

Сравнение методов численного интегрирования в задаче дифракции плоской электромагнитной волны на прямоугольном отверстии

А.С. Мокеев^{1,2}, В.М. Ямщиков^{1,2}

¹ Федеральное государственное унитарное предприятие
«Российский федеральный ядерный центр
Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики»
(ФГУП «РФЯЦ – ВНИИЭФ»);

² Институт лазерно-физических исследований (ИЛФИ),
607188, Нижегородская область, г. Саров, пр. Мира, д. 37

Аннотация

На примере классической задачи дифракции плоской электромагнитной волны на прямоугольном отверстии рассмотрены особенности вычисления интеграла Гюйгенса–Френеля в дальней зоне стандартными квадратурными методами численного интегрирования и специализированным методом коллокаций Левина. Для квадратурных методов численного интегрирования получен критерий оценки шага интегрирования в зависимости от размеров области наблюдения на экране и требуемой точности вычислений. Показаны преимущества использования специализированного метода коллокаций Левина над стандартными методами численного интегрирования.

Ключевые слова: дифракционный интеграл, интегрирование осциллирующих функций, метод прямоугольников, метод трапеций, метод Левина, дифракция в дальней зоне.

Цитирование: Мокеев, А.С. Сравнение методов численного интегрирования в задаче дифракции плоской электромагнитной волны на прямоугольном отверстии / А.С. Мокеев, В.М. Ямщиков // Компьютерная оптика. – 2021. – Т. 45, № 5. – С. 773-778. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-877.

Citation: Mokeev AS, Yamschikov VM. Comparison of numerical integration methods for calculating diffraction of a plane electromagnetic wave diffraction on rectangular aperture. Computer Optics 2021; 45(5): 773-778. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-877.

Введение

Во многих задачах о распространении лазерного излучения в среде возникает необходимость учета волновой природы света, в частности, это задачи дифракции, фокусировки лазерного излучения, оценки расходимости и др. Их решение основано на вычислении интеграла Гюйгенса–Френеля [1–4]:

$$E_P = \frac{ik}{2\pi} \int_S E_M \frac{\exp(-ik\rho)}{\rho} dS, \quad (1)$$

где E_P – амплитуда дифрагированной волны в точке наблюдения P , E_M – амплитуда падающей волны в произвольной точке M волновой поверхности, k – модуль волнового вектора падающей волны, dS – площадь участка волновой поверхности, а ρ – абсолютная величина радиус-вектора от точки M до точки P .

Вычисление дифракционного интеграла – трудоемкая задача. Во-первых, подынтегральное выражение в нем представляет собой быстро осциллирующую функцию, что накладывает определенные требования как на выбор метода численного интегрирования, так и на шаг разбиения области интегрирования. Во-вторых, интеграл вычисляется по поверхности, площадь которой пропорциональна квадрату характерного размера пучка, а время, затрачиваемое на расчет, также пропорционально квадрату этого раз-

мера и обратно пропорционально шагу разбиения. Большой шаг разбиения неизбежно приводит к большим погрешностям вычислений, а малый – к большим временным затратам. Поэтому выбор оптимального шага и метода численного интегрирования является весьма актуальной задачей.

Вопросам разработки, исследования, тестирования и применения численных методов приближенного вычисления определенных интегралов посвящено большое количество работ [5–12].

Использование традиционных алгоритмов для вычисления интеграла от быстро осциллирующих функций подразумевает расчет по квадратурным формулам (метод прямоугольников, трапеций), что требует мелкого шага разбиения и приводит к значительным затратам вычислительных ресурсов [5–7].

Существуют и другие, более сложные и специализированные методы. Для интегралов от функций с фазой линейной формы часто используют метод Филлона [6]. Он основан на построении составных квадратурных формул, в которых на каждом частичном интервале используется интерполяционный многочлен для амплитуды, и дальнейшее интегрирование выполняется точно.

Метод коллокаций Левина [9] предназначен для вычисления осциллирующих интегралов с более сложной фазовой функцией и может быть применим

для интеграла вида (1). Он заключается в переходе к решению обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). Использование матрицы дифференцирования Чебышева позволяет далее свести задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), чаще всего невырожденной. Основным недостатком данного метода является трудоемкость решения СЛАУ, поскольку получающаяся в результате матрица является плохо обусловленной, что может приводить к большой ошибке при получении решения. Тем не менее, во многих случаях использование метода коллокаций Левина позволяет получить более точный результат по сравнению с другими методами [13].

В данной работе приведены результаты сравнения стандартных квадратурных методов интегрирования дифракционного интеграла (1) в приближении Фраунгофера со специализированным методом коллокаций Левина и аналитическим решением на примере классической задачи дифракции плоской электромагнитной волны на прямоугольном отверстии в дальней зоне.

