

## Астигматическое преобразование краевой дислокации дробного порядка

В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, Е.Г. Абрамочкин<sup>3</sup>, А.А. Ковалёв<sup>1,2</sup>, А.Г. Налимов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,  
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,  
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34;

<sup>3</sup> Самарский филиал Физического института РАН имени П.Н. Лебедева, 443034, Самара, ул. Ново-Садовая, д. 221

### Аннотация

Теоретически показано, что астигматическое преобразование краевой дислокации (прямой линии нулевой интенсивности) порядка  $n + \alpha$  (действительное положительное число,  $n$  – целое число,  $0 < \alpha < 1$  – дробная часть числа) формирует на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы  $n$  оптических эллиптических вихрей (винтовых дислокаций) с топологическим зарядом  $-1$ , расположенных на прямой линии, перпендикулярной краевой дислокации, в точках, координаты которых являются нулями функции Трикоми. На некотором расстоянии от этих вихрей и на той же прямой формируется еще один дополнительный вихрь также с топологическим зарядом  $-1$ , который удаляется на периферию, если  $\alpha$  уменьшается до нуля, или приближается к  $n$  вихрям, если  $\alpha$  стремится к 1. Кроме того, на периферии в сечении пучка формируется счетное число оптических вихрей (нулей интенсивности), все с топологическим зарядом  $-1$ , которые расположены на расходящихся кривых линиях (типа гипербол), равноудаленных от прямой линии, на которой расположены основные  $n$  нулей интенсивности. Эти «провожающие» вихри приближаются к центру пучка, следуя за дополнительным вихрем «пассажиром», если  $0 < \alpha < 0,5$ , или удаляются на периферию, оставив «пассажира» рядом с основными вихрями, если  $0,5 < \alpha < 1$ . При  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$  «провожающие» вихри находятся на бесконечности. Топологический заряд всего пучка при дробном  $n + \alpha$  бесконечный. Моделирование подтверждает теоретические выводы.

**Ключевые слова:** астигматическое преобразование, дробный порядок, краевая дислокация, винтовая дислокация, эллиптический оптический вихрь.

**Цитирование:** Котляр, В.В. Астигматическое преобразование краевой дислокации дробного порядка / В.В. Котляр, Е.Г. Абрамочкин, А.А. Ковалёв, А.Г. Налимов // Компьютерная оптика. – 2022. – Т. 46, № 4. – С. 522-530. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1084.

**Citation:** Kotlyar VV, Abramochkin EG, Kovalev AA, Nalimov AG. Astigmatic transformation of a fractional-order edge dislocation. Computer Optics 2022; 46(4): 522-530. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1084.

### Введение

Астигматические преобразования лазерных пучков в оптике хорошо известны. Первой работой по астигматическому конвертору была работа Абрамочкина и Волостникова [1], в которой показано, как с помощью астигматического конвертора безвихревой пучок Эрмита–Гаусса (ЭГ) преобразуется в вихревой пучок Лагерра–Гаусса (ЛГ). В этой работе пучок Эрмита–Гаусса  $(n, m)$  преобразуется в моду Лагерра–Гаусса  $(n, m - n)$ , если  $m > n$ , с помощью двух цилиндрических линз. Позже во многих работах изучалось преобразование различных лазерных пучков с помощью астигматических преобразований. Так, в [2, 3] изучалось прохождение пучка Эрмита–Гаусса через  $4 \times 4$  оптическую систему, в том числе с астигматизмом. В [4] рассмотрено прохождение пучков Эрмита–Лагерра–Гаусса через астигматический модовый конвертор. В [5, 6] исследовалась фокусировка астигматической линзой оптического вихря высокого порядка. Преобразования астигматического  $\sin$ -Гауссова

пучка в нелинейной среде рассматривались в [7]. В [8, 9] исследовалось астигматическое модовое преобразование внутри лазерного резонатора. Оптические эллиптические Гауссовы вихри с астигматической фазой рассматривались ранее в [10, 11]. В [10] рассматривалось преобразование пучка Эрмита–Гаусса порядка  $(0, n)$  с помощью повернутой цилиндрической линзы. В [11] рассмотрен модовый пучок, у которого канонический оптический вихрь с топологическим зарядом (ТЗ), равным  $n$ , внедренный в эллиптический астигматический Гауссов пучок, сохраняется при распространении и не расщепляется на простые оптические вихри. В [12] изучалось распространение эллиптических оптических вихрей. Измерять топологический заряд оптического вихря с помощью астигматического преобразования предложено в [13]. В [14] был исследован астигматический вихревой пучок Эрмита–Гаусса.

С другой стороны, известны также работы, в которых рассматривалось поведение винтовых [15] и краевых дислокаций в оптических системах. Так, в

[16] изучалась эволюция смеси краевой (осевой) и винтовой дислокаций при распространении в свободном пространстве. В частности, было показано, что комбинированный оптический вихрь имеет дробный топологический заряд. В [17–20] исследовалось взаимодействие оптического вихря (винтовой дислокации) и краевой поперечной дислокации (линии нулевой интенсивности), внедренных в Гауссов пучок. Было показано, что такое взаимодействие приводит к расщеплению краевой дислокации и формированию дополнительных оптических вихрей.

В недавней работе [21] мы показали, что астигматическое преобразование краевой дислокации  $n$ -го порядка ( $n$  – целое число) приводит к формированию на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы  $n$  эллиптических оптических вихрей (винтовых дислокаций) с единичным топологическим зарядом, которые расположены на одной прямой, перпендикулярной линии краевой дислокации, и координаты которых пропорциональны корням многочлена Эрмита  $n$ -го порядка. В данной работе мы обобщим этот результат, рассматривая астигматическое преобразование краевой дислокации не целого, а дробного порядка  $\nu$ , где  $\nu$  – действительное число. Отметим, что формирование оптического вихря с начальным дробным топологическим зарядом было рассмотрено в работе Берри [22]. При этом оптический вихрь описывался в виде бесконечного ряда по ОАМ-модам или угловым гармоникам с целыми топологическими зарядами. В [22] также было показано, что к основным оптическим вихрям добавляется счетное число дополнительных оптических вихрей с единичными топологическими зарядами и чередующимися знаками (отель Гильберта [23]). Поэтому полный топологический заряд пучка остается конечным. Известен и альтернативный подход к изучению оптических вихрей с дробным топологическим зарядом [24], когда начальный оптический вихрь с амплитудой  $\exp(i\nu\varphi)$ , где  $\varphi$  – полярный угол в сечении пучка, рассматривается не самостоятельно, а умножается на плоскую волну, наклон которой к оптической оси пропорционален полярному углу, и суммируется по полярному углу:

$$E_\nu(r, \theta) = \int_0^{2\pi} \exp(i\nu\varphi - ikr \cos(\varphi - \theta)) d\varphi.$$

Данная работа существенно отличается от работы Берри [22], так как все бесконечное множество дополнительных оптических вихрей удается представить в замкнутом виде с помощью функции Трикоми, причем топологический заряд пучка, порожденного дробной краевой дислокацией, бесконечен. Данная работа также отличается от работы [24]. В работе [24] получено выражение в виде конечной суммы из Гамма-функций, которое описывает амплитуду пучка Гамма-Гаусса только с полуцелым параметром  $\nu$ . И полученное решение в [24] описывает распространение начального пучка  $E\nu(r, \theta)$ , а не  $\exp(i\nu\varphi)$ .

