

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ ОПТИКИ

С. Г. Бобров

АНАЛИТИЧЕСКИЙ И КОМПЬЮТЕРНЫЙ РАСЧЕТ АБЕРРАЦИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И АБЕРРАЦИИ ТОНКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Теория aberrаций высших порядков имеет многолетнюю историю и включает в себя два основных направления. Одно из них состоит в получении аналитических формул, позволяющих проводить теоретический анализ оптических систем (насколько это возможно в силу громоздкости выражений). Первые попытки в этом направлении были основаны на использовании эйконала Шварцшильда [1], а позже появилась методика расчета лучевых aberrаций [2]. Второе направление заключается в создании методик, ориентированных на численные расчеты. В подавляющем большинстве случаев рассматривались лучевые aberrации в плоскости изображения, а способы их вычисления варьировались от построения итерационной процедуры [3] до чисто компьютерной идеи операций над массивами без какой-либо детализации на промежуточных этапах [4]. Можно упомянуть также методики определения коэффициентов aberrаций по результатам прогона реальных [5] или порядковых [6] лучей.

Представляется, что аналитический подход к расчету aberrаций более универсален. С одной стороны, он обеспечивает инструмент, позволяющий исследовать зависимость выходных характеристик оптических систем от вкладов отдельных компонентов и поверхностей. В каких-то более простых случаях удается даже найти новые коррекционные решения (например, для дифракционных объективов [7]), но и для сложных систем, когда полный аналитический расчет невозможен из-за своей громоздкости уже в пятом порядке малости, исследование aberrаций хотя бы локальных частей системы может оказаться чрезвычайно плодотворным. С другой стороны, наличие расчетных формул, доведенных до конкретных соотношений для aberrационных коэффициентов, позволяет минимизировать объем вычислений и полезно даже при численных расчетах.

Существующие аналитические методики в области аберраций высших порядков [1, 2] обладают рядом недостатков. Во-первых, они ограничены пятым порядком малости. Во-вторых, и в том и в другом случае не совсем удачно выбрана основа аберрационной модели. Эйконал Шварцшильда представляет собой функцию без ясного физического истолкования. Он сконструирован таким образом, что аберрации оптической системы в различных порядках малости не зависят друг от друга при изменении положения зрачка, тогда как при сопряжении двух систем такая зависимость налицо [8]. Наличие второй системы как бы влияет на аберрации первой, что наглядно демонстрирует искусственность аберрационной функции. Что касается лучевых аберраций, то их использование не позволяет непосредственно переходить к дифракционному описанию формирования изображения, что также не очень удобно. В целом, по мнению автора, в сложившейся ситуации оправданы усилия, направленные на создание еще одной аналитической методики расчета аберраций высших порядков оптических систем.

Предлагаемая модель основана на аберрационной функции, введенной и обоснованной в работах [9, 10]. Если внутри оптической системы задана какая-либо поверхность, то для любой ее точки может быть построена ломаная в общем случае линия, состоящая из реального светового луча, распространяющегося из предметной точки в данную точку поверхности, и реального светового луча, распространяющегося из данной точки поверхности в точку гауссова изображения, сопряженную с предметной. Волновая аберрация в точке поверхности определяется как разность оптического пути вдоль указанной ломаной линии и оптического пути вдоль аналогичной ломаной линии, построенной для какой-либо фиксированной точки поверхности, например, для лежащей на оси системы. Нетрудно видеть, что введенная функция может быть истолкована как разность фазового распределения, которое создается на поверхности оптической системой (или ее частью), и фазового распределения, которое должно быть создано на этой поверхности для формирования идеального изображения.

Выбор аберрационной функции предопределяет ряд существенных черт изложенной ниже модели. Во-первых, в отличие от других аналитических методик упрощаются выражения для аберрационных коэффициентов тонких оптических элементов (преломляющая или отражающая поверхность, дифракционная линза), составляющих основу любой оптической системы (протяженные элементы типа граданов в настоящей работе не рассматриваются). Это связано с тем, что в определении аберрационной функции не фигурируют реальные лучи, проходящие через всю систему от предмета до изображения. Во-вторых, предельно упрощается алгоритм сложения аберраций двух оптических систем: если аберрации известны на одной поверхности, то их необходимо просто сложить (элементарное доказательство этого очевидного положения содержится в [7]). В-третьих, поскольку

абберационная функция основывается на реальном распределении фазы на поверхности, то главная аналитическая "тяжесть" вычисления aberrаций концентрируется в алгоритме их пересчета с поверхности на поверхность, то есть при переносе зрачка. Представляется, что подобная расстановка акцентов в модели наилучшим образом соответствует физической сущности процесса распространения волнового фронта в оптической системе.

Введенная выше aberrационная функция применима для произвольной оптической системы с полным отсутствием симметрии, однако ниже будут рассматриваться аксиально симметричные элементы и системы, поскольку только в этом случае можно рассчитывать на более или менее удобоваримые формулы в высших порядках малости. Во всех выкладках используется aberrационное разложение в каноническом виде, то есть по степеням инвариантов вращения, составленных из координат точки изображения (предмета) и точки рассматриваемой поверхности. Конкретно для 3-го, 5-го и 7-го порядков указанное разложение имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{3A} &= \frac{1}{8} S_3 \rho^4 + \frac{1}{2} C_3 \rho^2 (\rho \cdot \chi) + \frac{1}{2} A_3 (\rho \cdot \chi)^2 + \\
 &+ \frac{1}{4} F_3 \rho^2 \chi^2 + \frac{1}{2} D_3 (\rho \cdot \chi) \chi^2 ; \\
 \Phi_{5A} &= \frac{1}{16} S_{5(1)} \rho^6 + \frac{3}{8} C_{5(1)} \rho^4 (\rho \cdot \chi) + \frac{3}{4} P_5 \rho^2 (\rho \cdot \chi)^2 + \\
 &+ \frac{3}{16} S_{5(2)} \rho^4 \chi^2 + \frac{1}{2} Z_5 (\rho \cdot \chi)^3 + \frac{3}{4} C_{5(2)} \rho^2 (\rho \cdot \chi) \chi^2 + \\
 &+ \frac{3}{4} A_5 (\rho \cdot \chi)^2 \chi^2 + \frac{3}{16} F_5 \rho^2 \chi^4 + \frac{3}{8} D_5 (\rho \cdot \chi) \chi^4 ; \\
 \Phi_{7A} &= \frac{5}{128} S_{7(1)} \rho^8 + \frac{5}{16} C_{7(1)} \rho^6 (\rho \cdot \chi) + \frac{5}{32} S_{7(2)} \rho^6 \chi^2 + \\
 &+ \frac{15}{16} P_{7(1)} \rho^4 (\rho \cdot \chi)^2 + \frac{15}{16} C_{7(2)} \rho^4 (\rho \cdot \chi) \chi^2 + \frac{5}{4} M_7 \rho^2 (\rho \cdot \chi)^3 + \\
 &+ \frac{15}{8} P_{7(2)} \rho^2 (\rho \cdot \chi)^2 \chi^2 + \frac{5}{8} B_7 (\rho \cdot \chi)^4 + \frac{15}{64} S_{7(3)} \rho^4 \chi^4 + \\
 &+ \frac{5}{4} Z_7 (\rho \cdot \chi)^3 \chi^2 + \frac{15}{16} C_{7(3)} \rho^2 (\rho \cdot \chi) \chi^4 + \\
 &+ \frac{15}{16} A_7 (\rho \cdot \chi)^2 \chi^4 + \frac{5}{32} F_7 \rho^2 \chi^6 + \frac{5}{16} D_7 (\rho \cdot \chi) \chi^6 .
 \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 ; \quad (\rho \cdot \chi) = \xi x + \eta y ; \quad \chi^2 = x^2 + y^2 ; \tag{2}$$

ξ, η - координаты точки поверхности, на которой рассматриваются aberrации (зрачковые координаты);

x, y - координаты точки предмета или изображения (полевые координаты).

В выражениях (1) $S_3 - S_{7(3)}$ - коэффициенты сферической аберрации; $C_3 - C_{7(3)}$ - комы; $A_3 - A_7$ - астигматизма; $F_3 - F_7$ - кривизны поля; $D_3 - D_7$ - дисторсии; $P_5 - P_{7(2)}$ - птеры; Z_5, Z_7 - сагитты; B_7 - бисагитты; M_7 - моноптеры. Первый индекс указывает порядок малости аберрации, индекс в скобках - номер данного типа аберрации в пределах порядка (так, в 5-м порядке содержится две сферические аберрации, в 7-м - три и т. д., индекс отсутствует, если аберрация данного типа в порядке малости одна). Названия аберраций соответствуют терминологии работы [11].

В качестве поверхностей в оптической системе будем рассматривать четные асферические поверхности вращения, характеризуемые уравнением:

$$\Delta z = \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{r} + \frac{1}{8} \frac{\rho^4}{r^3} (1 + \sigma_{30}) + \frac{1}{16} \frac{\rho^6}{r^5} (1 + \sigma_{50}) + \frac{5}{128} \frac{\rho^8}{r^7} (1 + \sigma_{70}), \quad (3)$$

где

Δz - расстояние от точки поверхности с координатами ξ, η до плоскости, перпендикулярной оси системы и проходящей через вершину поверхности (точку пересечения с осью);

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2;$$

r - радиус кривизны в вершине поверхности.