Аналитическое решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны на прямоугольном отверстии в дальней зоне

Для сравнения методов численного интегрирования с точным аналитическим решением рассмотрим классическую задачу дифракции плоской электромагнитной волны на прямоугольном отверстии в дальней зоне. Ее решение подробно изложено, например, в [1–2]. При нормальном падении плоской электромагнитной волны на прямоугольное отверстие шириной $2a_0$ и длиной $2b_0$, лежащее в плоскости xy , а также разложении величины ρ по малому параметру теории дифракции и пренебрежении квадратичными членами по сравнению с линейными $\rho \approx Z - (Xx + Yy)/Z$ амплитуда дифрагированной волны E_P в точке наблюдения P равна:

$$E_P = \frac{ikE_0}{2\pi} \frac{\exp(-ikZ)}{Z} \int_{-b_0}^{b_0} \exp\left(\frac{ikYy}{Z}\right) dy \int_{-a_0}^{a_0} \exp\left(\frac{ikXx}{Z}\right) dx, \quad (2)$$

где (X, Y, Z) – координаты точки наблюдения P , $(x, y, 0)$ – координаты произвольной точки M волновой поверхности.

Интегралы (2) легко вычисляются аналитически, и тогда амплитуда электромагнитной волны:

$$E_P = \frac{iE_0 4a_0 b_0}{\lambda Z} \exp(-ikZ) \operatorname{sinc}\left(\frac{2a_0 X}{\lambda Z}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{2b_0 Y}{\lambda Z}\right). \quad (3)$$

$$E_P = Ah_x \left[\frac{\sin\left(\frac{(N_x - 1)kXh_x}{2Z}\right) \cos\left(\frac{N_x kXh_x}{2Z}\right)}{\sin\left(\frac{kXh_x}{2Z}\right)} + i \frac{\sin\left(\frac{(N_x - 1)kXh_x}{2Z}\right) \sin\left(\frac{N_x kXh_x}{2Z}\right)}{\sin\left(\frac{kXh_x}{2Z}\right)} \right] \times \\ \times h_y \left[\frac{\sin\left(\frac{(N_y - 1)kYh_y}{2Z}\right) \cos\left(\frac{N_y kYh_y}{2Z}\right)}{\sin\left(\frac{kYh_y}{2Z}\right)} + i \frac{\sin\left(\frac{(N_y - 1)kYh_y}{2Z}\right) \sin\left(\frac{N_y kYh_y}{2Z}\right)}{\sin\left(\frac{kYh_y}{2Z}\right)} \right]. \quad (8)$$

Здесь λ – длина электромагнитной волны.

Физической и измеряемой величиной является интенсивность света:

$$I_P = I_0 \times \left(\frac{4a_0 b_0}{\lambda Z}\right)^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{2a_0 X}{\lambda Z}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{2b_0 Y}{\lambda Z}\right), \quad (4)$$

где $I_0 = c\epsilon_0 E_0^2 / 2$ – интенсивность падающей волны, c – скорость света в среде, ϵ_0 – электрическая постоянная.

Выражение (4) представляет собой аналитическое решение рассматриваемой задачи.

Построение численного решения с использованием стандартного квадратного метода интегрирования

Рассмотрим построение решения интеграла (2) численным методом левых прямоугольников с постоянным шагом [5–6]:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j) (x_{j+1} - x_j) = h \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j), \quad (5)$$

где $x_j = a + (j-1)h$, $N = (b-a)/h$.

Применяя (5) к выражению (2), получим:

$$E_P = Ah_x h_y \left[\sum_{m_x=1}^{N_x-1} \cos\left(\frac{kXh_x m_x}{Z}\right) + i \sum_{m_x=1}^{N_x-1} \sin\left(\frac{kXh_x m_x}{Z}\right) \right] \times \\ \times \left[\sum_{m_y=1}^{N_y-1} \cos\left(\frac{kYh_y m_y}{Z}\right) + i \sum_{m_y=1}^{N_y-1} \sin\left(\frac{kYh_y m_y}{Z}\right) \right], \quad (6)$$

где

$$A = \frac{ikE_0}{2\pi Z} \exp(-ik \left(Z + \frac{X(a_0 + h_x)}{Z} + \frac{Y(b_0 + h_y)}{Z} \right)),$$

$$N_x = 2a_0/h_x + 1, \quad N_y = 2b_0/h_y + 1.$$

Как известно [14]:

$$\sum_{j=1}^N \cos(j\alpha) = \frac{\sin(N\alpha/2) \cdot \cos([(N+1)/2]\alpha)}{\sin(\alpha/2)}, \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^N \sin(j\alpha) = \frac{\sin(N\alpha/2) \cdot \sin([(N+1)/2]\alpha)}{\sin(\alpha/2)}.$$