В данной работе мы теоретически и численно показываем, что вертикальная краевая дислокация дробного  $\nu$ -го порядка ( $\nu = n + \alpha$ ,  $n$  – целая часть числа,  $0 \leq \alpha < 1$  – дробная часть числа), внедренная в перетяжку Гауссова пучка, после цилиндрической линзы, расположенной в перетяжке и повернутой на  $45^\circ$  к осям, «распадается» на  $n$  изолированных нулей интенсивности (винтовых дислокаций), вокруг которых формируются  $n$  эллиптических оптических вихрей с топологическим зарядом  $-1$ , лежащих на прямой, перпендикулярной краевой дислокации, и расположенных в точках, координаты которых являются корнями функции Трикоми. Однако кроме этих «основных» винтовых дислокаций, есть еще один «дополнительный» оптический вихрь, лежащий на той же прямой, что и «основные», но на некотором расстоянии от них. Этот дополнительный вихрь мы назвали «пассажиrom», так как он, когда  $\alpha$  приближается к 1, стремится присоединиться к основным оптическим вихрям. «Пассажира» сопровождает бесконечное множество «провожающих» оптических вихрей с единичным топологическим зарядом одного знака. Эти «провожающие» вихри не лежат на той прямой, где находятся основные вихри и дополнительный вихрь-пассажир. Они лежат на расходящихся кривых, расположенных над и под прямой линией с основными вихрями. Мы назвали эти вихри «провожающими», поскольку в процессе изменения  $\nu = n + \alpha \in [n, n + 1]$  они вместе с «пассажиrom» приближаются к основным вихрям, если значение  $\alpha$  растёт от 0 до некоторого  $\alpha_0$  (момент расставания), и удаляются без «пассажира» от основных вихрей, если  $\alpha$  продолжает расти от  $\alpha_0$  до 1. Если  $\alpha = 0$ , то «пассажир» и «провожающие» находятся на бесконечности. Если  $\alpha = 1$ , то на бесконечности находятся только «провожающие», а «пассажир» располагается рядом с основными вихрями. На следующей стадии  $\nu \in [n + 1, n + 2]$  бывший «пассажир» уже входит в число основных вихрей (их число теперь равно  $n + 1$ ), и «провожды» повторяются уже для нового «пассажира».

### 1. Комплексная амплитуда поля с краевой дислокацией дробного порядка

Рассмотрим краевую дислокацию, внедренную в перетяжку Гауссова пучка с астигматической фазой. То есть в плоскости перетяжки Гауссова пучка с краевой дислокацией  $\nu$ -го порядка, которая проходит через центр и совпадает с вертикальной осью, расположена идеальная тонкая цилиндрическая линза, образующая которой повернута в плоскости перетяжки на  $45^\circ$  к осям координат. Комплексная амплитуда такого светового поля в начальной плоскости имеет вид:

$$E(x, y, z = 0) = \left(\frac{x}{w}\right)^\nu \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2} - \frac{ik}{4f}(x + y)^2\right), \quad (1)$$

где  $k$  – волновое число света,  $w$  – радиус перетяжки Гауссова пучка,  $(x, y)$  – поперечные декартовы коор-

динаты,  $z$  – продольная координата вдоль оптической оси и  $f$  – фокусное расстояние цилиндрической линзы. Второе слагаемое в показателе экспоненты в (1) описывает распределение фазы цилиндрической линзы с параболическим профилем, расположенной под углом  $45^\circ$  к осям  $x$  и  $y$ . Заметим, что пучок (1) не является структурно-устойчивым, так как в нем аргумент (без учета Гауссовой экспоненты) не имеет вид  $x + iy$  или  $x - iy$  [25].

Комплексная амплитуда светового поля (1) на расстоянии  $z$ , найденная с помощью преобразования Френеля, имеет вид:

$$E(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\sigma(\sigma - 2\gamma Z)}} \left( \frac{Z(\sigma - \gamma Z)}{i\sigma(\sigma - 2\gamma Z)} \right)^{v/2} \times \exp\left(-\frac{X^2 + Y^2}{\sigma} - \frac{i\gamma(X + Y)^2}{\sigma(\sigma - 2\gamma Z)}\right) \times \Psi\left[\frac{-v}{2}, \frac{1}{2}, \frac{i(\sigma - \gamma Z)}{\sigma Z(\sigma - 2\gamma Z)} \left(X + \frac{\gamma Z Y}{(\sigma - \gamma Z)}\right)^2\right], \quad (2)$$

где  $X = x/w$ ,  $Y = y/w$ ,  $Z = z/z_0$  – безразмерные переменные,  $z_0 = kw/2$  – длина Рэлея,  $\sigma = 1 + iZ$ ,  $\gamma = z_0/(2f)$  – вспомогательные параметры и  $\Psi(a, b, s)$  – функция Трикоми [26]:

$$\Psi(a, b, s) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1+a-b)} \cdot {}_1F_1(a, b, s) + \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} s^{1-b} \cdot {}_1F_1(1+a-b, 2-b, s). \quad (3)$$

Здесь  $\Gamma(a)$  – гамма-функция и  ${}_1F_1(a, b, s)$  – гипергеометрическая функция Куммера [26]:

$${}_1F_1(a, b, s) = M(a, b, s) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(b+n)} \cdot \frac{s^n}{n!}. \quad (4)$$

Таким образом, в нашем случае функция Трикоми будет иметь вид:

$$\Psi\left(\frac{-v}{2}, \frac{1}{2}, s\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}(1-v))} \cdot {}_1F_1\left(\frac{-v}{2}, \frac{1}{2}, s\right) - \frac{2\sqrt{\pi}s}{\Gamma(-\frac{1}{2}v)} \cdot {}_1F_1\left(\frac{1-v}{2}, \frac{3}{2}, s\right). \quad (5)$$

В частности, если  $v = n$  – целое неотрицательное число, то функция Трикоми сводится к полиному Эрмита [26]:

$$\Psi\left(\frac{-n}{2}, \frac{1}{2}, s\right) = 2^{-n} H_n(\sqrt{s}). \quad (6)$$

Заметим, что комплексная амплитуда (2) является точным решением параксиального уравнения Гельмгольца, так как преобразование Френеля является интегральной формой решения этого уравнения.