Если в (3) положить $\sigma_{30} = \sigma_{50} = \sigma_{70} = 0$, то получаем уравнение сферы (полусферы) с радиусом r . Таким образом, $\sigma_{30} - \sigma_{70}$ - нормированные коэффициенты асферичности поверхности. Введем также размерные, ненормированные коэффициенты

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_{30}}{r^3}; \quad \sigma_5 = \frac{\sigma_{50}}{r^5}; \quad \sigma_7 = \frac{\sigma_{70}}{r^7}, \quad (4)$$

которые необходимы при описании planoида, то есть асферической поверхности с бесконечным радиусом кривизны в вершине. В этом случае при конечных $\sigma_3 - \sigma_7$ $1/r \rightarrow 0$ и уравнение (3) приобретает вид:

$$\Delta z = \frac{1}{8} \sigma_3 \rho^4 + \frac{1}{16} \sigma_5 \rho^6 + \frac{5}{128} \sigma_7 \rho^8. \quad (5)$$

Четность поверхностей, то есть наличие только четных степеней ρ в (3) и (5), обеспечивает отсутствие в оптической системе аберраций 2-го, 4-го и других четных порядков, что существенно упрощает аберрационный анализ. Указанное ограничение в подавляющем большинстве случаев соблюдается на практике и является общепринятым.

В качестве первого шага построения методики аберрационного расчета оптических систем получим выражения для аберраций тонких оптических элементов, то есть преломляющей поверхности (в частном случае, отражающей) и дифракционной линзы. В случае сферических поверхностей коэффициенты σ

3-го по 7-й порядки опубликованы в работах [7, 12], тогда как элементы с асферическими поверхностями пока не исследовались.

Аберрации тонкого оптического элемента естественно рассматривать на его собственной поверхности, что и обеспечивает сравнительную негромоздкость выражений. Если на элементе дана точка $A(\xi, \eta)$ (рис. 1), то в соответствии с определением волновая аберрация в этой точке будет равна

$$\Phi_A = nL_1 + n'L_2 - nL_{10} - n'L_{20} + \Phi_0, \quad (6)$$

где

L_1, L_2 - расстояния от предмета и изображения до точки A ;

L_{10}, L_{20} - расстояния от предмета и изображения до вершины поверхности (которая выбирается в качестве опорной точки);

n, n' - показатели преломления до и после поверхности;

Φ_0 - фазовая добавка, которую необходимо учитывать для дифракционной линзы (подробно см. в [7]).

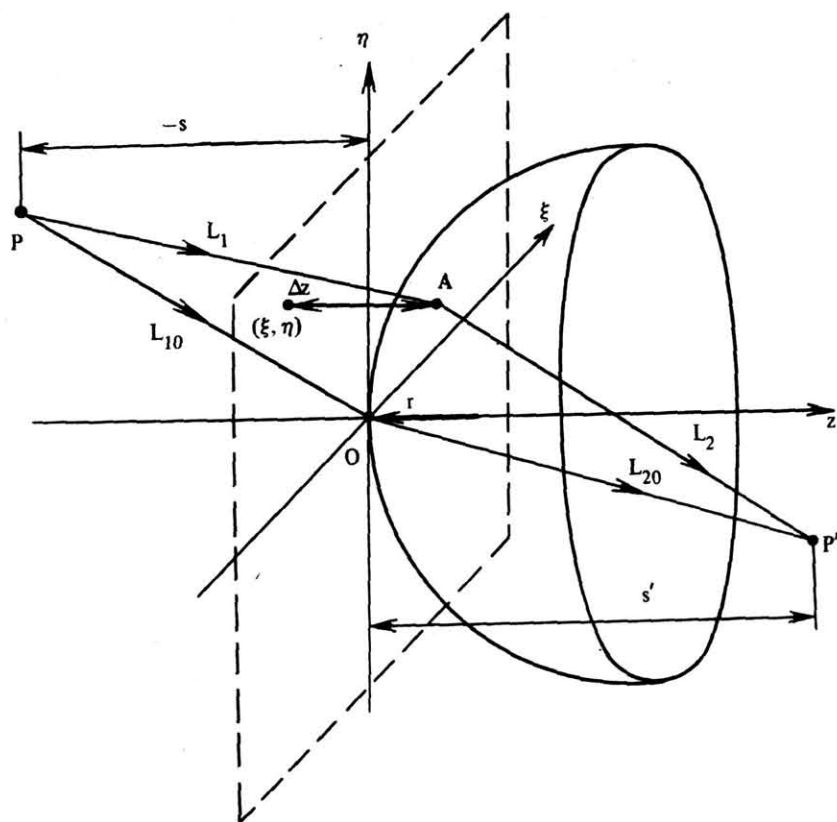


Рис. 1. Волновая аберрация тонкого оптического элемента на асферической поверхности вращения:
 P - предмет; P' - изображение; O - вершина поверхности;
 r - радиус кривизны в вершине поверхности

В соответствии с правилом знаков, принятым в оптике, перечисленные расстояния можно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= -s \sqrt{1 + \frac{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}{s^2} - 2 \frac{\Delta z}{s} + \frac{\Delta z^2}{s^2}} ; \\ L_2 &= s' \sqrt{1 + \frac{(\xi-x')^2 + (\eta-y')^2}{s'^2} - 2 \frac{\Delta z}{s'} + \frac{\Delta z^2}{s'^2}} ; \\ L_{10} &= s \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{s^2}} ; \quad L_{20} = -s' \sqrt{1 + \frac{x'^2 + y'^2}{s'^2}} , \end{aligned} \right\} (7)$$

где

s, s' - отрезки оптического элемента;

x, y и x', y' - координаты точек предмета и изображения соответственно;
 Δz - расстояние от точки А до вершинной плоскости, определяемое выражениями (3) или (5).

В случае преломляющей поверхности фазовая добавка $\Phi_0 = 0$, а отрезки и координаты изображения предмета связаны соотношениями:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} = \frac{n}{s} - \frac{n}{r} ; \quad n' \frac{x'}{s'} = n \frac{x}{s} ; \quad n' \frac{y'}{s'} = n \frac{y}{s} . \quad (8)$$

Разлагая теперь выражение (6) с учетом (7) в ряд по степеням инвариантов вращения, исключая с помощью (8) координаты предмета и выделяя в полученном разложении отдельные типы aberrаций в соответствии с (1), получаем следующие соотношения для коэффициентов aberrаций до 7-го порядка включительно:

$$\left. \begin{aligned} S_3 &= - \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right)^2 \left(\frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns} \right) - \frac{\sigma_{30}}{r^3} (n' - n) ; \\ C_3 &= \frac{n'}{s'} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right) \left(\frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns} \right) ; \quad A_3 = - \frac{n'^2}{s'^2} \left(\frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns} \right) ; \\ F_3 &= - \frac{n'^2}{s'^2} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right) \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) ; \quad D_3 = \frac{n'^3}{s'^3} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) ; \\ S_{5(1)} &= \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right)^3 \left(\frac{1}{n'^2 s'^2} - \frac{1}{n^2 s^2} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right)^2 \left(\frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns} \right) + \frac{\sigma_{30}}{r^3} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right) \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \right) + \frac{\sigma_{30}}{r^4} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right) - \frac{\sigma_{50}}{r^5} (n' - n) ; \\ C_{5(1)} &= - \frac{n'}{s'} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right)^2 \left(\frac{1}{n'^2 s'^2} - \frac{1}{n^2 s^2} \right) + \frac{1}{3r^2} \frac{n'}{s'} \times \\ &\times \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right) \left(\frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns} \right) - \frac{\sigma_{30}}{3r^3} \frac{n'}{s'} \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \right) ; \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
S_{5(2)} &= \frac{n'^2}{s'^2} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right)^2 \left(\frac{1}{n'^3 s'} - \frac{1}{n^3 s} \right) - \frac{1}{3r^2} \frac{n'^2}{s'^2} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right) \times \\
&\times \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) + \frac{\sigma_{30}}{3r^2} \frac{n'^2}{s'^2} \left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n} \right) ; \\
P_5 &= \frac{n'^2}{s'^2} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right) \left(\frac{1}{n'^2 s'^2} - \frac{1}{n^2 s^2} \right) ; Z_5 = -\frac{n'^3}{s'^3} \left(\frac{1}{n'^2 s'^2} - \frac{1}{n^2 s^2} \right) ; \\
C_{5(2)} &= -\frac{n'^3}{s'^3} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right) \left(\frac{1}{n'^3 s'} - \frac{1}{n^3 s} \right) ; A_5 = \frac{n'^4}{s'^4} \left(\frac{1}{n'^3 s'} - \frac{1}{n^3 s} \right) ; \\
F_5 &= \frac{n'^4}{s'^4} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right) \left(\frac{1}{n'^4} - \frac{1}{n^4} \right) ; D_5 = -\frac{n'^5}{s'^5} \left(\frac{1}{n'^4} - \frac{1}{n^4} \right) ; \\
S_{7(1)} &= -\left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right)^4 \left(\frac{1}{n'^3 s'^3} - \frac{1}{n^3 s^3} \right) + \frac{6}{5r^2} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right) \left(\frac{1}{n'^2 s'^2} - \right. \\
&- \left. \frac{1}{n^2 s^2} \right) - \frac{1}{r^4} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right)^2 \left(\frac{1}{n' s'} - \frac{1}{n s} \right) - \frac{6\sigma_{30}}{5r^3} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right) \times \\
&\times \left(\frac{1}{n' s'^2} - \frac{1}{n s^2} \right) - \frac{4\sigma_{30}}{5r^4} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right) \left(\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^2} \right) + \frac{2\sigma_{30}}{5r^5} \left(\frac{n'}{s'} - \right. \\
&- \left. \frac{n'}{r} \right) \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \right) + \frac{2\sigma_{30}}{5r^6} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right) + \frac{4\sigma_{50}}{5r^5} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right) \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \right) + \\
&+ \frac{4\sigma_{50}}{5r^6} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right) - \frac{\sigma_{70}}{r^7} (n' - n) ; \\
C_{7(1)} &= \frac{n'}{s'} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right)^3 \left(\frac{1}{n'^3 s'^3} - \frac{1}{n^3 s^3} \right) - \frac{3}{5r^2} \frac{n'}{s'} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right)^2 \times \\
&\times \left(\frac{1}{n'^2 s'^2} - \frac{1}{n^2 s^2} \right) + \frac{1}{5r^4} \frac{n'}{s'} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right) \left(\frac{1}{n' s'} - \frac{1}{n s} \right) + \\
&+ \frac{3\sigma_{30}}{5r^3} \frac{n'}{s'} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right) \left(\frac{1}{n' s'^2} - \frac{1}{n s^2} \right) + \frac{\sigma_{30}}{5r^4} \frac{n'}{s'} \left(\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^2} \right) - \\
&- \frac{\sigma_{50}}{5r^5} \frac{n'}{s'} \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \right) ; \\
P_{7(1)} &= -\frac{n'^2}{s'^2} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right)^2 \left(\frac{1}{n'^3 s'^3} - \frac{1}{n^3 s^3} \right) + \frac{1}{5r^2} \frac{n'^2}{s'^2} \left(\frac{n'}{s'} - \right. \\
&- \left. \frac{n'}{r} \right) \left(\frac{1}{n'^2 s'^2} - \frac{1}{n^2 s^2} \right) - \frac{\sigma_{30}}{5r^3} \frac{n'^2}{s'^2} \left(\frac{1}{n' s'^2} - \frac{1}{n s^2} \right) ; \\
S_{7(2)} &= -\frac{n'^2}{s'^2} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right)^3 \left(\frac{1}{n'^4 s'^2} - \frac{1}{n^4 s^2} \right) + \frac{3}{5r^2} \frac{n'^2}{s'^2} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right)^2 \times \\
&\times \left(\frac{1}{n'^3 s'} - \frac{1}{n^3 s} \right) - \frac{1}{5r^4} \frac{n'^2}{s'^2} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right) \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) - \frac{3\sigma_{30}}{5r^3} \frac{n'^2}{s'^2} \times
\end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right) \left(\frac{1}{n'^2 s'} - \frac{1}{n^2 s} \right) - \frac{\sigma_{30}}{5r^4} \frac{n'^2}{s'^2} \left(\frac{1}{n' s'} - \frac{1}{n s} \right) + \frac{\sigma_{50}}{5r^5} \frac{n'^2}{s'^2} \times \\
& \times \left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n} \right); \quad C_{7(2)} = \frac{n'^3}{s'^3} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right) \left(\frac{1}{n'^4 s'^2} - \frac{1}{n^4 s^2} \right) - \frac{1}{5r^2} \times \\
& \times \frac{n'^3}{s'^3} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right) \left(\frac{1}{n'^3 s'} - \frac{1}{n^3 s} \right) + \frac{\sigma_{30}}{5r^3} \frac{n'^3}{s'^3} \left(\frac{1}{n'^2 s'} - \frac{1}{n^2 s} \right); \\
& B_7 = \frac{n'^3}{s'^3} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right) \left(\frac{1}{n'^3 s'^3} - \frac{1}{n^3 s^3} \right); \quad M_7 = -\frac{n'^4}{s'^4} \left(\frac{1}{n'^3 s'^3} - \frac{1}{n^3 s^3} \right); \\
& S_{7(3)} = -\frac{n'^4}{s'^4} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right)^2 \left(\frac{1}{n'^5 s'} - \frac{1}{n^5 s} \right) + \frac{1}{5r^2} \frac{n'^4}{s'^4} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right) \times \\
& \times \left(\frac{1}{n'^4} - \frac{1}{n^4} \right) - \frac{\sigma_{30}}{5r^3} \frac{n'^4}{s'^4} \left(\frac{1}{n'^3} - \frac{1}{n^3} \right); \\
& P_{7(2)} = -\frac{n'^4}{s'^4} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right) \left(\frac{1}{n'^4 s'^2} - \frac{1}{n^4 s^2} \right); \quad Z_7 = \frac{n'^5}{s'^5} \left(\frac{1}{n'^4 s'^2} - \frac{1}{n^4 s^2} \right); \\
& C_{7(3)} = \frac{n'^5}{s'^5} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right) \left(\frac{1}{n'^5 s'} - \frac{1}{n^5 s} \right); \quad A_7 = -\frac{n'^6}{s'^6} \left(\frac{1}{n'^5 s'} - \frac{1}{n^5 s} \right); \\
& F_7 = -\frac{n'^6}{s'^6} \left(\frac{n'}{s'} - \frac{n'}{r} \right) \left(\frac{1}{n'^6} - \frac{1}{n^6} \right); \quad D_7 = \frac{n'^7}{s'^7} \left(\frac{1}{n'^6} - \frac{1}{n^6} \right).
\end{aligned} \tag{9}$$

Выражения (9) довольно существенно упрощаются, если положить равными нулю все коэффициенты асферичности (в этом виде формулы даны в [12]). Полагая в (9) $1/r = 0$, но сохраняя при этом $\sigma_3, \sigma_5, \sigma_7 \neq 0$ и используя для исключения отрезка s первое из соотношений (8), получаем aberrации planoида в следующем виде:

$$\begin{aligned}
S_3 &= -\frac{n'^3}{s'^3} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) - \sigma_3 (n' - n); \\
C_3 &= -A_3 = -F_3 = D_3 = \frac{n'^3}{s'^3} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right); \\
S_{5(1)} &= \frac{n'^5}{s'^5} \left(\frac{1}{n'^4} - \frac{1}{n^4} \right) + \sigma_3 \frac{n'^2}{s'^2} \left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n} \right) - \sigma_5 (n' - n); \\
C_{5(1)} &= -S_{5(2)} = -\frac{n'^5}{s'^5} \left(\frac{1}{n'^4} - \frac{1}{n^4} \right) - \frac{\sigma_3}{3} \frac{n'^2}{s'^2} \left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n} \right); \\
P_5 &= -Z_5 = -C_{5(2)} = A_5 = F_5 = -D_5 = \frac{n'^5}{s'^5} \left(\frac{1}{n'^4} - \frac{1}{n^4} \right); \\
S_{7(1)} &= -\frac{n'^7}{s'^7} \left(\frac{1}{n'^6} - \frac{1}{n^6} \right) - \frac{6\sigma_3}{5} \frac{n'^4}{s'^4} \left(\frac{1}{n'^3} - \frac{1}{n^3} \right) + \\
& + \frac{4\sigma_5}{5} \frac{n'^2}{s'^2} \left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n} \right) - \sigma_7 (n' - n);
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
C_{7(1)} = -S_{7(2)} &= \frac{n'^7}{s'^7} \left(\frac{1}{n'^6} - \frac{1}{n^6} \right) + \frac{3\sigma_3}{5} \frac{n'^4}{s'^4} \left(\frac{1}{n'^3} - \frac{1}{n^3} \right) - \\
- \frac{\sigma_5}{5} \frac{n'^2}{s'^2} \left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n} \right) ; & \quad B_7 = -M_7 = -P_{7(2)} = \frac{n'^7}{s'^7} \left(\frac{1}{n'^6} - \frac{1}{n^6} \right) ; \\
P_{7(1)} = -C_{7(2)} = S_{7(3)} &= \frac{n'^7}{s'^7} \left(\frac{1}{n'^6} - \frac{1}{n^6} \right) - \frac{\sigma_3}{5} \frac{n'^4}{s'^4} \left(\frac{1}{n'^3} - \frac{1}{n^3} \right) ; \\
Z_7 = C_{7(3)} = -A_7 = -F_7 = D_7 &= \frac{n'^7}{s'^7} \left(\frac{1}{n'^6} - \frac{1}{n^6} \right) .
\end{aligned} \tag{10}$$

Можно отметить, что асферическая деформация поверхности какого-либо порядка влияет в этом порядке только на первую сферическую aberrацию, а в последующих порядках малости сказывается и на некоторых полевых aberrациях, содержащих инвариант ρ в не меньшей степени. Отметим также, что для отражающей поверхности достаточно положить в (9) или (10) $n' = -n$.

Теперь рассмотрим дифракционную линзу на асферической поверхности. Конечно, такой случай вряд ли встретится на практике, но для полноты модели его следует учесть. Для дифракционной линзы $n = n' = 1$ (подложка рассматривается как отдельный компонент, см. [7]), а фазовую добавку Φ_0 полагаем равной:

$$\begin{aligned}
\Phi_0 = \frac{\pi\lambda}{\lambda_0} & \left(-z \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{z^2} - 2 \frac{\Delta z}{z} + \frac{\Delta z^2}{z^2}} + \right. \\
+ z' & \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{z'^2} - 2 \frac{\Delta z}{z'} + \frac{\Delta z^2}{z'^2}} + z \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{z^2}} - \\
- z' & \left. \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{z'^2} - \frac{1}{8} b_3 \rho^4 - \frac{1}{16} b_5 \rho^6 - \frac{5}{128} b_7 \rho^8} \right) , \tag{11}
\end{aligned}$$

где

z, z' - отрезки записи дифракционной линзы;

$b_3 - b_7$ - коэффициенты асферической деформации структуры линзы;

λ_0 - длина волны записи;

λ - рабочая длина волны;

m - рабочий порядок дифракции (подробное обоснование используемой формы характеристической функции дифракционной линзы см. в [7]).