При подстановке (7) в (6) получим выражение для поля электромагнитной волны:

Тогда аналитическое выражение для интенсивности, характеризующее решение рассматриваемой задачи численным методом левых прямоугольников:

$$I = I_0 \left(\frac{h_x h_y}{\lambda Z} \right)^2 \frac{\sin^2 \left(\frac{2\pi a_0 X}{\lambda Z} \right) \sin^2 \left(\frac{2\pi b_0 Y}{\lambda Z} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi X h_x}{\lambda Z} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi Y h_y}{\lambda Z} \right)}. \quad (9)$$

Как видно из решения (9), в окрестности точек:

$$\frac{\pi X_n h_x}{\lambda Z} = \pi n, \quad \frac{\pi Y_m h_y}{\lambda Z} = \pi m, \quad n, m = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

возникает неопределенность вида $0/0$. Устраняя эту неопределенность, в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ получим:

$$I = I_0 \left(\frac{h_x h_y}{\lambda Z} \right)^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\sin^2 \{ (N_x - 1)(\pi n + \varepsilon) \}}{\sin^2 (\pi n + \varepsilon)} \times \frac{\sin^2 \{ (N_y - 1)(\pi m + \varepsilon) \}}{\sin^2 (\pi m + \varepsilon)} \right] = I_0 \left(\frac{4a_0 b_0}{\lambda Z} \right)^2. \quad (11)$$

Формула (11) показывает, что значение интенсивности электромагнитной волны в точках (X_n, Y_m) существенно отличается от аналитического решения (4) и совпадает со значением для центрального максимума. В пределе $h_x \rightarrow 0, h_y \rightarrow 0$ формула (9) становится в точности равной аналитическому решению (4), которое не подразумевает наличие каких-либо максимумов вдали от центра экрана. То есть (X_n, Y_m) – координаты центров артефактных максимумов. Их возникновение в распределении интенсивности при численном интегрировании дифракционного интеграла методом левых прямоугольников неизбежно и связано с шагом интегрирования, а период определяется выражением:

$$\Delta X = X_{n+1} - X_n = \lambda Z / h_x, \quad \Delta Y = Y_{m+1} - Y_m = \lambda Z / h_y. \quad (12)$$

Если в заданных пределах области наблюдения на экране X_{\max} и Y_{\max} выполняются соотношения $\Delta X / X_{\max} < 1, \Delta Y / Y_{\max} < 1$, то метод левых прямоугольников неприменим для решения рассматриваемой задачи.

В связи с этим возникает необходимость введения ограничения на шаг интегрирования и количество узлов расчетной сетки:

$$h_x = \frac{Z}{k X_{\max} \alpha_x}, \quad N_x = 1 + \alpha_x \frac{2a_0 k X_{\max}}{Z}, \quad (13)$$

$$h_y = \frac{Z}{k Y_{\max} \alpha_y}, \quad N_y = 1 + \alpha_y \frac{2b_0 k Y_{\max}}{Z}.$$

где $\alpha_x = f(\Delta_x), \alpha_y = f(\Delta_y)$ – характерные параметры точности, зависящие от заданной абсолютной погрешности квадратурного метода Δ_x, Δ_y , в частности, для метода левых прямоугольников и трапеций

$\alpha_x = a_0 / \Delta_x, \alpha_y = b_0 / \Delta_y$ и $\alpha_x = \sqrt{a_0 / 6\Delta_x}, \alpha_y = \sqrt{b_0 / 6\Delta_y}$ соответственно.

Формулы (13) представляют собой критерий для оценки шага интегрирования или количества узлов расчетной сетки в зависимости от размеров области наблюдения на экране и требуемой точности вычислений.

В табл. 1 приведена зависимость относительной погрешности ε_i вычисления центрального и двух последующих максимумов в распределении интенсивности на одномерном экране от характерного параметра точности α_x . Расчет приведен для следующих параметров задачи: интенсивность падающей волны $I_0 = 250$ Вт/см², длина волны $\lambda = 1$ мкм, размеры пучка по оси x и y $a_0 = b_0 = 1$ см, расстояние от отверстия до экрана $Z = 1$ км, пределы наблюдения на экране $X_{\max} = 20$ см, $Y_{\max} = 0$ см.