## 2. Комплексная амплитуда поля на двойном фокусном расстоянии

На двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы ( $z = 2f$ ) выражение (2) упрощается, поскольку  $\gamma Z = 1$ :

$$E(x, y, 2f) = \gamma \left( \frac{i}{\sqrt{1+\gamma^2}} \right)^{v+1} \times \exp\left[\left[\frac{-\gamma^2}{1+\gamma^2} + i\gamma\right] \frac{x^2 + y^2}{w^2} + \frac{i\gamma^3}{1+\gamma^2} \cdot \frac{2xy}{w^2}\right] \times \Psi\left(\frac{-v}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\gamma^2}{1+\gamma^2} \cdot \frac{(x-i\gamma y)^2}{w^2}\right). \quad (7)$$

В частном случае  $v = n$ , где  $n$  – целое неотрицательное число, это выражение совпадает с формулой, полученной ранее в [21]:

$$E(\xi, \eta, z = 2f) = \left( \frac{i^{n+1} \gamma}{2^n (1+\gamma^2)^{(n+1)/2}} \right) \exp\left(-\frac{\gamma^2(\xi^2 + \eta^2)}{w^2(1+\gamma^2)} + \frac{i\gamma(\xi^2 + \eta^2) + \frac{2i\gamma^3 \xi \eta}{w^2(1+\gamma^2)}}{w^2(1+\gamma^2)}\right) H_n\left[\frac{\gamma(\xi - i\gamma\eta)}{w\sqrt{1+\gamma^2}}\right]. \quad (8)$$

В (8) вместо функции Трикоми стоит многочлен Эрмита с комплексным аргументом, так как имеет место выражение (6). Можно убедиться, что выражение (8) при  $v = n$  совпадает с уравнением (7) из [21]. Это означает, что когда порядок краевой дислокации  $v = n$  становится целым положительным числом, то в сечении пучка на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы формируются на горизонтальной оси  $n$  эллиптических винтовых дислокаций (оптических вихрей) с топологическим зарядом  $-1$ . Чтобы топологический заряд этих вихрей был равен  $+1$ , следует в (1) использовать цилиндрическую линзу с пропусканием  $\exp(-ik/4f)(x-y)^2$ , то есть повернуть линзу на  $90$  градусов.

## 3. Нули функций Куммера и Трикоми

Асимптотика функции Трикоми (5), которая входит как множитель в амплитуду поля (7), имеет вид [26]:

$$\Psi\left(-\frac{v}{2}, \frac{1}{2}, \zeta^2\right) \approx \zeta^v \left(1 - \frac{v(v-1)}{4\zeta^2} + \frac{v(v-1)(v-2)(v-3)}{16\zeta^4} - \dots\right), \quad (9)$$

$\zeta \gg 1,$

где

$$\zeta^2 = \frac{\gamma^2}{w^2(1+\gamma^2)} (x - i\gamma y)^2.$$

Из (9) видно, что, во-первых, функция Трикоми расходуется как степень  $\nu$  комплексного аргумента  $\zeta$ , а, во-вторых, при больших значениях  $\zeta$  функция Трикоми как будто имеет в начале координат нуль, вырожденный  $\nu$ -кратно. Приравняв к нулю два первых слагаемых в (13), получим, что на горизонтальной оси имеется дополнительный  $(n+1)$ -й нуль функции Трикоми, примерная координата которого находится из соотношения:

$$\xi_\nu \approx \frac{w\sqrt{1+\gamma^2}}{2\gamma} \sqrt{\nu(\nu-1)}, \quad \nu \gg 1. \tag{10}$$

Из (10) следует, что примерная координата дополнительного нуля на горизонтальной оси совпадает с выражением для крайнего положительного корня многочлена Эрмита из (8):

$$\xi_n \approx \frac{w\sqrt{1+\gamma^2}}{2\gamma} \sqrt{n(n-1)}. \tag{11}$$

Корни многочлена Эрмита попарно симметричны относительно начала координат, и корни многочлена  $H_n$  перемежаются с корнями многочлена Эрмита  $H_{n+1}$ . Поэтому так как  $n < \nu < (n+1)$ , то корень (10) должен находиться между крайними нулями многочленов Эрмита  $H_n$  и  $H_{n+1}$ .

При больших значениях дробного порядка краевой дислокации  $\nu \gg 1$  функция Трикоми (5) имеет другую асимптотику на горизонтальной оси [26]:

$$\Psi\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, \bar{x}^2\right) \approx \pi^{-1/2} \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \frac{e^{\bar{x}^2/2}}{\bar{x}} \times \cos\left(\bar{x}\sqrt{1+2\nu} - \frac{\nu\pi}{2}\right), \quad \nu \gg 1, \tag{12}$$

где  $\bar{x} = \gamma x / (w\sqrt{1+\gamma^2})$ . Из (12) следует приближенное выражение для корней функции Трикоми, как нулей косинуса:

$$\bar{x}_p = \frac{\pi w\sqrt{1+\gamma^2}}{2\gamma\sqrt{2\nu+1}} (\nu + p + 1). \tag{13}$$

Выражение (13) для положительных координат нулей функции совпадает с выражением для нулей функции Куммера, которые определяются через нули функции Бесселя с номером  $(-1/2)$  и для функции Куммера вида

$$M\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, \bar{x}^2\right)$$

равны примерно [26]:

$$\bar{x}_p = \frac{\pi w\sqrt{1+\gamma^2}}{2\gamma\sqrt{2\nu+1}} (2p-1). \tag{14}$$

В этих почти совпадающих координатах корней функций Куммера (14) и Трикоми (13) не видно, что у