Отрезки и координаты изображения и предмета в рассматриваемом случае связаны соотношениями:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{\pi\lambda}{\lambda_0} \left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{z} \right) ; \quad \frac{x'}{s'} = \frac{x}{s} ; \quad \frac{y'}{s'} = \frac{y}{s} . \tag{12}$$

Разлагая опять выражение (6) в ряд с учетом (7), (11) и (12), получаем для коэффициентов aberrаций:

$$\begin{aligned}
S_3 &= -\frac{1}{s'^3} + \frac{1}{s^3} - \frac{m\lambda}{\lambda_0} \left(\frac{1}{z'^3} - \frac{1}{z^3} \right) + \frac{2}{r} \left[\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^2} + \frac{m\lambda}{\lambda_0} \left(\frac{1}{z'^2} - \frac{1}{z^2} \right) \right] - \frac{m\lambda}{\lambda_0} b_3 ; \quad C_3 = \frac{1}{s'} \left(\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^2} \right) - \frac{1}{s'r} \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \right) ; \\
A_3 &= F_3 = -\frac{1}{s'^2} \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \right) ; \quad D_3 = 0 ; \\
S_{5(1)} &= \frac{1}{s'^5} - \frac{1}{s^5} + \frac{m\lambda}{\lambda_0} \left(\frac{1}{z'^5} - \frac{1}{z^5} \right) - \frac{3}{r} \left[\frac{1}{s'^4} - \frac{1}{s^4} + \frac{m\lambda}{\lambda_0} \left(\frac{1}{z'^4} - \frac{1}{z^4} \right) \right] + \frac{2}{r^2} \left[\frac{1}{s'^3} - \frac{1}{s^3} + \frac{m\lambda}{\lambda_0} \left(\frac{1}{z'^3} - \frac{1}{z^3} \right) \right] + \\
&+ \frac{1+\sigma_{30}}{r^3} \left[\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^2} + \frac{m\lambda}{\lambda_0} \left(\frac{1}{z'^2} - \frac{1}{z^2} \right) \right] - \frac{m\lambda}{\lambda_0} b_5 ; \\
C_{5(1)} &= -\frac{1}{s'} \left(\frac{1}{s'^4} - \frac{1}{s^4} \right) + \frac{2}{s'r} \left(\frac{1}{s'^3} - \frac{1}{s^3} \right) - \frac{2}{3s'r^2} \left(\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^2} \right) - \\
&- \frac{1+\sigma_{30}}{3s'r^3} \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \right) ; \quad P_5 = \frac{1}{s'^2} \left(\frac{1}{s'^3} - \frac{1}{s^3} \right) - \frac{1}{s'^2 r} \left(\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^2} \right) ; \\
S_{5(2)} &= \frac{1}{s'^2} \left(\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^3} \right) - \frac{2}{s'^2 r} \left(\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^2} \right) + \frac{2}{3s'^2 r^2} \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \right) ; \\
C_{5(2)} &= -\frac{1}{s'^3} \left(\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^2} \right) + \frac{1}{s'^3 r} \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \right) ; \\
Z_5 &= -\frac{1}{s'^3} \left(\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^2} \right) ; \quad A_5 = F_5 = \frac{1}{s'^4} \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \right) ; \quad D_5 = 0 ; \\
S_{7(1)} &= -\frac{1}{s'^7} + \frac{1}{s^7} - \frac{m\lambda}{\lambda_0} \left(\frac{1}{s'^7} - \frac{1}{s^7} \right) + \frac{4}{r} \left[\frac{1}{s'^6} - \frac{1}{s^6} + \frac{m\lambda}{\lambda_0} \left(\frac{1}{z'^6} - \frac{1}{z^6} \right) \right] - \\
&- \frac{12}{5r^2} \left[\frac{1}{s'^5} - \frac{1}{s^5} + \frac{m\lambda}{\lambda_0} \left(\frac{1}{z'^5} - \frac{1}{z^5} \right) \right] - \frac{2+6\sigma_{30}}{5r^3} \left[\frac{1}{s'^4} - \frac{1}{s^4} + \frac{m\lambda}{\lambda_0} \left(\frac{1}{z'^4} - \frac{1}{z^4} \right) \right] + \\
&+ \frac{4(1+\sigma_{30})}{5r^4} \left[\frac{1}{s'^3} - \frac{1}{s^3} + \frac{m\lambda}{\lambda_0} \left(\frac{1}{z'^3} - \frac{1}{z^3} \right) \right] - \frac{m\lambda}{\lambda_0} b_7 ; \\
C_{7(1)} &= \frac{1}{s'} \left(\frac{1}{s'^6} - \frac{1}{s^6} \right) + \frac{3}{s'r} \left(\frac{1}{s'^5} - \frac{1}{s^5} \right) + \frac{12}{5s'r^2} \left(\frac{1}{s'^4} - \frac{1}{s^4} \right) - \\
&- \frac{1+3\sigma_{30}}{5s'r^3} \left(\frac{1}{s'^3} - \frac{1}{s^3} \right) - \frac{2(1+\sigma_{30})}{5s'r^4} \left(\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^2} \right) - \frac{1+\sigma_{50}}{5r^5} \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \right) ; \\
S_{7(2)} &= -\frac{1}{s'^2} \left(\frac{1}{s'^5} - \frac{1}{s^5} \right) + \frac{3}{s'^2 r} \left(\frac{1}{s'^4} - \frac{1}{s^4} \right) - \frac{4}{5s'^2 r^2} \times
\end{aligned}
\tag{13}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{1}{s'^3} - \frac{1}{s^3} \right) - \frac{1+3\sigma_{30}}{5s'^2r^3} \left(\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^2} \right) + \frac{2(1+\sigma_{30})}{5s'^2r^4} \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \right) ; \\
P_{7(1)} &= -\frac{1}{s'^2} \left(\frac{1}{s'^5} - \frac{1}{s^5} \right) + \frac{2}{s'^2r} \left(\frac{1}{s'^4} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{s^4} \right) - \frac{4}{5s'^2r^2} \left(\frac{1}{s'^3} - \frac{1}{s^3} \right) - \frac{1+\sigma_{30}}{5s'^2r^3} \left(\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^2} \right) ; \\
C_{7(2)} &= \frac{1}{s'^3} \left(\frac{1}{s'^4} - \frac{1}{s^4} \right) - \frac{2}{s'^3r} \left(\frac{1}{s'^3} - \frac{1}{s^3} \right) + \frac{4}{5s'^3r^2} \left(\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^2} \right) + \\
& + \frac{1+\sigma_{30}}{5s'^3r^3} \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \right) ; \quad B_7 = \frac{1}{s'^3} \left(\frac{1}{s'^4} - \frac{1}{s^4} \right) - \frac{1}{s'^3r} \left(\frac{1}{s'^3} - \frac{1}{s^3} \right) ; \\
P_{7(2)} &= -\frac{1}{s'^4} \left(\frac{1}{s'^3} - \frac{1}{s^3} \right) + \frac{1}{s'^4r} \left(\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^2} \right) ; \\
S_{7(3)} &= -\frac{1}{s'^4} \left(\frac{1}{s'^3} - \frac{1}{s^3} \right) + \frac{2}{s'^4r} \left(\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^2} \right) - \frac{4}{5s'^4r^2} \times \\
& \times \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \right) ; \quad M_7 = -\frac{1}{s'^4} \left(\frac{1}{s'^3} - \frac{1}{s^3} \right) ; \\
C_{7(3)} &= \frac{1}{s'^5} \left(\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^2} \right) - \frac{1}{s'^5r} \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \right) ; \\
Z_7 &= \frac{1}{s'^5} \left(\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^2} \right) ; \quad A_7 = F_7 = -\frac{1}{s'^6} \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \right) ; \quad D_7 = 0 .
\end{aligned} \tag{13}$$

Нетрудно заметить, что влияние асферичности поверхности на aberrации дифракционной линзы слабее, чем в случае преломляющего оптического элемента. В частности, деформация поверхности не влияет на aberrации того же порядка малости, включая и сферическую. Полагая теперь в (13) $1/r=0$, получаем выражения для aberrаций линзы на плоскоидной поверхности:

$$\begin{aligned}
s_3 &= -\frac{1}{s'^3} + \frac{1}{s^3} - \frac{m\lambda}{\lambda_0} \left(\frac{1}{z'^3} - \frac{1}{z^3} \right) - \frac{m\lambda}{\lambda_0} b_3 ; \\
C_3 &= \frac{1}{s'} \left(\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^2} \right) ; \quad A_3 = F_3 = -\frac{1}{s'^2} \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \right) ; \quad D_3 = 0 ; \\
S_{5(1)} &= \frac{1}{s'^5} - \frac{1}{s^5} + \frac{m\lambda}{\lambda_0} \left(\frac{1}{z'^5} - \frac{1}{z^5} \right) + \sigma_3 \left[\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^2} + \frac{m\lambda}{\lambda_0} \left(\frac{1}{z'^2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{z^2} \right) \right] - \frac{m\lambda}{\lambda_0} b_5 ; \quad C_{5(1)} = -\frac{1}{s'} \left(\frac{1}{s'^4} - \frac{1}{s^4} \right) - \frac{\sigma_3}{3s'} \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \right) ; \\
P_5 = S_{5(2)} &= \frac{1}{s'^2} \left(\frac{1}{s'^3} - \frac{1}{s^3} \right) ; \quad Z_5 = C_{5(2)} = -\frac{1}{s'^3} \left(\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^2} \right) ; \\
A_5 = F_5 &= \frac{1}{s'^4} \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \right) ; \quad D_5 = 0 ; \\
S_{7(1)} &= -\frac{1}{s'^7} + \frac{1}{s^7} - \frac{m\lambda}{\lambda_0} \left(\frac{1}{z'^7} - \frac{1}{z^7} \right) - \frac{6\sigma_3}{5} \left[\frac{1}{s'^4} - \frac{1}{s^4} + \frac{m\lambda}{\lambda_0} \times \right.
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{1}{z'^4} - \frac{1}{z^4} \right) \Big] + \frac{2\sigma_5}{5} \left[\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^2} + \frac{m\lambda}{\lambda_0} \left(\frac{1}{z'^2} - \frac{1}{z^2} \right) \right] - \frac{m\lambda}{\lambda_0} b_7 ; \\
C_{7(1)} &= \frac{1}{s'} \left(\frac{1}{s'^6} - \frac{1}{s^6} \right) + \frac{3\sigma_3}{5s'} \left(\frac{1}{s'^3} - \frac{1}{s^3} \right) - \frac{\sigma_5}{5s'} \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \right) ; \\
P_{7(1)} &= -\frac{1}{s'^2} \left(\frac{1}{s'^5} - \frac{1}{s^5} \right) - \frac{\sigma_3}{5s'^2} \left(\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^2} \right) ; \\
S_{7(2)} &= -\frac{1}{s'^2} \left(\frac{1}{s'^5} - \frac{1}{s^5} \right) - \frac{3\sigma_3}{5s'^2} \left(\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^2} \right) ; \\
C_{7(2)} &= \frac{1}{s'^3} \left(\frac{1}{s'^4} - \frac{1}{s^4} \right) + \frac{\sigma_3}{5s'^3} \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \right) ; \quad B_7 = \frac{1}{s'^3} - \left(\frac{1}{s'^4} - \frac{1}{s^4} \right) ; \\
M_7 = S_{7(3)} \quad P_{7(2)} &= -\frac{1}{s'^4} \left(\frac{1}{s'^3} - \frac{1}{s^3} \right) ; \quad D_7 = 0 ; \\
Z_7 = C_{7(3)} &= \frac{1}{s'^5} \left(\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^2} \right) ; \quad A_7 = F_7 = -\frac{1}{s'^6} \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \right) .
\end{aligned} \tag{14}$$

Таким образом, получен полный набор формул для тонких оптических элементов на четных асферических поверхностях вращения, который обеспечивает возможность расчета aberrаций 3-го, 5-го и 7-го порядков оптических систем, состоящих из указанных элементов.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АБЕРРАЦИЙ ИЗ ПЛОСКОСТИ В ПЛОСКОСТЬ

В разд. 1 были рассмотрены основные положения методики расчета волновых aberrаций третьего и высших порядков центрированных оптических систем и даны выражения для коэффициентов aberrаций тонких оптических элементов на их собственной поверхности. Поскольку алгоритм сложения aberrаций в предлагаемой методике крайне прост [7], то осталось только получить формулы преобразования aberrаций при изменении поверхности, на которой они рассматриваются.

В рамках принятых ограничений (см. разд. 1) указанную задачу необходимо решать для перехода с одной четной асферической поверхности вращения на другую (подобно тому, как это сделано для сферических поверхностей и с точностью до пятого порядка в [7]), однако рациональнее разбить ее на три этапа: переход с плоскости на плоскость, переход со сферы на касательную к ней плоскость и обратно и, наконец, переход со сферы на асферическую поверхность и обратно (при наличии общей вершины и одинаковых радиусов кривизны в вершине). Частные формулы преобразования aberrаций не столь сложны, как общие, тогда как получить последние из первых не представляет затруднений.

Метод вывода формул преобразования aberrаций подробно рассмотрен в [7], здесь ограничимся его кратким изложением. Если на поверхности заданы aberrации сферического волнового фронта, то это означает, что

распределение фазы волнового поля на этой поверхности можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \Phi = & -nz \sqrt{1 + \frac{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}{z^2} - 2 \frac{\Delta z}{z} + \frac{\Delta z^2}{z^2}} + \\ & + nz \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} + \Phi_A(\xi, \eta, x, y), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\xi, \eta, \Delta z$ - координаты точки поверхности в системе координат, начало которой помещено в вершину, причем Δz определяется соотношениями (3) или (5) (разд. 1);

x, y, z - координаты центра кривизны фронта;

Φ_A - волновая абберация;

n - показатель преломления среды.

Дифференцируя соотношение (15), находим направляющий косинус светового луча в точке (ξ, η) в соответствии с формулой, полученной в [7]:

$$\begin{aligned} \alpha_\xi = & \frac{1}{n} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{\beta_\xi^2}{n} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{\beta_\xi \beta_\eta}{n} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \beta_\xi \left[1 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{n^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 - \frac{1}{n^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{n^2} \left(\beta_\xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \beta_\eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (16)$$

где β_ξ, β_η - направляющие косинусы нормали к поверхности в данной точке (для α_η имеет место аналогичное соотношение со взаимной заменой ξ и η).

Зная направляющие косинусы луча и пользуясь известными формулами, находим координаты точки его пересечения с другой поверхностью (предполагается, что между поверхностями располагается однородная среда, то есть все лучи прямолинейны):

$$\xi' = \xi + \alpha_\xi \Delta; \quad \eta' = \eta + \alpha_\eta \Delta, \quad (17)$$

где Δ - расстояние между двумя рассматриваемыми точками.

В зависимости от вида поверхностей для Δ существуют аналитические соотношения или итерационные методики вычисления [13].

Считая теперь волновые абберации известными и на второй поверхности, получаем обратные зависимости ξ, η от ξ', η' , рассматривая их совместно с (17), находим волновые абберации фронта на второй поверхности в виде функций от аббераций на первой, а также от кривизны волнового фронта, расстояния между поверхностями и т.п.

Наиболее просто описанный метод реализуется для перехода между двумя перпендикулярными оси z плоскостями M и M' (рис. 2). В этом случае $\Delta z = 0$, а нормали во всех точках параллельны оси z , то есть $\beta_\xi = \beta_\eta = 0$. В итоге направляющие косинусы луча в плоскости M выражаются простыми формулами:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\xi} &= -\frac{\xi-x}{z\sqrt{1+R^2/z^2}} + G_{\xi}; \\ \alpha_{\eta} &= -\frac{\eta-y}{z\sqrt{1+R^2/z^2}} + G_{\eta}; \\ \alpha_z &= \sqrt{1-\alpha_{\xi}^2-\alpha_{\eta}^2}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где $R^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2$; G_{ξ}, G_{η} - производные от волновой аберрации, называемые угловыми аберрациями:

$$G_{\xi} = \frac{1}{n} \frac{\partial \Phi_A}{\partial \xi}; \quad G_{\eta} = \frac{1}{n} \frac{\partial \Phi_A}{\partial \eta}. \quad (19)$$

Расстояние между точками пересечения луча с двумя параллельными плоскостями, как легко показать, равно t/α_z , где t - расстояние между плоскостями вдоль оси z (рис. 2). Подставляя теперь (18) в (17) и разлагая в ряд с точностью до аберраций 7-го порядка, получаем координату точки пересечения луча с плоскостью M' в виде:

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi - \frac{t(\xi-x)}{z} + tG_{\xi} + \frac{tR^2}{2z^2} G_{\xi} + \frac{t(\xi-x)(R \cdot G)}{z^2} - \\ &- \frac{tR^4}{8z^4} G_{\xi} - \frac{T(R \cdot G)}{z} G_{\xi} + \frac{t(\xi-x)R^2(R \cdot G)}{2z^4} - \frac{t(\xi-x)(G \cdot G)}{2z}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $(R \cdot G) = (\xi - x)G_{\xi} + (\eta - y)G_{\eta}$; $(G \cdot G) = G_{\xi}^2 + G_{\eta}^2$; $G_{\xi} = G_{3\xi} + G_{5\xi} + G_{7\xi}$; $G_{\eta} = G_{3\eta} + G_{5\eta} + G_{7\eta}$.

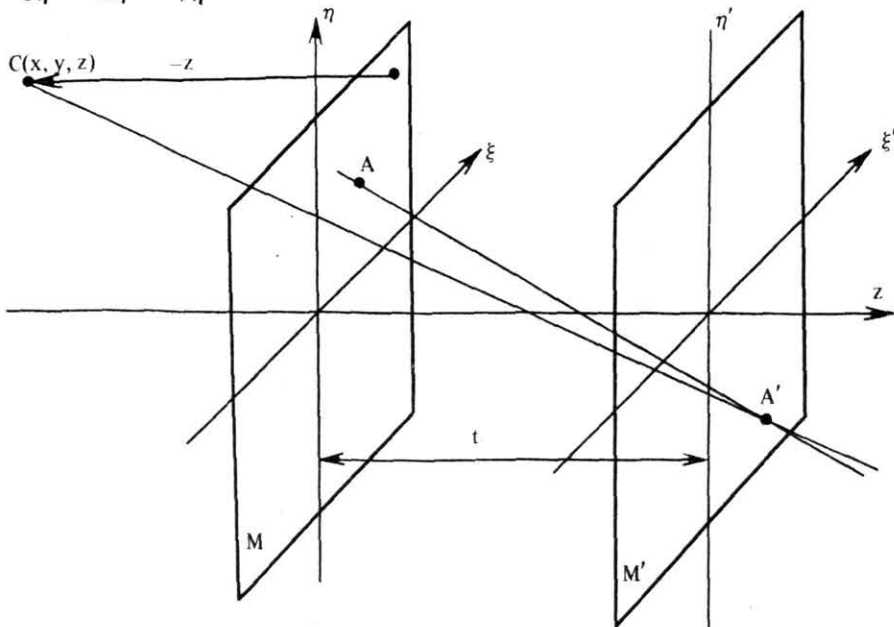


Рис. 2. Преобразование аберраций при распространении волнового фронта между двумя параллельными плоскостями: AA' - реальный световой луч; C - центр кривизны волнового фронта

В выражении (20) учтены члены, обеспечивающие вычисление ξ' с точностью до 7-го порядка. Координата η' дается такой же формулой с заменой ξ на η .