Табл. 1. Зависимость относительной погрешности ε_i от характерного параметра точности α_x

$\alpha_x, [-]$	$\varepsilon_0, \%$ ($X=0$ см)	$\varepsilon_1, \%$ ($X=7,15$ см)	$\varepsilon_2, \%$ ($X=12,3$ см)
0,3	4,66E-14	11,21	37,90
0,5	1,28E-13	4,81	15,05
0,8	1,16E-14	1,69	5,13
1,6	8,15E-14	0,42	1,25
8,0	6,75E-13	0,017	0,05

Как видно из табл. 1, метод левых прямоугольников описывает центральный максимум в распределении интенсивности с точностью $\sim 10^{-13} \%$, которая практически не зависит от параметра α_x . В то же время с увеличением α_x погрешность вычисления интенсивности во втором и третьем максимумах уменьшается.

Таким образом, в заданных пределах области наблюдения на экране $X_{\max} = 20$ см в точке $Y = 0$ см для описания центрального и двух последующих максимумов в распределении интенсивности $I(X, 0)$ с погрешностью не более 2% характерный параметр точности должен составлять $\alpha_x = 1,6$, что соответствует $N_x = 41$ узлу расчетной сетки.

Построение численного решения методом коллокаций Левина

Рассмотрим решение поставленной задачи численного интегрирования выражения для электрического поля (2) специализированным методом коллокаций Левина. Как известно [9], данный метод приближенного вычисления интегралов от быстро осциллирующих функций основан на переходе к численному решению ОДУ с последующим сведением к СЛАУ для определения первообразной от подынтегральной функции $p(x)$.

Функция $p(x)$, удовлетворяющая условию:

$$\frac{d}{dx} [p(x) \exp(i\omega g(x))] = f(x) \exp(i\omega g(x)), \quad (14)$$

позволяет вычислить осциллирующий интеграл:

$$\int_a^b f(x) \exp(i\omega g(x)) dx = p(b) \exp(i\omega g(b)) - p(a) \exp(i\omega g(a)). \quad (15)$$

Для определения функции $p(x)$ достаточно удовлетворить уравнению:

$$\frac{dp(x)}{dx} + i\omega \frac{dg(x)}{dx} p(x) = f(x). \quad (16)$$

$$\begin{aligned} d_{j,k} &= \frac{(-1)^{k-j}}{t_j - t_k}, \quad 0 < j \neq k < N, \quad d_{k,k} = -\frac{1}{2} \frac{t_k}{1-t_k^2}, \quad 0 < k < N, \quad d_{0,0} = \frac{1}{6}(1+2N^2), \\ d_{N,N} &= -\frac{1}{6}(1+2N^2), \quad d_{0,k} = 2 \frac{(-1)^k}{1-t_k}, \quad 0 < k < N, \quad d_{k,0} = -\frac{1}{2} \frac{(-1)^k}{1-t_k}, \quad 0 < k < N, \\ d_{k,N} &= \frac{1}{2} \frac{(-1)^{N-k}}{1+t_k}, \quad 0 < k < N, \quad d_{N,k} = -2 \frac{(-1)^{N-k}}{1+t_k}, \quad 0 < k < N, \quad d_{0,N} = \frac{1}{2}(-1)^N, \quad d_{N,0} = -\frac{1}{2}(-1)^N, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$t_j = \cos(\pi j / N), \quad 0 \leq j \leq N -$$

система узлов Гаусса–Лобатто.

Так как интеграл рассматривается на отрезке $[a, b]$, то для перехода к стандартной области задания полиномов Чебышева $[-1, 1]$ необходимо провести соответствующие преобразования переменных:

$$x_j = \frac{b-a}{2} t_j + \frac{b+a}{2}, \quad 0 \leq j \leq N. \quad (19)$$

Таким образом, при подстановке (17), (18) и (19) в уравнение (16) получим СЛАУ следующего вида:

$$(D + i\omega\Lambda) p = f, \quad (20)$$

где

$$\int_a^b f(x) \exp(i\omega g(x)) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} [p(x) \exp(i\omega g(x))] dx = \frac{b-a}{2} [p(x_0) \exp(i\omega g(x_0)) - p(x_N) \exp(i\omega g(x_N))]. \quad (21)$$

Тогда выражение (2) для амплитуды электромагнитной волны будет иметь вид:

$$E_p = \frac{ikE_0 a_0 b_0}{2\pi} \frac{\exp(-ikZ)}{Z} \left[p_1(x_0) \exp(ik \frac{x_0 X}{Z}) - p_1(x_N) \exp(ik \frac{x_N X}{Z}) \right] \left[p_2(y_0) \exp(ik \frac{y_0 Y}{Z}) - p_2(y_N) \exp(ik \frac{y_N Y}{Z}) \right]. \quad (22)$$

Нетрудно заметить, что в окрестности точки $X=Y=0$ матрица $(D + i\omega\Lambda) \approx D$, а значит, решение, полученное методом коллокаций Левина, может приводить к большой ошибке в распределении интенсивности вблизи центра экрана, поэтому возникает необходимость в выборе подходящего метода решения плохо обусловленной СЛАУ (20). В работе [13] отмечено, что надежным для решения данного типа задач является метод SVD (singular value decomposition), который и будет использоваться в дальнейшем.