этих функций на горизонтальной оси конечное число нулей, и нельзя ничего сказать про нули этих функций, не лежащих на горизонтальной оси. Чтобы найти нули функции Куммера, лежащие не на горизонтальной оси, надо знать комплексные корни. Приравняем комплексный аргумент функции Куммера в (4) к комплексному значению корня. Асимптотика комплексных корней функции Куммера получена в [27] и была использована в работе [28], в которой исследовался асимметричный пучок Куммера:

$$M(a, c, \gamma_p) = 0, \quad \gamma_p \approx 2\pi ip + \left(1 + \frac{c-2a}{2\pi ip}\right) \times \left[ (c-2a) \log 2\pi|p| + \log \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c-a)} \pm i \frac{\pi}{2} (c-2) \right] + \frac{2a(a-c)-c}{2\pi ip} + O\left(\frac{\log|p|}{p^2}\right), \quad p \rightarrow \pm\infty. \tag{15}$$

Из (15) для двух функций Куммера, которые как слагаемые входят в выражение для функции Трикоми (5), получим реальные  $a_p$  и мнимые  $b_p$  координаты корней при больших номерах  $p \gg 1$ :

$$\left\{ \begin{aligned} a_p &\approx \left(\frac{1}{2} + \nu\right) \ln(2\pi|p|) + \ln\left(\frac{\Gamma(-\nu/2)}{\Gamma(1/2 + \nu/2)}\right) \mp \frac{3(1+2\nu)}{16p}, \\ b_p &\approx 2\pi p - \frac{\nu(\nu+1)-1}{4\pi p} \mp \frac{3\pi}{4} - \frac{(2\nu+1)}{4\pi p} \times \left[ \left(\frac{1}{2} + \nu\right) \ln(2\pi|p|) + \ln\left(\frac{\Gamma(-\nu/2)}{\Gamma(1/2 + \nu/2)}\right) \right], \end{aligned} \right. \tag{16}$$

для функции Куммера  $M\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, \zeta^2\right)$  и

$$M(a, c, \gamma_p) = 0, \quad \gamma_p \approx 2\pi ip + \left(1 + \frac{c-2a}{2\pi ip}\right) \times \left[ (c-2a) \log 2\pi|p| + \log \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c-a)} \pm i \frac{\pi}{2} (c-2) \right] + \frac{2a(a-c)-c}{2\pi ip} + O\left(\frac{\log|p|}{p^2}\right), \quad p \rightarrow \pm\infty. \tag{15}$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_p &\approx \left(\frac{1}{2} + \nu\right) \ln(2\pi|p|) + \ln\left(\frac{\Gamma(1/2 - \nu/2)}{\Gamma(1 + \nu/2)}\right), \\ b_p &\approx 2\pi p - \frac{(\nu+2)(\nu-1)-3}{4\pi p} \mp \frac{\pi}{4} - \frac{(2\nu+1)}{4\pi p} \times \left[ \left(\frac{1}{2} + \nu\right) \ln(2\pi p) + \ln\left(\frac{\Gamma(1/2 - \nu/2)}{\Gamma(1 + \nu/2)}\right) \right], \end{aligned} \right. \tag{17}$$

для другой функции Куммера  $M\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}, \zeta^2\right)$

из (5). При больших номерах нулей ( $p \gg 1$ ), то есть для нулей, находящихся не на горизонтальной оси и на периферии в сечении пучка, из (16) и (17) следует одинаковая асимптотика для обеих функций Куммера, входящих в (5), и, значит, асимптотика нулей для функции Трикоми:

$$\begin{cases} a_p \approx \left(\frac{1}{2} + \nu\right) \ln(2\pi p), \\ b_p \approx 2\pi p. \end{cases} \quad (18)$$

Выражение (18) справедливо, если  $\nu$  дробное, так как если  $\nu = 2k$  целое четное, то гамма-функция в числителе под знаком логарифма в (16) становится бесконечно большой  $\Gamma(-k) \rightarrow \infty$  и все корни, не лежащие на горизонтальной оси, «уходят» на бесконечность. Если  $\nu = 2k + 1$  целое нечетное, то гамма-функция под знаком логарифма в (17) становится бесконечно большой  $\Gamma(-k) \rightarrow \infty$  и все корни, не лежащие на горизонтальной оси, также «уходят» на бесконечность. Заметим, что так как аргумент функции Трикоми в (7) имеет вид  $x - i\gamma y$ , то в окрестности всех ее нулей имеют место эллиптические фазовые сингулярности с топологическим зарядом  $-1$ .

Из (18) следует зависимость декартовых координат периферийных корней функции Трикоми от параметров задачи ( $w, \nu, \gamma$ ) и от номера корня  $p$ :

$$\begin{cases} x_p^2 - y_p^2 = \frac{w(1+\gamma)}{\gamma^2} \left(\frac{1}{2} + \nu\right) \ln(2\pi|p|), \\ x_p y_p = -\frac{\pi w(1+\gamma)}{\gamma^2} p. \end{cases} \quad (19)$$

Из (19) следует, во-первых, что с увеличением  $\nu$  периферийные нули, не лежащие на горизонтальной оси, удаляются от начала координат, так как растет  $x_p$ . Во-вторых, так как правая часть первого уравнения в (19) положительная, то  $x_p > y_p$ . То есть периферийные нули интенсивности в сечении пучка с ростом номера  $p$  удаляются от оси абсцисс, но лежат ниже диагонали первого и четвертого квадрантов ( $x_p > 0$ ). В (19) в первом уравнении мы поставили модуль номера  $p$ , так как под знаком логарифма должно быть положительное число, а во втором уравнении (19) номер  $p$  входит без знака модуля. Из первого уравнения (19) следует, что периферийные нули попарно симметричны относительно горизонтальной оси координат и при положительных, и при отрицательных значениях  $x$ . А из второго уравнения следует, что при положительной абсциссе ( $x_p > 0$ ) нули с положительными номерами ( $p > 0$ ) имеют отрицательные ординаты ( $y_p < 0$ ), а нули амплитуды с отрицательными номерами ( $p < 0$ ) имеют положительные ординаты ( $y_p > 0$ ). При отрицательных значениях абсцисс нулей ( $x_p < 0$ ) номера меняются местами: положительные номера  $p$  сверху, а отрицательные – снизу.

#### 4. Результаты моделирования

Для проверки правильности расчетов сначала были получены фазы светового поля (8) с целым номером  $n = 5$  в начальной плоскости (рис. 1а) по формуле (1) и на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы ( $z = 2f$ ): с помощью интеграла Рэлея–Зоммерфельда (рис. 1б), преобразования Френеля (рис. 1в) и с помощью формулы (8) (рис. 1г). Параметры расчета: длина волны  $\lambda = 532$  нм, фокусное расстояние цилиндрической линзы  $f = 1$  м, размер поля для расчета  $6 \times 6$  мм ( $300 \times 300$  отсчетов), радиус перетяжки Гауссова пучка  $w = 500$  мкм.

