational approach to eikonal function computation. *Computer Optics* 2018; 42(4): 557-567. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-4-557-567.
- [8] Doskolovich LL, Bykov DA, Andreev ES, Bezus EA, Olikier V. Designing double freeform surfaces for collimated beam shaping with optimal mass transportation and linear assignment problems. *Opt Express* 2018; 26(19): 24602-24613. DOI:10.1364/OE.26.024602.
- [9] Doskolovich LL, Bykov DA, Mingazov AA, Bezus EA. Optimal mass transportation and linear assignment problems in the design of freeform refractive optical elements generating far-field irradiance distributions. *Opt Express* 2019; 27(9): 13083-13097. DOI: 10.1364/OE.27.013083.
- [10] Bykov DA, Doskolovich LL, Mingazov AA, Andreev ES, Kazanskiy NL. Linear assignment problem in the design of freeform refractive optical elements generating prescribed irradiance distributions. *Opt Express* 2018; 26(21): 27812-27825. DOI: 10.1364/OE.26.027812.
- [11] Graf T, Olikier V. An optimal mass transport approach to nearfield reflector problem in optical design. *Inverse Problems* 2012; 28(2): 025001. DOI: 10.1088/0266-5611/28/2/025001.
- [12] Gutierrez CE, Huang Q. The near field refractor. *Annales de l’Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis* 2014; 31(4): 655-684. DOI: 10.1016/j.anihpc.2013.07.001.
- [13] Schwartzburg Y, Testuz R, Tagliasacchi A, Pauly M. High-contrast computational caustic design. *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 2014; 33(4). DOI: 10.1145/2601097.2601200.
- [14] Yadav NK. Monge-Ampere problems with nonquadratic cost function: application to freeform optics. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven; 2018. ISBN: 978-90-386-4574-2.
- [15] Makarov B, Podkorytov A. *Real analysis: Measures, integrals and applications: Measures, integrals and applications*. London: Springer-Verlag; 2013.
- [16] Villani C. *Topics in optimal transportation*. Providence, RI: American Mathematical Society; 2003.

Authors' information

Albert Aidarovich Mingazov graduated from Samara State University (presently, Samara National Research University) in 2010, majoring in Mathematics. In 2012 he got the master degree in Mathematics at National Research University Higher School of Economics, in 2015 he graduated from the post-graduate course of the St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences. Candidate of Physics and Mathematics (2015). Currently he is a researcher at Diffractive Optics laboratory of the Image Processing Systems Institute RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. E-mail: mingazov88@gmail.com.

The information about authors **Leonid Leonidovich Doskolovich, Dmitry Alexandrovich Bykov and Nikolay Lvovich Kazanskiy** you can find on page 955 of this issue.

Received May 20, 2019. The final version – August 14, 2019.