Сравнение методов численного интегрирования с точным решением

Для сравнения двух квадратурных методов численного интегрирования (методы левых прямоуголь-

Производную искомой функции dp/dx в дискретном наборе точек $[x_0, \dots, x_N]$ можно представить в виде:

$$\frac{dp}{dx} = Dp, \quad (17)$$

где $p = [p(x_0), \dots, p(x_N)]^T$ D – матрица дифференцирования Чебышева. Элементы матрицы дифференцирования вычисляются по следующим формулам [15]:

$$\begin{aligned} p &= [p(x_0), \dots, p(x_N)]^T, \quad f = [f(x_0), \dots, f(x_N)]^T, \\ \Lambda &= \text{diag} \left(\frac{b-a}{2} \frac{dg(x_0)}{dx}, \dots, \frac{b-a}{2} \frac{dg(x_N)}{dx} \right). \end{aligned}$$

Дифференциальная матрица D является сингулярной матрицей, но ее число обусловленности $\text{Cond}(D) = \|D\| \|D^{-1}\|$ улучшается при прибавлении к D диагональной матрицы $i\omega\Lambda$. В этом случае $\|i\omega\Lambda\|_2$ показывает степень улучшения. Когда $\|i\omega\Lambda\|_2$ сравнительно велико, матрица $(D + i\omega\Lambda)$ становится хорошо обусловленной $\text{Cond}(D + i\omega\Lambda) \sim 1$, в противном случае она остается плохо обусловленной $\text{Cond}(D + i\omega\Lambda) \gg 1$, что ведет к большой ошибке при решении СЛАУ (20).

Применительно к рассматриваемой задаче с учетом (19) выражение (15) окончательно примет вид (21):

ников и трапеций), а также специализированного метода коллокаций Левина с точным аналитическим решением (4) были выбраны следующие параметры задачи: интенсивность падающей волны $I_0 = 250$ Вт/см², длина волны $\lambda = 1$ мкм, размеры пучка по оси x и y $a_0 = b_0 = 1$ см, расстояние от отверстия до одномерного экрана $Z = 1$ км, пределы области наблюдения на экране $X_{\max} = 20$ см, $Y_{\max} = 0$ см.

На рис. 1 представлены графики зависимости интенсивности электромагнитной волны I от координаты X на экране при $Y = 0$ см, полученные в результате численного расчета методами левых прямоугольников, трапеций и коллокаций Левина, а также точное

аналитическое решение. Численные расчеты квадратурными методами проводились на равномерной сетке с характерным параметром точности $\alpha_x=0,16$, а специализированным методом – на сетке узлов Гаусса–Лобатто. Количество узлов расчетной сетки во всех случаях составляло $N_x=5$. Для решения СЛАУ (20) применялся метод SVD.

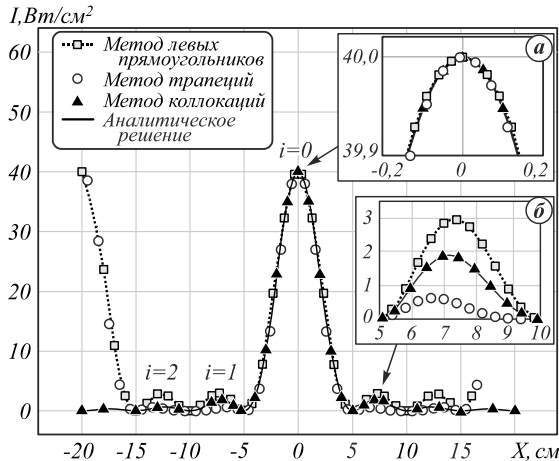


Рис. 1. Сравнение приближенного численного и точного аналитического решения: центральный максимум в увеличенном масштабе (а); второй максимум в увеличенном масштабе (б)

Из рис. 1а, б видно хорошее качественное совпадение рассмотренных методов приближенного численного интегрирования с точным аналитическим решением при описании центрального максимума. Метод коллокаций Левина дает более точный результат при описании второго и третьего максимума в распределении интенсивности. Метод левых прямоугольников при этом завышает результат, а метод трапеций – занижает. Также из данных, представленных на рис. 1, виден артефактный максимум в распределении интенсивности, координата которого в соответствии с выбранными параметрами расчета совпадает с периодом $\Delta X=20$ см.

В табл. 2 приведены результаты сравнения методов численного интегрирования по относительной погрешности ϵ_i для центрального и двух последующих максимумов в распределении интенсивности. Количество узлов расчетной сетки во всех случаях составляло $N_x=41$.