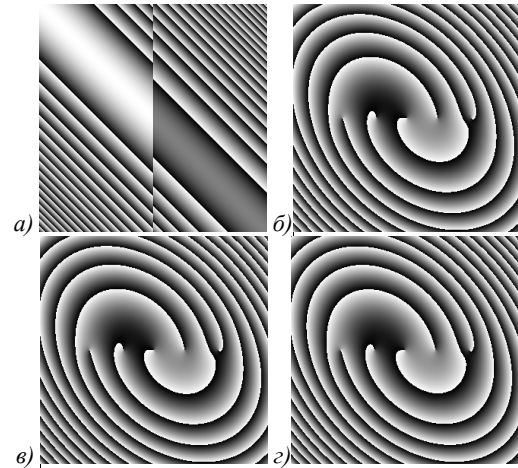


Рис. 1. Распределения фазы поля (8) в начальной плоскости (а) и на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы, рассчитанные с помощью интеграла Рэлея–Зоммерфельда (б), интегрального преобразования Френеля (в) и аналитической формулы (8)(г). Размеры изображений –  $6 \times 6$  мм

На рис. 1а краевая дислокация в виде скачка фазы на  $\pi$  проходит вертикально в центре распределения фазы. Если бы степень  $\nu$  была дробной, то скачок фазы на краевой дислокации был бы отличен от  $\pi$ .

Из рис. 1 видно, что все 3 распределения фазы (б–г) согласуются между собой и имеют 5 винтовых дислокаций (оптических вихрей), центры которых лежат на горизонтальной оси.

На рис. 2 показаны распределения фазы, рассчитанные по формуле (7) с помощью функции Трикоми для целого значения  $\nu = 5$  (рис. 2а) и для дробного значения  $\nu = 5,1$  (рис. 2б). Параметры расчета те же, что и на рис. 1, только размер поля расчета в 2 раза больше. Из сравнения рис. 1б–г и рис. 2а видно, что формулы (8) и (7) дают аналогичные результаты: на горизонтальной оси находятся 5 винтовых дислокаций ( $\nu = 5$ ). На рис. 2б видно, что при небольшой дробной части номера начальной краевой дислокации ( $\nu = 5,1$ ) справа и слева от уже имеющихся основных 5 дислокаций с топологическим зарядом  $-1$  в центре появляется множество дополнительных винтовых дислокаций также с топологическим зарядом  $-1$ . Первая

(ближайшая к центру справа) из дополнительных дислокаций лежит на горизонтальной оси и «готовится» стать 6-й дислокацией, когда дробная часть станет близка к 1. На рис. 2в показана амплитуда поля (7), фаза которого показана на рис. 2а. Видны только 3 центральных нуля амплитуды, лежащих на горизонтальной оси, других нулей не видно, но их местонахождение можно узнать из распределения фазы на рис. 2а. На рис. 3 показаны аналогичные распределения фазы поля (7) при  $\nu=6,5$  (а) и  $\nu=7,5$  (б). Остальные параметры те же, что и на рис. 2. Как можно заметить, первый из дополнительных вихрей приблизился к начальным 6 вихрям (рис. 3а) и начальным 7 вихрям (рис. 3б).

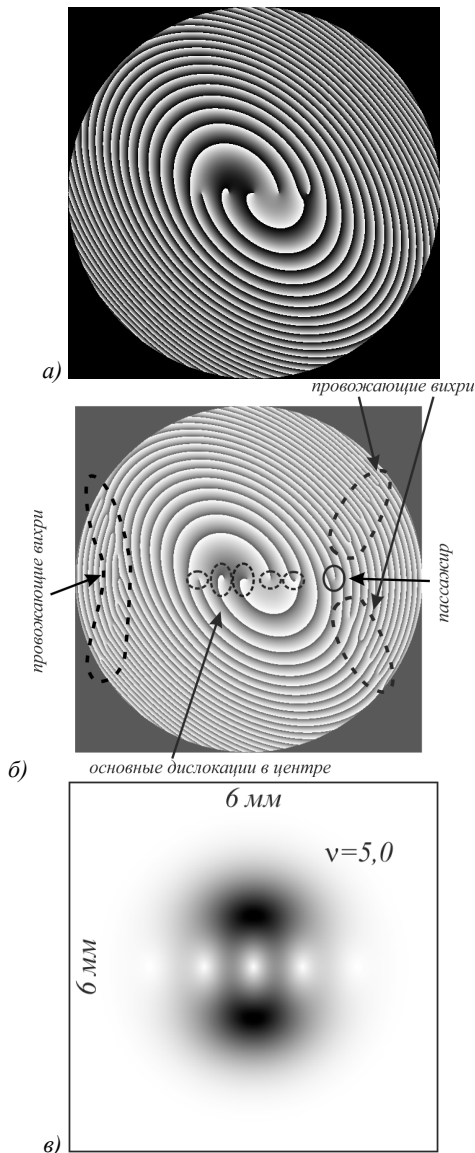


Рис. 2. Распределение фазы светового поля (1) на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы ( $z = 2f = 2\text{м}$ ), рассчитанное по формуле (7) для  $\nu = 5$  (а) и  $\nu = 5,1$  (б), и распределение амплитуды (в) для пучка с фазой (а) (негатив). Размер кадров –  $12 \times 12$  мм ( $600 \times 600$  отсчетов), длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки Гауссова пучка  $w = 500$  мкм

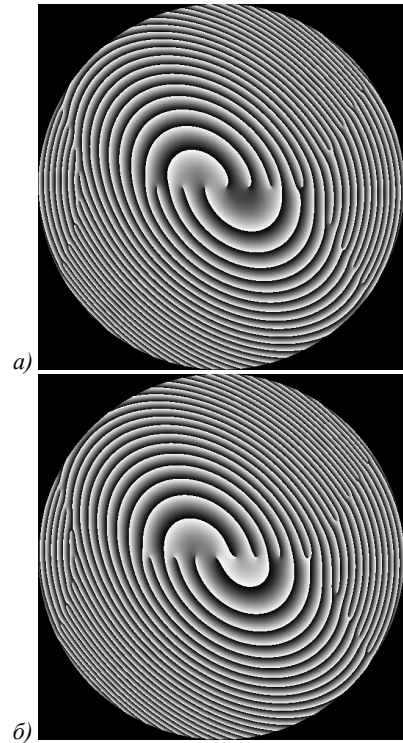


Рис. 3. Распределение фазы светового поля (1) на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы ( $z = 2f = 2\text{м}$ ), рассчитанное по формуле (7) для разных  $\nu$ : 6,5 (а) и 7,5 (б). Размер кадров –  $12 \times 12$  мм ( $600 \times 600$  отсчетов), длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки Гауссова пучка  $w = 500$  мкм

Из рис. 4 видно, что 6-я дислокация (дополнительная, или «пассажир»), которая появляется на рис. 2б, с ростом дробной части приближается к 5 основным дислокациям, которые видны на рис. 2а.

