

С. Т. Бобров

АНАЛИТИЧЕСКИЙ И КОМПЬЮТЕРНЫЙ РАСЧЕТ АБЕРРАЦИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АБЕРРАЦИЙ НА КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

После того, как в предыдущих статьях были получены коэффициенты aberrаций тонких оптических элементов в 3-м, 5-м и 7-м порядках [1] и формулы преобразования aberrаций при распространении волнового фронта между двумя плоскостями [2], необходимо рассмотреть трансформацию aberrаций при переходе из плоскости на криволинейную поверхность: сферу и далее на асферическую поверхность вращения, а также обратно. Ограничимся вначале простой сферой, поскольку подавляющее большинство криволинейных поверхностей в оптических системах имеет именно такую форму.

Пусть плоскость M является касательной к сфере W в ее вершине, т.е. в точке пересечения с осью z (см. рис. 1). Начало координат поместим в вершину, координаты точки, направляющие косинусы и aberrации на сфере будем обозначать буквами со штрихами, эти же величины на плоскости – без штрихов. Уравнение сферы имеет вид:

$$\Delta z'(\xi', \eta') = r - r\sqrt{1 - \rho'^2/r^2}, \quad (1)$$

где ξ' , η' , $\Delta z'$ – координаты точки сферы в выбранной системе; $\rho'^2 = \xi'^2 + \eta'^2$; r – радиус кривизны, знак которого соответствует принятому в оптике правилу: $r > 0$, если центр сферы лежит правее ее вершины (как на рис. 1).

В соответствии с общей методикой, изложенной в [2], необходимо, задавшись волновыми aberrациями на плоскости, найти точку пересечения со сферой луча, проходящего через заданную точку плоскости (ξ, η) . Направ-

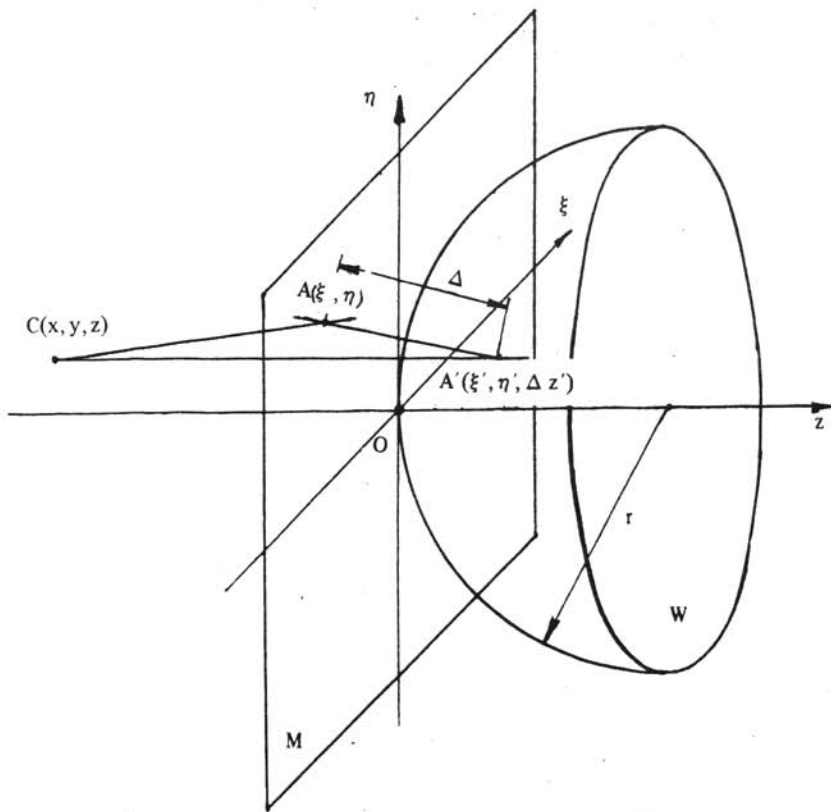


Рис. 1. Преобразование aberrаций при распространении волнового фронта между сферой и касательной плоскостью: AA' – реальный световой луч; C – центр кривизны волнового фронта; O – вершина поверхности