Табл. 2. Сравнение методов численного интегрирования по относительной погрешности ϵ_i

Метод численного интегрирования	$\epsilon_0, \%$ ($X=0$ см)	$\epsilon_1, \%$ ($X=7,15$ см)	$\epsilon_2, \%$ ($X=12,3$ см)
Левых прямоугольников	$8,15E-14$	0,42	1,25
Трапеций	$8,15E-14$	0,84	2,48
Коллокаций Левина	$2,68E-13$	$4,32E-13$	$3,75E-13$

Из табл. 2 видно, что на расчетной сетке, состоящей из $N_x=41$ узла, все рассмотренные методы количественно описывают центральный максимум с точ-

ностью $\sim 10^{-13} \%$. Квадратурные методы оказываются в ≈ 3 раза точнее метода коллокаций Левина. Второй и третий максимумы при численном интегрировании методом коллокаций Левина описываются с точностью $\sim 10^{-13} \%$. В то же время максимальная погрешность вычислений методами левых прямоугольников и трапеций не превышает 3 %.

На рис. 2 показан график зависимости интенсивности I во втором максимуме с координатой $X=7,15$ см при $Y=0$ см от количества узлов расчетной сетки N_x для трех методов численного интегрирования.

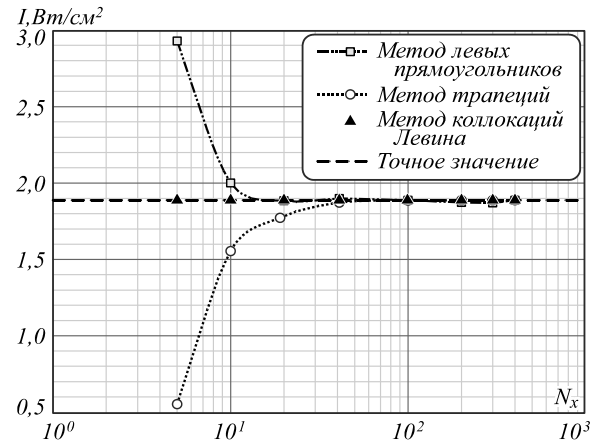


Рис. 2. Исследование методов численного интегрирования на сходимость

Из рис. 2 видно, что специализированный метод коллокаций Левина обладает наилучшей сходимостью и позволяет получать решение поставленной задачи уже на сетке, состоящей из $N_x \approx 5$ узлов. В то же время для описания второго максимума в распределении интенсивности стандартными квадратурными методами численного интегрирования с погрешностью не более 1 % потребуется сетка из $N_x \approx 40$ узлов.

На рис. 3 представлена зависимость отношения времени t , затрачиваемого на расчет различными методами, ко времени $t_{\text{ЛП}}$, затрачиваемому на расчет методом левых прямоугольников от количества узлов расчетной сетки N_x .

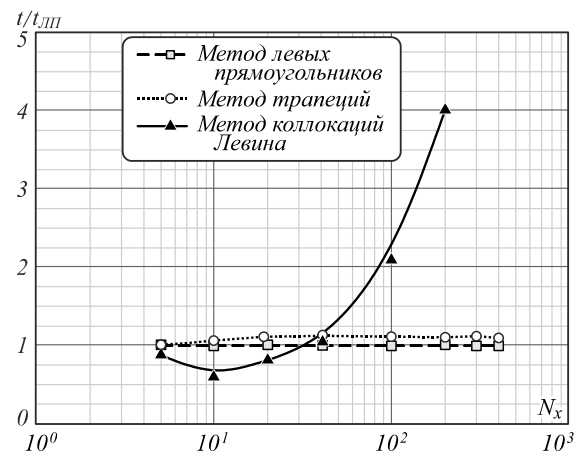


Рис. 3. Сравнение методов численного интегрирования по времени расчёта

Из данных, представленных на рис. 3, видно, что по временным затратам метод коллокаций Левина не уступает квадратурным методам вплоть до $N_x \approx 40$ узлов расчетной сетки. При $N_x > 40$ точек преимуществом по времени расчета обладают стандартные квадратурные методы численного интегрирования.

Заключение

На примере классической задачи дифракции плоской электромагнитной волны на прямоугольном отверстии в дальней зоне проведено сравнение трех алгоритмов численного интегрирования: метод левых прямоугольников, метод трапеций и специализированный метод коллокаций Левина.

Для квадратурных методов численного интегрирования получен критерий, определяющий выбор шага интегрирования в зависимости от размеров области наблюдения на экране и требуемой точности вычислений.