Обратные зависимости (ξ, η) от (ξ', η') легко получить из (20), заменив в этом выражении ξ на ξ' (и наоборот), z на $(z-t)$, t на $-t$, G_ξ на $G_{\xi'}$ и т. д.:

$$\begin{aligned} \xi = \xi' + \frac{t(\xi' - x) - tG'_{\xi'}}{z-t} - \frac{tR'^2}{2(z-t)^2} G'_{\xi'} - \frac{t(\xi' - x)(R' \cdot G')}{(z-t)^2} + \\ + \frac{tR'^4}{8(z-t)^4} G'_{\xi'} + \frac{t(R' \cdot G')}{z-t} G'_{\xi'} - \frac{t(\xi' - x)R'^2(R' \cdot G')}{2(z-t)^4} + \frac{t(\xi' - x)(G' \cdot G')}{2(z-t)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя теперь (21) в (20), приходим к следующим соотношениям для угловых аберраций в плоскости M' :

$$\left. \begin{aligned} G'_{3\xi}(\xi', \eta') &= \frac{z}{z-t} G_{3\xi} \left(\frac{z\xi' - tx}{z-t}, \frac{z\eta' - ty}{z-t} \right); \\ G'_{5\xi}(\xi', \eta') &= \frac{z}{z-t} G_{5\xi} \left(\frac{z\xi' - tx}{z-t}, \frac{z\eta' - ty}{z-t} \right) + \\ &+ \frac{z}{z-t} \Delta_5 \left\{ G_{3\xi} \left(\frac{z\xi' - tx - tG'_{3\xi}}{z-t}, \frac{z\eta' - ty - tG'_{3\eta}}{z-t} \right) \right\}; \\ G'_{7\xi}(\xi', \eta') &= \frac{z}{z-t} G_{7\xi} \left(\frac{z\xi' - tx}{z-t}, \frac{z\eta' - ty}{z-t} \right) + \\ &+ \frac{z}{z-t} \Delta_7 \left\{ G_{5\xi} \left(\frac{z\xi' - tx}{z-t}, \frac{z\eta' - ty}{z-t} \right) - tG'_{3\xi}, \frac{z\eta' - ty - tG'_{3\eta}}{z-t} \right\} + \\ &+ \frac{z}{z-t} \Delta_7 \left\{ G_{3\xi} \left(\frac{z\xi' - tx}{x-t}, \frac{z\eta' - ty}{z-t} \right) - tG'_{3\xi} - tG'_{5\xi} - \frac{tR'^2}{2(z-t)^2} G'_{3\xi} - \right. \\ &- \frac{t(\xi' - x)(R' \cdot G'_3)}{(z-t)^2}, \left. \frac{z\eta' - ty - tG'_{3\eta} - tG'_{5\eta} - \frac{tR'^2}{2(z-t)^2} G'_{3\eta}}{z-t} - \right. \\ &- \left. \frac{t(\eta' - y)(R' \cdot G'_3)}{(z-t)^2} \right\} - \frac{t(R' \cdot G'_3)}{z(z-t)} G'_{3\xi} - \frac{t(\xi' - x)(G'_3 \cdot G'_3)}{2z(z-t)}, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где $\Delta_k(G_m(\dots))$ означает те члены k -го порядка малости, которые возникают при подстановке в G_m указанного аргумента.

Формулы (22) в общем виде могут быть проинтегрированы только в 3-м порядке малости, когда они полностью определяются проективным преобразованием координат из одной плоскости в другую (см. [7]). Для того чтобы найти связь между аберрационными коэффициентами в двух плоскостях в 3-м и последующих порядках, подставим в (22) те выражения для угловых аберраций, которые получаются при дифференцировании канонической формы волновых (см. (1) в разд. 1). В 3-м порядке малости в результате указанной подстановки получаем следующие зависимости аберрационных коэффициентов в плоскости M' (со штрихами) от коэффициентов в плоскости M (без штрихов):

$$\left. \begin{aligned}
 S'_3 &= \frac{z^4}{(z-t)^4} S_3; & C'_3 &= \frac{z^3}{(z-t)^3} C_3 - \frac{z^3 t}{(z-t)^4} S_3; \\
 A'_3 &= \frac{z^2}{(z-t)^2} A_3 - \frac{2z^2 t}{(z-t)^3} C_3 + \frac{z^2 t^2}{(z-t)^4} S_3; \\
 F'_3 &= \frac{z^2}{(z-t)^2} F_3 - \frac{2z^2 t}{(z-t)^3} C_3 + \frac{z^2 t^2}{(z-t)^4} S_3; \\
 D'_3 &= \frac{z}{z-t} D_3 - \frac{zt}{(z-t)^2} (F_3 + 2A_3) + \frac{3zt^2}{(z-t)^3} C_3 - \frac{zt^3}{(z-t)^4} S_3.
 \end{aligned} \right\} (23)$$

Характерной чертой соотношений (23) является зависимость каждого абберационного коэффициента от коэффициентов старших аббераций (то есть содержащих в больших степенях зрачковые координаты) того же порядка, причем по форме эта зависимость соответствует биному Ньютона. Действительно, нетрудно убедиться, что численные коэффициенты в выражениях для A'_3 и F'_3 совпадают с коэффициентами в квадрате бинорма, а в выражении для D'_3 - в кубе (если сложить коэффициенты при A'_3 и F'_3). Степень бинорма равна при этом степени полевых координат в данном типе абберации (в коме эта степень равна 1, в астигматизме и кривизне поля - 2, в дисторсии - 3).

В 5-м порядке малости формулы перехода усложняются и помимо линейной зависимости от коэффициентов 5-го порядка содержат квадратичные по коэффициентам 3-го порядка поправки:

$$\left. \begin{aligned}
 S'_{5(1)} &= \frac{z^6}{(z-t)^6} S_{5(1)} - \frac{2t(z-t)}{nz} S_3'^2; \\
 C'_{5(1)} &= \frac{z^5}{(z-t)^5} C_{5(1)} - \frac{z^5 t}{(z-t)^6} S_{5(1)} - \frac{2t(z-t)}{nz} S_3' C_3'; \\
 P'_5 &= \frac{z^4}{(z-t)^4} P_5 - \frac{2z^4 t}{(z-t)^5} C_{5(1)} + \frac{z^4 t^2}{(z-t)^6} S_{5(1)} - \\
 &\quad - \frac{2t(z-t)}{3nz} (S_3' A_3' + 2C_3'^2); & S'_{5(2)} &= \frac{z^4}{(z-t)^4} S_{5(2)} - \\
 &\quad - \frac{2z^4 t}{(z-t)^5} C_{5(1)} + \frac{z^4 t^2}{(z-t)^6} S_{5(1)} - \frac{2t(z-t)}{3nz} (2S_3' F_3' + C_3'^2); \\
 Z'_5 &= \frac{z^3}{(z-t)^3} Z_5 - \frac{3z^3 t}{(z-t)^4} P_5 + \frac{3z^3 t^2}{(z-t)^5} C_{5(1)} - \\
 &\quad - \frac{z^3 t^3}{(z-t)^6} S_{5(1)} - \frac{2t(z-t)}{nz} C_3' A_3'; \\
 C'_{5(2)} &= \frac{z^3}{(z-t)^3} C_{5(2)} - \frac{z^3 t}{(z-t)^4} (2P_5 + S_{5(2)}) + \frac{3z^3 t^2}{(z-t)^5} C_{5(1)} - \\
 &\quad - \frac{z^3 t^3}{(z-t)^6} S_{5(1)} - \frac{t(z-t)}{3nz} (S_3' D_3' + 2C_3' A_3' + 3C_3' F_3'); \\
 A'_5 &= \frac{z^2}{(z-t)^2} A_5 - \frac{2z^2 t}{(z-t)^3} (Z_5 + C_{5(2)}) + \frac{z^2 t^2}{(z-t)^4} (5P_5 + S_{5(2)}) -
 \end{aligned} \right\} (24)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{4z^2t^3}{(z-t)^5} C_{5(1)} + \frac{z^2t^4}{(z-t)^6} S_{5(1)} - \frac{2t(z-t)}{3nz} (C'_3 D'_3 + A_3'^2 + A_3' F'_3); \\
F'_5 = & \frac{z^2}{(z-t)^2} F_5 - \frac{4z^2t}{(z-t)^3} C_{5(2)} + \frac{2z^2t^2}{(z-t)^4} (2P_5 + S_{5(2)}) - \\
& - \frac{4z^2t^3}{(z-t)^5} C_{5(1)} + \frac{z^2t^4}{(z-t)^6} S_{5(1)} - \frac{2t(z-t)}{3nz} (2C'_3 D'_3 + E_3'^2); \\
D'_5 = & \frac{z}{z-t} D_5 - \frac{zt}{(z-t)^2} (F_5 + 2A_5) + \frac{2zt^2}{(z-t)^3} (2Z_5 + 3C_{5(2)}) - \\
& - \frac{2zt^3}{(z-t)^4} (4P_5 + S_{5(2)}) + \frac{5zt^4}{(z-t)^5} C_{5(1)} - \frac{zt^5}{(z-t)^6} S_{5(1)} - \\
& - \frac{2t(z-t)}{3nz} (2A_3' D_3' + F_3' D_3'),
\end{aligned} \tag{24}$$

где n - показатель преломления среды между двумя плоскостями.