На рис. 5 показаны распределения фазы, когда дробное число  $\nu$  приближается к следующему целому числу 6 (т.е.  $\alpha$  приближается к 1), где видно, что дислокации в правой части фазы начинают «удаляться» на периферию. Так, при  $\nu = 5,9$  справа можно увидеть местоположения 4 вихрей. При  $\nu = 5,99$  справа видны только две дислокации, при  $\nu = 5,999$  эти дислокации прижимаются к правой стороне рисунка, а при  $\nu = 6$  дислокаций справа уже нет.

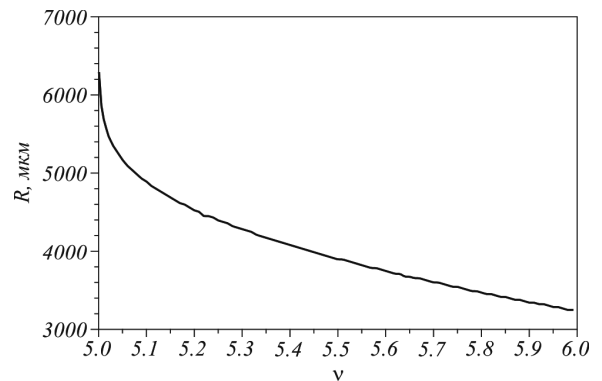


Рис. 4. График зависимости расстояния в микронах от центра до центра 6-й дислокации от величины дробной части  $\nu$  в диапазоне  $5 < \nu < 6$

Таким образом, при малой величине  $\alpha$  появляются дополнительные дислокации: ближайшая к центру на горизонтальной оси (дополнительный вихрь, «пассажир»), а остальные «провожающие» смещены вверх и вниз от горизонтальной оси. При увеличении  $\alpha$  (примерно до 0,5) все дополнительные дислокации («пассажир» и «провожающие») приближаются к центру. При дальнейшем увеличении  $\alpha$  первая дислокация на горизонтальной оси (пассажир) остается рядом с 5 основными дислокациями, а «провожающие» дислокации постепенно удаляются на периферию. И при  $v=6$  их не видно в кадре.

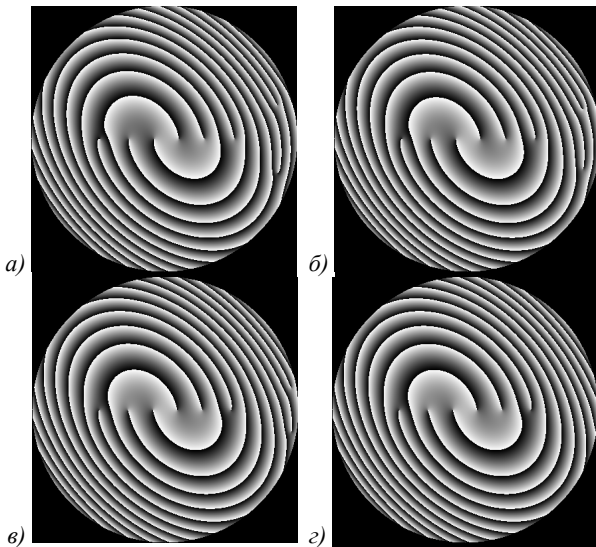


Рис. 5. Распределения фазы, аналогичные тем, что показаны на рис. 1,2, рассчитанные с помощью преобразования Френеля для дробных значений  $v$ : 5,9 (а), 5,99 (б), 5,999 (в), 6 (г). Размеры кадров – 8,7×8,7 мм (435×435 отсчетов)

### 5. Обсуждение результатов

Заметим, что в уравнении (7) дробное число  $v$  входит только в константу, стоящую перед экспонентой, и функцию Трикоми, как первый параметр. Поэтому за появление дополнительных дислокаций и их динамику при изменении дробной части числа  $v$  отвечает только функция Трикоми. Из (7) видно, что оптические вихри будут формироваться в тех нулях функции Трикоми, которые лежат на горизонтальной оси, так как при  $y=0$ , аргумент функции Трикоми становится действительным. Мы показали, что если порядок краевой дислокации целый,  $v=n$ , то нули функции Трикоми совпадают с действительными нулями многочлена Эрмита  $H_n(x)$ , которые расположены на горизонтальной оси в сечении пучка (8). Из асимптотики функции Трикоми (9) мы получили примерные координаты дополнительного  $(n+1)$ -го нуля интенсивности на горизонтальной оси (10). Поэтому так как  $n < v < (n+1)$ , то дополнительный ноль (10), так как его координата совпадает по форме с координатой крайнего нуля многочлена Эрмита, должен

находиться между крайними нулями многочленов Эрмита  $H_n$  и  $H_{n+1}$ . Далее на основе асимптотики комплексных нулей двух функций Куммера (15), которые входят как слагаемые в функцию Трикоми (5), мы получили асимптотику периферийных нулей функции Трикоми (18). Из (18) следуют асимптотические формулы (19) для координат  $(x, y)$  счетного числа оптических вихрей, которые лежат не на горизонтальной оси (где находятся основные  $n$  вихрей и дополнительный  $(n+1)$ -й вихрь), а расположены попарно симметрично над и под горизонтальной осью, и становятся от нее все дальше с увеличением номера нуля. Все оптические вихри (основные, дополнительный и не лежащие на горизонтальной оси) имеют топологический заряд -1. Из (16) и (17) следует, что если  $v$  стремится к целому числу, то все оптические вихри, не лежащие на горизонтальной оси, «уходят» на бесконечность.