Показано, что для описания центрального и двух последующих максимумов в распределении интенсивности излучения на экране с погрешностью не более 2% метод коллокаций Левина требует \approx в 8 раз меньшее количество узлов расчетной сетки по сравнению с методами левых прямоугольников и трапеций и не уступает им по временным затратам вплоть до $N_x \approx 40$ узлов. При $N_x > 40$ точек преимуществом по времени расчета обладают стандартные квадратурные методы численного интегрирования.

Таким образом, на примере решения задачи дифракции плоской электромагнитной волны на прямоугольном отверстии в дальней зоне показаны преимущества использования специализированного метода коллокаций Левина над стандартными квадратурными методами численного интегрирования.

Литература

- Ахманов, С.А. Физическая оптика [Электронный ресурс] / С.А. Ахманов. – М.: Московский государственный университет, 2004. – 656 с. – URL: <https://ibooks.ru/bookshelf/27350/reading> (дата обращения: 06.11.2020).
- Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф; под ред. Г.П. Мотулевич; пер. с англ. С.Н. Бреус, А.И. Головашкина, А.А. Шубина. – Изд. 2-е, испр. – М.: Наука, 1973. – 720 с.
- Устинов, А.В. Быстрый способ вычисления интеграла Релея-Зоммерфельда первого типа / А.В. Устинов // Компьютерная оптика. – 2009. – Т. 33, № 4. – С. 412-419.
- Veerman, J.A.C. Calculation of the Rayleigh-Sommerfeld diffraction integral by exact integration of the fast oscillating factor / J.A.C. Veerman, J.J. Rusch, H.P. Urbach // Journal of the Optical Society of America. – 2005. – Vol. 22, Issue 4. – P. 636-646.
- Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
- Самарский, А.А. Численные методы / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
- Соболев, И.М. Метод Монте-Карло / И.М. Соболев. – М.: Наука, 1978.
- Jeffrey, G.B. Louis Napoleon George Filon, 1875-1937 / G.B. Jeffrey // Obituary Notices of Fellows of the Royal Society. – 1939. – Vol. 2, Issue 7. – P. 500-509. – DOI: 10.1098/rsbm.1939.0010.
- Levin, D. Procedures for computing one and two-dimensional integrals of functions with rapid irregular oscillations / D. Levin // Mathematics of Computation. – 1982. – Vol. 38, No. 158. – P. 531-538.
- Li, J. A universal solution to one-dimensional oscillatory integrals / J. Li, X. Wang, T. Wang // Science in China Series F: Information Sciences. – 2008. – Vol. 51, Issue 10. – P. 1614-1622. – DOI: 10.1007/s11432-008-0121-2.
- Lovetskiy, K.P. Integration of highly oscillatory functions / K.P. Lovetskiy, L.A. Sevastyanov, A.L. Sevastyanov, N.M. Mekeko // Mathematical Modelling and Geometry. – 2014. – Vol. 2, Issue 3. – P. 11-27.
- Liu, Y. Fast evaluation of canonical oscillatory integrals Y. Liu // Applied Mathematics & Information Sciences. – 2012. – Vol. 6, No 2. – P. 245-251.
- Ловецкий, К.П. Сравнение методов вычисления интегралов от быстро осциллирующих функций [Электронный ресурс] / К.П. Ловецкий, И.А. Мигаль // Наукосведение. – 2015. – Т. 7, № 2. – 16 с. – URL: <http://naukovedenie.ru/PDF/70TVN315.pdf> (дата обращения 15.04.2021). – DOI: 10.15862/70TVN315.
- Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2 : Учеб. пособие / Г.М. Фихтенгольц. – 7-е изд. – М.: Наука, 1969. – 800 с.
- Mason, J.C. Chebyshev polynomials / J.C. Mason, D.C. Handscomb. – Chapman and Hall/CRC, 2002. – 360 p.

Сведения об авторах

Мокеев Александр Сергеевич, 1993 года рождения, в 2016 году окончил Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» по специальности 140305 «Ядерные реакторы и энергетические установки», работает научным сотрудником в институте лазерно-физических исследований ИЛФИ РФЯЦ – ВНИИЭФ. Область научных интересов: компьютерная оптика, численные методы, программирование. E-mail: mokeev-a@mail.ru.

Ямщиков Виталий Михайлович, 1994 года рождения, учился в Национальном исследовательском ядерном университете «МИФИ». Работает младшим научным сотрудником в институте лазерно-физических исследований ИЛФИ РФЯЦ – ВНИИЭФ. Область научных интересов: перенос излучения, физика плазмы, лазерная физика. E-mail: feynman94@yandex.ru.

ГРНТИ: 27.41.41 (алгоритмы решения задач вычислительной и дискретной математики)
Поступила в редакцию 9 февраля 2021 г. Окончательный вариант – 21 апреля 2021 г.