Внутри порядка сохраняется биномиальная форма преобразования коэффициентов, а что касается квадратичной зависимости от 3-го порядка, то нетрудно установить, что каждая aberrация 5-го порядка зависит от таких комбинаций aberrаций 3-го порядка, которые в сумме содержат полевые координаты в той же степени. Так, например, вторая кома ($C_{5(2)}$) содержит полевые координаты в степени 3 и зависит от следующих сочетаний aberrаций 3-го порядка: сферическая aberrация и дисторсия ($0+3-3$), кома и астигматизм ($1+2-3$), кома и кривизна поля ($1+2-3$).

В 7-м порядке формулы перехода еще более усложняются и содержат поправки уже трех видов:

$$\begin{aligned}
S'_{7(1)} = & \frac{z^8}{(z-t)^8} S_{7(1)} - \frac{24t(z-t)}{5nz} S'_{5(1)} S'_3 - \frac{24t^2(z-t)^2}{5n^2 z^2} S_3'^3 - \\
& - \frac{24t}{5nz(z-t)} S_3'^2; \\
C'_{7(1)} = & \frac{z^7}{(z-t)^7} C_{7(1)} - \frac{z^7 t}{(z-t)^8} S_{7(1)} - \frac{3t(z-t)}{5nz} (3S'_{5(1)} C'_3 + \\
& + 5C'_{5(1)} S'_3) - \frac{24t^2(z-t)^2}{5n^2 z^2} S_3'^2 C'_3 - \frac{8t}{5nz(z-t)} (3S_3' C'_3 - S_3'^2); \\
P'_{7(1)} = & \frac{z^6}{(z-t)^6} P_{7(1)} - \frac{2z^6 t}{(z-t)^7} C_{7(1)} + \frac{z^6 t^2}{(z-t)^8} S_{7(1)} - \\
& - \frac{2t(z-t)}{5nz} (S'_{5(1)} A'_3 + 7C'_{5(1)} C'_3 + 4P'_5 S'_3) - \frac{2t^2(z-t)^2}{15n^2 z^2} (7S_3'^2 A'_3 + \\
& + 29S_3' C_3'^2) - \frac{2t}{15nz(z-t)} (S_3'^2 - 16S_3' C'_3 + 6S_3' A'_3 + 13C_3'^2); \\
S'_{7(2)} = & \frac{z^6}{(z-t)^6} S_{7(2)} - \frac{2z^6 t}{(z-t)^7} C_{7(1)} + \frac{z^6 t^2}{(z-t)^8} S_{7(1)} - \\
& - \frac{6t(z-t)}{5nz} (S'_{5(1)} F'_3 + C'_{5(1)} C'_3 + 2S'_{5(2)} S'_3) - \frac{2t^2(z-t)^2}{5n^2 z^2} (7S_3'^2 F'_3 +
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
& + 5S'_3 C'^2_3) - \frac{2t}{5nz(z-t)} (S'^2_3 - 4S'_3 C'_3 + 6S'_3 F'_3 + C'^2_3) ; \\
M'_7 & = \frac{z^5}{(z-t)^5} M_7 - \frac{3z^5 t}{(z-t)^6} P_{7(1)} + \frac{3z^5 t^2}{(z-t)^7} C_{7(1)} - \frac{z^5 t^3}{(z-t)^8} S_{7(1)} - \\
& - \frac{3t(z-t)}{5nz} (2C'_{5(1)} A'_3 + 5P'_5 C'_3 + Z'_5 S'_3) - \frac{2t^2(z-t)^2}{5n^2 z^2} (7S'_3 C'_3 A'_3 + \\
& + 5C'^3_3) - \frac{2t}{5nz(z-t)} (S'_3 C'_3 - 2S'_3 A'_3 - 5C'^2_3 + 4C'_3 A'_3) ; \\
C'_{7(2)} & = \frac{z^5}{(z-t)^5} C_{7(2)} - \frac{z^5 t}{(z-t)^6} (S_{7(2)} + 2P_{7(1)} + \frac{3z^5 t^2}{(z-t)^7} C_{7(1)} - \\
& - \frac{z^5 t^3}{(z-t)^8} S_{7(1)}) - \frac{t(z-t)}{5nz} (S'_{5(1)} D'_3 + 5C'_{5(1)} F'_3 + 2C'_{5(1)} A'_3 + 6S'_{5(2)} C'_3 + \\
& + 4P'_5 C'_3 + 6C'_{5(2)} S'_3) - \frac{2t^2(z-t)^2}{15n^2 z^2} (3S'^2_3 D'_3 + 8S'_3 C'_3 A'_3 + 18S'_3 C'_3 F'_3 + 7C'^3_3) - \\
& - \frac{2t}{15nz(z-t)} (5S'_3 C'_3 - 4S'_3 A'_3 - 6S'_3 F'_3 + 3S'_3 D'_3 - 7C'^2_3 + 2C'_3 A'_3 + 9C'_3 F'_3) ; \\
B'_7 & = \frac{z^4}{(z-t)^4} B_7 - \frac{4z^4 t}{(z-t)^5} M_7 + \frac{6z^4 t^2}{(z-t)^6} P_{7(1)} - \frac{4z^4 t^3}{(z-t)^7} C_{7(1)} + \\
& + \frac{z^4 t^4}{(z-t)^8} S_{7(1)} - \frac{12t(z-t)}{5nz} (P'_5 A'_3 + Z'_5 C'_3) - \frac{4t^2(z-t)^2}{5n^2 z^2} (S'_3 A'^2_3 + \\
& + 5C'^2_3 A'_3) - \frac{4t}{5nz(z-t)} (C'^2_3 - 4C'_3 A'_3 + A'^2_3) ; \\
P'_{7(2)} & = \frac{z^4}{(z-t)^4} P_{7(2)} - \frac{2z^4 t}{(z-t)^5} (C_{7(2)} + M_7) + \frac{z^4 t^2}{(z-t)^6} (S_{7(2)} + 5P_{7(1)}) - \\
& - \frac{4z^4 t^3}{(z-t)^7} C_{7(1)} + \frac{z^4 t^4}{(z-t)^8} S_{7(1)} - \frac{2t(z-t)}{5nz} (C'_{5(1)} D'_3 + 2P'_5 A'_3 + \\
& + 2P'_5 F'_3 + S'_{5(2)} A'_3 + Z'_5 C'_3 + 4C'_{5(2)} C'_3 + A'_5 S'_3) - \frac{2t^2(z-t)^2}{15n^2 z^2} (6S'_3 C'_3 D'_3 + \\
& + 3S'_3 A'^2_3 + 5S'_3 A'_3 F'_3 + 12C'^2_3 A'_3 + 10C'^2_3 F'_3) - \frac{2t}{15nz(z-t)} (3S'_3 A'_3 + \\
& + S'_3 F'_3 - 3S'_3 D'_3 + 4C'^2_3 - 10C'_3 A'_3 - 8C'_3 F'_3 + 4C'_3 D'_3 + A'^2_3 + 3A'_3 F'_3) ; \\
S'_{7(3)} & = \frac{z^4}{(z-t)^4} S_{7(3)} - \frac{4z^4 t}{(z-t)^5} C_{7(2)} + \frac{2z^4 t^2}{(z-t)^6} (S_{7(2)} + 2P_{7(1)}) - \\
& - \frac{4z^4 t^3}{(z-t)^7} C_{7(1)} + \frac{z^4 t^4}{(z-t)^8} S_{7(1)} - \frac{4t(z-t)}{5nz} (C'_{5(1)} D'_3 + 2S'_{5(2)} F'_3 + \\
& + 2C'_{5(2)} C'_3 + F'_5 S'_3) - \frac{4t^2(z-t)^2}{15n^2 z^2} (6S'_3 C'_3 D'_3 + 5S'_3 F'^2_3 + 2C'^2_3 A'_3 + \\
& + 5C'^2_3 F'_3) - \frac{4t}{15nz(z-t)} (2S'_3 F'_3 - 4S'_3 D'_3 + 3C'^2_3 - 4C'_3 F'_3 + 2C'_3 D'_3 + 3F'^2_3) ;
\end{aligned}
\tag{25}$$