ляющие косинусы луча α_ξ, α_η в этом случае вычисляются так же, как при переходе из плоскости в плоскость и даются формулами (4) из [2]. Для нахождения расстояния Δ между точками пересечения луча с плоскостью и сферой можно воспользоваться геометрическими соображениями, как в [3], но в данном случае сделаем это чисто алгебраически. Координаты точки пересечения луча со сферой, как известно, равны [4]:

$$\xi' = \xi + \alpha_\xi \Delta; \eta' = \eta + \alpha_\eta \Delta; \Delta z' = \alpha_z \Delta, \quad (2)$$

но, с другой стороны, ξ', η' и $\Delta z'$ связаны уравнением (1). Решая (1) и (2) совместно, получаем квадратное уравнение относительно Δ , нужный корень которого равен:

$$\Delta = r\alpha_z - (\rho \cdot \alpha) - r\alpha_z \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{(r\alpha_z)^2} - \frac{2(\rho \cdot \alpha)}{r\alpha_z} + \frac{(\rho \cdot \alpha)^2}{(r\alpha_z)^2}}, \quad (3)$$

где $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$; $(\rho \cdot \alpha) = \xi\alpha_\xi + \eta\alpha_\eta$. Знак перед корнем в (3) выбран так, чтобы при $\rho^2 = 0$, т. е. когда луч проходит через вершину, расстояние Δ равнялось бы нулю.

Подставляя теперь (3) в (2), пользуясь для α_ξ, α_η выражениями (4) из [2] и располагая в ряд, получаем для координаты точки пересечения луча со сферой ξ' весьма громоздкое выражение, из которого приведем только несколько первых членов:

$$\xi' = \xi - \frac{1}{2} \frac{(\xi - x)\rho^2}{zr} + \frac{1}{2} \frac{(\xi - x)(R \cdot \rho)\rho^2}{z^2 r^2} - \frac{1}{8} \frac{(\xi - x)\rho^4}{zr^3} + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{r} G_\xi - \frac{1}{8} \frac{(\xi - x)R^2 \rho^4}{z^3 r^3} - \dots, \quad (4)$$

где x, y, z – координаты центра кривизны aberrированной сферической волны, падающей на рассматриваемые поверхности (см. [2]); G_ξ, G_η – угловые aberrации на плоскости. Координата η' находится по аналогичной формуле со взаимной заменой ξ на η и x на y .

Обратную зависимость ξ, η от ξ', η' найдем, воспользовавшись уже приведенными выражениями для распределения фазы волнового поля на криволинейной поверхности (формула (1) из [2]) и для направляющего косинуса луча, исходящего с этой поверхности (формула (2) из [2]). Применение указанных соотношений с учетом

уравнения сферы (1), а также того обстоятельства, что направляющие косинусы нормали к поверхности сферы в любой ее точке равны:

$$\beta'_\xi = -\frac{\xi'}{r}; \quad \beta'_\eta = -\frac{\eta'}{r}, \quad (5)$$

дает возможность получить выражение для направляющего косинуса луча в точке (ξ', η') в следующем виде:

$$\begin{aligned} \alpha'_\xi = & -\frac{\xi'-x}{z} + \frac{(\xi'-x)R^2}{2z^3} - \frac{(\xi'-x)\rho'^2}{2z^2r} + G'_\xi - \frac{3(\xi'-x)R^4}{8z^5} + \frac{3(\xi'-x)R^2\rho'^2}{4z^4r} - \frac{(\xi'-x)\rho'^4}{4z^3r^2} - \\ & - \frac{(\xi'-x)\rho'^4}{8z^2r^3} - \frac{\xi'(R' \cdot G')}{zr} + \frac{5(\xi'-x)R^6}{16z^7} - \frac{15(\xi'-x)R^4\rho'^2}{16z^6r} + \\ & + \frac{3(\xi'-x)R^2\rho'^4}{4z^5r^2} + \frac{3(\xi'-x)R^2\rho'^4}{16z^4r^3} - \frac{(\xi'-x)\rho'^6}{8z^4r^3} - \frac{(\xi'-x)\rho'^6}{8z^3r^4} - \frac{(\xi'-x)\rho'^6}{16z^2r^5} + \frac{\xi'(R' \cdot \rho')(R' \cdot G')}{z^2r^2} - \\ & - \frac{\xi'\rho'^2(R' \cdot G')}{2z^2r^2} - \frac{\xi'\rho'^2(R' \cdot G')}{2zr^3} + \frac{\xi'(G' \cdot G')}{2r}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $R^2 = (\xi' - x)^2 + (\eta' - y)^2$; $(R' \cdot \rho') = \xi'(\xi' - x) + \eta'(\eta' - y)$; $(R' \cdot G') = (\xi' - x)G'_\xi + (\eta' - y)G'_\eta$; $(G' \cdot G') = G'^2_\xi + G'^2_\eta$.

Расстояние от точки сферы до точки пересечения луча с плоскостью дается простой формулой $\Delta = \Delta z' / \alpha'_z$ (см. рис. 1, напомним, что при переходе со сферы на плоскость величина $\Delta z'$ заранее известна, тогда как при обратном — нет). В итоге получаем для координаты точки пересечения луча с плоскостью:

$$\xi = \xi' + \frac{(\xi' - x)\rho'^2}{2zr} + \frac{(\xi' - x)\rho'^4}{4z^2r^2} + \frac{(\xi' - x)\rho'^4}{8zr^3} - \frac{\rho'^2}{2r} G'_\xi + \frac{(\xi' - x)\rho'^6}{8z^3r^3} + \dots \quad (7)$$

Несколько первых членов этого выражения при сравнении с (4) показывают, что зависимости $\xi(\xi)$ и $\xi(\xi')$ не могут быть так просто получены друг из друга, как это делалось при рассмотрении перехода между плоскостями.

Подстановка (4) в (7) позволяет найти угловые aberrации на сфере в зависимости от угловых aberrаций на плоскости:

$$\left. \begin{aligned} G'_{3\xi}(\xi', \eta') &= G_{3\xi}(\xi', \eta'), \\ G'_{5\xi}(\xi', \eta') &= G_{5\xi}(\xi', \eta') + \Delta_5 \left\{ G_{3\xi} \left[\xi' + \frac{(\xi' - x)\rho'^2}{2zr} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \eta' + \frac{(\eta' - y)\rho'^2}{2zr} \right] \right\} + \frac{\rho'^2}{2r} G'_{3\xi} + \frac{\xi'}{zr} (R' \cdot G'_3); \\ G'_{7\xi}(\xi', \eta') &= G_{7\xi}(\xi', \eta') + \Delta_7 \left\{ G_{5\xi} \left[\xi' + \frac{(\xi' - x)\rho'^2}{2zr} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \eta' + \frac{(\eta' - y)\rho'^2}{2zr} \right] \right\} + \frac{\rho'^2}{2r} G'_{5\xi} + \frac{\xi'}{zr} (R' \cdot G'_5) + \\ &+ \Delta_7 \left\{ G_{3\xi} \left[\xi' + \frac{(\xi' - x)\rho'^2}{2zr} + \frac{(\xi' - x)\rho'^4}{4z^2r^2} + \frac{(\xi' - x)\rho'^4}{8zr^3} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\rho'^2}{2r} G'_{3\xi}, \eta' + \dots \right] \right\} - \frac{\xi'(R' \cdot \rho')}{z^2r^2} (R' \cdot G'_3) + \frac{\rho'^4}{8zr^3} G'_{3\xi} + \frac{\xi'\rho'^2}{2zr^3} (R' \cdot G'_3) - \frac{\xi'}{2r} (G'_3 \cdot G'_3), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где $\Delta_k \{G_m(\dots)\}$ означает те члены k -го порядка, которые получаются при подстановке в G_m указанного аргумента. Поправка к η' и угловые aberrации по другой координате вычисляются аналогично с заменой ξ на η .