Comparison of numerical integration methods for calculating diffraction of a plane electromagnetic wave by a rectangular aperture

A.S. Mokeev¹, V.M. Yamshchikov¹

¹ Federal State Unitary Enterprise RUSSIAN FEDERAL NUCLEAR CENTER
All-Russian Research Institute of Experimental Physics (FSUE "RFNC – VNIIEF"),
The Institute of Laser Physics (ILFI), 607188, Sarov, Nizhny Novgorod region, Mira Ave, 37

Abstract

We discuss features of the calculation of a Fraunhofer integral by traditional quadrature numerical integration methods and a special collocation Levin method when calculating the diffraction of a plane electromagnetic wave by a rectangular aperture. For the quadrature numerical integration methods, a criterion for the assessment of the integration step is derived depending on the screen size and required calculation accuracy. Advantages of the use of the special collocation Levin method in comparison with the traditional quadrature numerical integration methods are shown.

Keywords: diffraction integral, integration of oscillatory functions, method of rectangles, trapezium method, Levin method, Fraunhofer diffraction.

Citation: Mokeev AS, Yamschikov VM. Comparison of numerical integration methods for calculating diffraction of a plane electromagnetic wave diffraction on rectangular aperture. *Computer Optics* 2021; 45(5): 773-778. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-877.

References

- | | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>[1] Akhmanov SA, Nikitin SYu. Physical optics. Oxford: Clarendon Press; 1997.</p> <p>[2] Born M, Wolf E. Principles of optics. Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. 7th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.</p> <p>[3] Ustinov AV. The fast way for calculation of first class Rayleigh-Sommerfeld integral [In Russian]. <i>Computer Optics</i> 2009; 33(4): 412-419.</p> <p>[4] Veerman JAC. Calculation of the Rayleigh-Sommerfeld diffraction integral by exact integration of the fast oscillating factor. <i>J Opt Soc Am</i> 2005; 22(4): 636-646.</p> <p>[5] Kalitkin NN. Numerical methods [In Russian]. Moscow: "Nauka" Publisher; 1986.</p> <p>[6] Samarskii AA, Gulin AV. Numerical methods [In Russian]. Moscow: "Nauka" Publisher; 1989.</p> <p>[7] Sobol IM. A primer for the Monte Carlo method. Boca Raton, FL: CRC Press; 1994.</p> <p>[8] Jeffery GB. Louis Napoleon George Filon, 1875-1937. <i>Obit Not Fell R Soc</i> 1939; 2(7): 501-509. DOI: 10.1098/rsbm.1939.0010.</p> | <p>[9] Levin D. Procedures for computing one and two-dimensional integrals of functions with rapid irregular oscillations. <i>Math Comp</i> 1982, 38(158): 531-538.</p> <p>[10] Li J, Wang X, Wang T. A universal solution to one-dimensional oscillatory integrals. <i>Sci China Ser F-Inf Sci</i> 2008; 51(10): 1614-1622. DOI: 10.1007/s11432-008-0121-2.</p> <p>[11] Lovetskiy KP, Sevastyanov LA, Sevastyanov AL, Mekeko NM. Integration of highly oscillatory functions. <i>Mathematical Modelling and Geometry</i> 2014; 2(3): 11-27. DOI: 10.26456/mmg/2015-312.</p> <p>[12] Liu Y. Fast evaluation of canonical oscillatory integrals. <i>Appl Math Inf Sci</i> 2012; 6(2): 245-251.</p> <p>[13] Lovetskiy KP, Migal IA. Comparison of methods for calculation of oscillatory integrals [In Russian]. <i>Naukovedenie</i> 2015; 7(2). Source: http://naukovedenie.ru/PDF/70TVN315.pdf.</p> <p>[14] Fikhtengol'ts GM. Differential- und Integralrechnung. II [In German]. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften; 1978.</p> <p>[15] Mason JC, Handscomb DC. Chebyshev polynomials. Chapman & Hall /CRC Press; 2002.</p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Authors' information

Aleksandr Sergeevich Mokeev (b. 1993) graduated from National Research Nuclear University "MEPHI" in 2016, majoring in Nuclear Reactors and Power Plants. Currently he works as the junior researcher at the Institute of Laser Physics (ILFI) FSUE "RFNC – VNIIEF". Research interests are computer optics, numerical methods, and programming. E-mail: mokeev-a@mail.ru.

Vitaliy Mikhailovich Yamshchikov (b. 1994), studied at the National Research Nuclear University "MEPHI". Works as research engineer. Research interests: transfer of radiation, physics of plasma, laser physics. E-mail: feynman94@yandex.ru.

Received February 9, 2021. The final version – April 21, 2021.