### Заключение

Теоретически и численно мы определили динамику формирования картины нулей интенсивности и связанных с ними оптических вихрей (винтовых дислокаций) в случае астигматического преобразования краевой дислокации (прямой вертикальной линии нулевой интенсивности)  $v$ -го порядка ( $v=n+\alpha$  – действительное положительное число,  $n$  – целое число,  $0 < \alpha < 1$  – дробная часть числа  $v$ ). Астигматическое преобразование выполняется с помощью цилиндрической линзы, наклоненной под углом  $45^\circ$ . Мы показали, что на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы формируются  $n$  оптических эллиптических вихрей с топологическим зарядом -1, расположенных на прямой линии, перпендикулярной краевой дислокации, в точках, координаты которых являются нулями функции Трикоми. Если  $\alpha=0$  или  $\alpha=1$ , то нули функции Трикоми совпадают с нулями многочленов Эрмита  $n$ -го и  $(n+1)$ -го порядков. На некотором расстоянии от основных  $n$  вихрей на той же прямой формируется еще один, дополнительный вихрь также с топологическим зарядом -1, который удаляется на периферию, если  $\alpha$  стремится к 0, или приближается к  $n$  основным вихрям, если  $\alpha$  стремится к 1. С помощью асимптотического выражения для нулей функции Трикоми показано, что на периферии в сечении пучка формируется счетное число нулей интенсивности (или оптических вихрей с топологическим зарядом -1), которые располагаются на 4 расходящихся кривых линиях типа гипербол, равноудаленных от прямой линии, где находятся основные  $n$  нулей интенсивности. Эти «провожающие» вихри приближаются к центру пучка, следуя за дополнительным вихрем «пассажиром», если  $0 < \alpha < 0,5$ , и удаляются на периферию, оставив «пассажира» рядом с основными вихрями, если  $0,5 < \alpha < 1$ . При  $\alpha=0$  и  $\alpha=1$  «провожающие» вихри находятся на бесконечности. Теоретические выводы согласуются с резуль-

татами моделирования. Моделирование проводилось тремя независимыми способами: с помощью преобразования Френеля, интегралов Рэлея–Зоммерфельда и с помощью полученной аналитической формулы для комплексной амплитуды светового поля, выраженной через функцию Трикоми. Все три способа дают почти одинаковые результаты.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда: (грант 22-22-00265) параграфы «Комплексная амплитуда поля с краевой дислокацией дробного порядка», «Комплексная амплитуда поля на двойном фокусном расстоянии», «Нули функций Куммера и Трикоми», а также Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (параграф «Результаты моделирования», «Обсуждение результатов»).

### References

- [1] Abramochkin E, Volostnikov V. Beam transformations and nontransformed beams. *Opt Commun* 1991; 83(1-2): 123-135. DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.
- [2] Lu B, Wu P. Analytical propagation equation of astigmatic Hermite-Gaussian beams through a 4x4 paraxial optical systems and their symmetrizing transformation. *Opt Laser Technol* 2003; 35: 497-504.
- [3] Chen YF, Chay CC, Lee CY, Tung JC, Liang HC, Huang KT. Characterizing the propagation evolution of wave patterns and vortex structures in astigmatic transformations of Hermite-Gaussian beams. *Laser Phys* 2017; 28: 015002.
- [4] Abramochkin EG, Razueva EV, Volostnikov VG. Hermite-Laguerre-Gaussian beams in astigmatic optical systems. *Proc SPIE* 2008; 7009: 70090M. DOI: 10.1117/12.793382.
- [5] Bekshaev AY, Soskin MS, Vasnetsov MV. Transformation of higher-order optical vortices upon focusing by an astigmatic lens. *Opt Commun* 2004; 241: 237-247.
- [6] Bekshaev AY, Karamoch AI. Astigmatic telescopic transformation of a high-order optical vortex. *Opt Commun* 2008; 281: 5687-5696.
- [7] Zhu K, Zhu J, Su Q, Tang H. Propagation properties of an astigmatic sin-Gaussian beam in strongly nonlocal nonlinear media. *Appl Sci* 2019; 9: 71.
- [8] Huang TD, Lu TH. Large astigmatic laser cavity modes and astigmatic compensation. *Appl Phys B* 2018; 124: 72.
- [9] Pan J, Shen Y, Wan Z, Fu X, Zhang H, Liu Q. Index-tunable structured-light beams from a laser with an intracavity astigmatic mode converter. *Phys Rev Appl* 2020; 14: 044048.
- [10] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP, Kozlova ES. Three different types of astigmatic Hermite-Gaussian beams with orbital angular momentum. *J Opt* 2019; 21(11): 115601. DOI: 10.1088/2040-8986/ab42b5.
- [11] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Vortex astigmatic Fourier-invariant Gaussian beams. *Opt Express* 2019; 27(2): 657-666. DOI: 10.1364/OE.27.000657.
- [12] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Elliptic Gaussian optical vortices. *Phys Rev A* 2017; 95(5): 053805. DOI: 10.1103/PhysRevA.95.053805.
- [13] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge. *Appl Opt* 2017; 56(14): 4095-4104. DOI: 10.1364/AO.56.004095.
- [14] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Vortex Hermite-Gaussian laser beams. *Opt Lett* 2015; 40(5): 701-704. DOI: 10.1364/OL.40.000701.
- [15] Bazhenov VYu, Soskin MS, Vasnetsov MV. Screw dislocations in light wavefronts. *J Mod Opt* 1992; 39(5): 985-990.
- [16] Basistiy IV, Soskin MS, Vasnetsov MV. Optical wavefront dislocations and their properties. *Opt Commun* 1995; 119(5-6): 604-612.
- [17] Petrov DV. Vortex-edge dislocation interaction in a linear medium. *Opt Commun* 2001; 188: 307-312.
- [18] Petrov DV. Splitting of an edge dislocation by an optical vortex. *Opt Quantum Electron* 2002; 34: 759-773.
- [19] He D, Yan H, Lu B. Interaction of the vortex and edge dislocation embedded in a cosh-Gaussian beam. *Opt Commun* 2009; 282: 4035-4044.
- [20] Chen H, Wang W, Gao Z, Li W. Splitting of an edge dislocation by a vortex emergent from a nonparaxial beam. *J Opt Soc Am B* 2019; 36: 2804-2809.
- [21] Kotlyar VV, Kovalev AA, Nalimov AG. Converting an  $n$ th-order edge dislocation to a set of optical vortices. *Optik* 2021; 243: 167453. DOI: 10.1016/j.ijleo.2021.167453.
- [22] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. *J Opt A—Pure Appl Opt* 2004; 6: 259-268.
- [23] Gbur G. Fractional vortex Hilbert's Hotel. *Optica* 2016; 3: 222-225.
- [24] Alexeyev CN, Egorov YA, Volyar AV. Mutual transformations of fractional-order and integer-order optical vortices. *Phys Rev A* 2017; 96(6): 063807. DOI: 10.1103/PhysRevA.96.063807.
- [25] Abramochkin EG, Volostnikov VG. Spiral-type beams: optical and quantum aspects. *Opt Commun* 1996; 125(4-6): 302-323. DOI: 10.1016/0030-4018(95)00640-0.
- [26] Abramowitz M, Stegun IA. Handbook of mathematical functions: With formulas, graphs, and mathematical tables. National Bureau of Standards; 1965.
- [27] Sedletsii AM. Asymptotics of the zeros of degenerate hypergeometric functions [In Russian]. *Matematicheskie Zametki* 2007; 82(2): 262-271.
- [28] Kotlyar VV, Kovalev AA, Abramochkin EG. Kummer laser beams with a transverse complex shift. *J Opt* 2020; 22(1): 015606. DOI: 10.1088/2040-8986/ab5ef1.