$$\begin{aligned}
Z'_7 &= \frac{z^3}{(z-t)^3} Z_7 - \frac{z^3 t}{(z-t)^4} (3P_{7(2)} + 2B_7) + \frac{z^3 t^2}{(z-t)^5} (3C_{7(2)} + \\
&+ 7M_7) - \frac{z^3 t^3}{(z-t)^6} (S_{7(2)} + 9P_{7(1)}) + \frac{5z^3 t^4}{(z-t)^7} C_{7(1)} - \frac{z^3 t^5}{(z-t)^8} S_{7(1)} - \\
&- \frac{3t(z-t)}{5nz} (P'_5 D'_3 + 2Z'_5 A'_3 + Z'_5 F'_3 + 2C'_{5(2)} A'_3 + 2A'_5 C'_3) - \\
&- \frac{2t^2(z-t)^2}{5n^2 z^2} (S'_3 A'_3 D'_3 + 2C'^2_3 D'_3 + 5C'_3 A'^2_3 + 4C'_3 A'_3 F'_3) - \\
&- \frac{2t}{5nz(z-t)} (3C'_3 A'_3 + C'_3 F'_3 - 2C'_3 D'_3 - 3A'^2_3 - 2A'_3 F'_3 + A'_3 D'_3) ; \\
C'_{7(3)} &= \frac{z^3}{(z-t)^3} C_{7(3)} - \frac{z^3 t}{(z-t)^4} (S_{7(3)} + 4P_{7(2)}) + \\
&+ \frac{2z^3 t^2}{(z-t)^5} (3C_{7(2)} + 2M_7) - \frac{2z^3 t^3}{(z-t)^6} (S_{7(2)} + 4P_{7(1)}) + \\
&+ \frac{5z^3 t^4}{(z-t)^7} C_{7(1)} - \frac{z^3 t^5}{(z-t)^8} S_{7(1)} - \frac{t(z-t)}{5nz} (4P'_5 D'_3 + 2S'_{5(2)} D'_3 + \\
&+ 4C'_{5(2)} A'_3 + 6C'_{5(2)} F'_3 + 4A'_5 C'_3 + 3F'_5 C'_3 + D'_5 S'_3) - \frac{4t^2(z-t)^2}{15n^2 z^2} (2S'_3 A'_3 D'_3 + \\
&+ 2S'_3 F'_3 D'_3 + 5C'^2_3 D'_3 + 2C'_3 A'^2_3 + 4C'_3 A'_3 F'_3 + 3C'_3 F'^2_3) - \frac{2t}{15nz(z-t)} (3S'_3 D'_3 + \\
&+ 6C'_3 A'_3 + 5C'_3 F'_3 - 10C'_3 D'_3 - 4A'_3 F'_3 + 2A'_3 D'_3 - 3F'^2_3 + 3F'_3 D'_3) ; \\
A'_7 &= \frac{z^2}{(z-t)^2} A_7 - \frac{2z^2 t}{(z-t)^3} (C_{7(3)} + 2Z_7) + \frac{z^2 t^2}{(z-t)^4} (S_{7(3)} + \\
&+ 10P_{7(2)} + 4B_7) - \frac{4z^2 t^3}{(z-t)^5} (2C_{7(2)} + 3M_7) + \frac{z^2 t^4}{(z-t)^6} (2S_{7(2)} + \\
&+ 13P_{7(1)}) - \frac{6z^2 t^5}{(z-t)^7} C_{7(1)} + \frac{z^2 t^6}{(z-t)^8} S_{7(1)} - \frac{2t(z-t)}{5nz} (2Z'_5 D'_3 + \\
&+ 2C'_{5(2)} D'_3 + 4A'_5 A'_3 + 2A'_5 F'_3 + F'_5 A'_3 + D'_5 C'_3) - \frac{2t^2(z-t)^2}{15n^2 z^2} (S'_3 D'^2_3 + \\
&+ 16C'_3 A'_3 D'_3 + 6C'_3 F'_3 D'_3 + 4A'^3_3 + 6A'^2_3 F'_3 + 3A'_3 F'^2_3) - \frac{2t}{15nz(z-t)} (6C'_3 D'_3 + \\
&+ 6A'^2_3 + 6A'_3 F'_3 + F'^2_3 - 12A'_3 D'_3 - 4F'_3 D'_3 + D'^2_3) ; \\
F'_7 &= \frac{z^2}{(z-t)^2} F_7 - \frac{6z^2 t}{(z-t)^3} C_{7(3)} + \frac{3z^2 t^2}{(z-t)^4} (S_{7(3)} + 4P_{7(2)}) - \\
&- \frac{4z^2 t^3}{(z-t)^5} (3C_{7(2)} + 2M_7) + \frac{3z^2 t^4}{(z-t)^6} (S_{7(2)} + 4P_{7(1)}) - \\
&- \frac{6z^2 t^5}{(z-t)^7} C_{7(1)} + \frac{z^2 t^6}{(z-t)^8} S_{7(1)} - \frac{6t(z-t)}{5nz} (2C'_{5(2)} D'_3 + \\
&+ F'_5 F'_3 + D'_5 C'_3) - \frac{2t^2(z-t)^2}{5n^2 z^2} (S'_3 D'^2_3 + 4C'_3 A'_3 D'_3 + 6C'_3 F'_3 D'_3 + F'^3_3) - \\
&- \frac{2t}{5nz(z-t)} (6C'_3 D'_3 + F'^2_3 - 4F'_3 D'_3 + D'^2_3) ;
\end{aligned}$$

(25)

$$\begin{aligned}
D'_7 = & \frac{z}{z-t} D_7 - \frac{zt}{(z-t)^2} (F_7 + 6A_7) + \frac{3zt^2}{(z-t)^3} (3C_{7(3)} + 4Z_7) - \\
& - \frac{zt^3}{(z-t)^4} (3S_{7(3)} + 24P_{7(2)} + 8B_7) + \frac{5zt^4}{(z-t)^5} (3C_{7(2)} + 4M_7) - \\
& - \frac{3zt^5}{(z-t)^6} (S_{7(2)} + 6P_{7(1)}) + \frac{7zt^6}{(z-t)^7} C_{7(1)} - \frac{zt^7}{(z-t)^8} S_{7(1)} - \\
& - \frac{3t(z-t)}{5nz} (4A'_5 D'_3 + F'_5 D'_3 + 2D'_5 A'_3 + D'_5 F'_3) - \frac{2t^2(z-t)^2}{5n^2 z^2} (3C'_3 D'^2_3 + \\
& + 4A'^2_3 D'_3 + 4A'_3 F'_3 D'_3 + F'^2_3 D'_3) - \frac{6t}{5nz(z-t)} (2A'_3 D'_3 + F'_3 D'_3 - D'^2_3) .
\end{aligned} \tag{25}$$

Первые два вида поправок в выражениях (25) (произведения коэффициентов 5-го и 3-го порядков и тройные произведения коэффициентов 3-го порядка) подчиняются закономерности, установленной для поправок в 5-м порядке, то есть суммарная степень полевых координат в абберациях, образующих комбинацию, совпадает со степенью полевых координат в соответствующей абберации 7-го порядка.

Третья поправка (квадратичная по коэффициентам $S'_3 - D'_3$) подчиняется несколько другим правилам. В выражение для данной абберации входят комбинации, которые содержат полевые координаты в той же степени или в меньшей, но не более, чем на два. Например, вторая кома в 7-м порядке ($C_{7(2)}$) содержит полевые координаты в степени 3 и зависит от следующих квадратичных комбинаций аббераций третьего порядка: сферическая абберация и кома ($0+1=1$), сферическая абберация и астигматизм или кривизна поля ($0+2=2$), сферическая абберация и дисторсия ($0+3=3$), квадрат комы ($1+1=2$), кома и астигматизм или кривизна поля ($1+2=3$). В квадратичной поправке имеет место и чередование знака комбинации в зависимости от четности суммарной степени полевых координат.

Необходимо также отметить, что не все из возможных комбинаций аббераций низших порядков фигурируют в поправках. Так, например, поправки для кривизны поля не содержат практически комбинаций, включающих астигматизм. В целом отмеченные закономерности построения формул перехода позволяют только с определенной степенью достоверности представить качественный вид аналогичных соотношений для 9-го и последующих порядков, но не дают возможности получить их точную форму.

Литература

1. Kohlschutter A., 1908, Diss., Gottingen.
2. Герцберггер М. Современная геометрическая оптика / Пер. с англ. М.: Изд.-во иностр. лит-ры, 1962, 487 с.
3. Buchdahl H.A. Optical Aberration Coefficients. London, Oxford Univ. Press, 1954.

4. Andersen T.B. Automatic Computation of Optical Aberration Coefficients//Appl. Optics, 1980, v.19, N 22, p. 3800-3816.
 5. Tatian B. Aberration balancing in Rotationally Symmetric Lenses//JOSA, 1974, v.64, p.1083-1091.
 6. Hopkins G.W. Proximate Ray Tracing and Optical Aberration Coefficients//JOSA, 1976, v.66, N 5, p.405-410.
 7. Бобров С.Т., Грейсух Г.И., Туркевич Ю.Г. Оптика дифракционных элементов и систем. Л.: Машиностроение, 1986, 223 с.
 8. Focke J. Higher Order Aberration Theory//Progress in Optics, 1965, v.4, p.1-36.
 9. Родионов С.А. Об изопланатизме в произвольных оптических системах//Оптика и спектроскопия, 1979, т.46, вып. 3, с.566-573.
 10. Родионов С.А. Автоматизация проектирования оптических систем. Л.: Машиностроение, 1982, 270 с.
 11. Чуриловский В.Н. Теория хроматизма и аберраций третьего порядка. Л.: Машиностроение, 1968, 312 с.
 12. Kovatchev M., Ilieva R. Aberration Characteristics of Optical Elements//Proc. SPIE, 1989, v.1183, p.138.
 13. Spencer G.N., Murty M.V.R.K. General Raytracing Procedure//J. of Opt. Soc.Am., 1962, v.52, N 6, p.672-678.
-