### Сведения об авторах

Сведения об авторах **Котляр Виктор Викторович** и **Ковалёв Алексей Андреевич** – см. стр. 520–521 этого номера.



**Абрамочкин Евгений Григорьевич**, 1962 года рождения – доктор физико-математических наук (2006), ведущий научный сотрудник Самарского филиала Физического института им. П.Н. Лебедева РАН. Научные интересы связаны с комплексным анализом, теорией специальных функций и уравнениями математической физики.  
E-mail: [ega@fian.smr.ru](mailto:ega@fian.smr.ru).

**Налимов Антон Геннадьевич**, 1980 года рождения, окончил Самарский государственный аэрокосмический университет в феврале 2003 года по специальности «Физика». Поступил в очную аспирантуру СГАУ по специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» в 2003 году, окончил её по специальности 01.04.05 «Оптика» в 2006 году. Работает на кафедре технической кибернетики в Самарском университете в должности доцента, в ИСОИ РАН – филиале ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН в должности научного сотрудника. Кандидат физико-математических наук, соавтор 140 работ и 3 патентов.  
E-mail: [anton@ipsiras.ru](mailto:anton@ipsiras.ru).

---

*ГРНТИ: 29.31.15*

*Поступила в редакцию 9 декабря 2021 г. Окончательный вариант – 21 апреля 2022 г.*

---

---

# Astigmatic transformation of a fractional-order edge dislocation

V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, E.G. Abramochkin<sup>3</sup>, A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>, A.G. Nalimov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,  
443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151,

<sup>2</sup>Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34,

<sup>3</sup>Lebedev Physical Institute, 443034, Samara, Russia Novo-Sadovaya 221

## Abstract

It is shown theoretically that an astigmatic transformation of an edge dislocation (straight line of zero intensity) of the  $\nu$ -th order ( $\nu = n + \alpha$  is a real positive number,  $n$  is integer,  $0 < \alpha < 1$  is the fractional part of the number) forms at twice the focal length from a cylindrical lens  $n$  optical elliptical vortices (screw dislocations) with a topological charge of  $-1$ , located on a straight line perpendicular to the edge dislocation. Coordinates of these points are zeros of the Tricomi function. At some distance from these vortices and on the same straight line, another additional vortex with a topological charge of  $-1$  is also generated, which moves to the periphery if  $\alpha$  decreases to zero, or approaches  $n$  vortices if  $\alpha$  tends to 1. In addition, at the periphery in the beam cross-section, a countable number of optical vortices (intensity zeros) are formed, all with a topological charge of  $-1$ , which are located on diverging curved lines (such as hyperbolas) equidistant from a straight line on which the main  $n$  intensity zeros are located. These “accompanying” vortices approach the center of the beam, following the additional “passenger” vortex, if  $0 < \alpha < 0.5$ , or move to the periphery, leaving the “passenger” next to the main vortices, if  $0.5 < \alpha < 1$ . At  $\alpha = 0$  and  $\alpha = 1$ , the “accompanying” vortices are situated at infinity. The topological charge of the entire beam at fractional  $\nu$  is infinite. The numerical simulation confirms theoretical predictions.

**Keywords:** astigmatic transformation, fractional order, edge dislocation, screw dislocation, elliptical optical vortex.

**Citation:** Kotlyar VV, Abramochkin EG, Kovalev AA, Nalimov AG. Astigmatic transformation of a fractional-order edge dislocation. *Computer Optics* 2022; 46(4): 522-530. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1084.

**Acknowledgements:** The work was partly funded Russian Science Foundation grant #22-22-00265 (in parts “Complex amplitude of the beam with fractional order edge dislocation”, “Complex amplitude of the beam at double focal length”, “Zeros of Kummer and Tricomu functions”) and by the RF Ministry of Science and Higher Education within a state contract with the “Crystallography and Photonics” Research Center of the RAS (in parts “Simulation results”, “Discussion”).

---

## Authors' information

**Victor Victorovich Kotlyar** is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices. E-mail: [kotlyar@ipsiras.ru](mailto:kotlyar@ipsiras.ru).

**Eugeny Grigor'evich Abramochkin** (b. 1962) graduated from Kuibyshev State University (1984), majoring in Mathematical Physics. He received his Doctor's Degree in Physics in 2006. He is a leading researcher of Samara Branch of Lebedev Physical Institute of Russian Academy of Sciences. He is a co-author of nearly 50 scientific papers. His research interests include complex analysis, special functions, and mathematical physics equations. E-mail: [ega@fian.smr.ru](mailto:ega@fian.smr.ru).

**Alexey Andreevich Kovalev** (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a co-author of more than 150 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices. E-mail: [alanko@smr.ru](mailto:alanko@smr.ru).

---

**Anton Gennadyevich Nalimov** (b. 1980), graduated from Samara State Aerospace University in February, 2003. Entered in postgraduate study in 2003 on speciality 05.13.18 “Mathematical Modeling and Program Complexes”, finished it in 2006 with speciality 01.04.05 “Optics”. A.G. Nalimov works on Technical Cybernetics department in Samara National Research University as an associate professor, works as a scientist in the Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Samara, Russia. Candidate in Physics and Mathematics, coauthor of 100 papers and 3 inventions. E-mail: [anton@ipsiras.ru](mailto:anton@ipsiras.ru).

---

*Received December 9, 2021. The final version – April 21, 2022.*

---