Из (8) прежде всего следует, что aberrации 3-го порядка при рассматриваемом переходе не меняются (независимость от формы поверхности лежит в основе теории aberrаций третьего порядка). Кроме того, соотношения (8) показывают, что модификация aberrаций любого порядка определяется исключительно предыдущими, низшими порядками (в отличие от преобразования из плоскости в плоскость, см. [2]).

Обратная подстановка (4) в (7) дает возможность получить зависимость aberrаций в плоскости от aberrаций на сфере:

$$\left. \begin{aligned}
G_{5\xi}(\xi, \eta) &= G'_{5\xi}(\xi, \eta) + \Delta_5 \left\{ G_{3\xi} \left[\xi - \frac{(\xi-x)\rho^2}{2zr}, \eta - \frac{(\eta-y)\rho^2}{2zr} \right] \right\} - \frac{\rho^2}{2r} G_{3\xi} - \frac{\xi}{zr} (R \cdot G_3); \\
G_{7\xi}(\xi, \eta) &= G'_{7\xi}(\xi, \eta) + \Delta_7 \left\{ G_{5\xi} \left[\xi - \frac{(\xi-x)\rho^2}{2zr}, \eta - \frac{(\eta-y)\rho^2}{2zr} \right] \right\} - \frac{\rho^2}{2r} G_{5\xi} - \frac{\xi}{zr} (R \cdot G_5) + \\
&+ \Delta_7 \left\{ G_{3\xi} \left[\xi - \frac{(\xi-x)\rho^2}{2zr} + \frac{(\xi-x)(R \cdot \rho)\rho^2}{2z^2r^2} - \frac{(\xi-x)\rho^4}{8zr^3} + \frac{\rho^2}{2r} G_{3\xi}; \eta - \dots \right] \right\} + \frac{(R \cdot \rho)\rho^2}{2z^2r^2} G_{3\xi} + \\
&+ \frac{(\xi-x)\rho^2}{2z^2r^2} (R \cdot G_3) - \frac{\rho^4}{4z^2r^2} G_{3\xi} - \frac{\xi\rho^2}{2z^2r^2} (R \cdot G_3) - \frac{\rho^4}{8zr^3} G_{3\xi} - \frac{\xi\rho^2}{2zr^3} (R \cdot G_3) + \frac{\xi}{2r} (G_3 \cdot G_3).
\end{aligned} \right\} \quad (9)$$

В 5-м порядке выражения (9) получаются из (8) простой заменой знака, но в 7-м порядке указанная симметрия нарушается.

Подстановка в (8, 9) аббераций в канонической форме (выражения (1) из [1]) дает возможность найти формулы преобразования коэффициентов конкретных видов аббераций. Как уже оговаривалось, коэффициенты аббераций в плоскости обозначаются без штрихов, а на сфере – со штрихами, при этом коэффициенты 3-го порядка везде фигурируют без штрихов, поскольку они одинаковы на обеих поверхностях. Итак, для перехода с плоскости на сферу получаем:

$$\left. \begin{aligned}
S'_{5(1)} &= S_{5(1)} + \frac{4}{zr} S_3; \quad C'_{5(1)} = C_{5(1)} - \frac{2}{3zr} (S_3 - 3C_3); \quad P'_5 = P_5 - \frac{2}{3zr} (C_3 - A_3); \\
S'_{5(2)} &= S_{5(2)} - \frac{4}{3zr} (C_3 - F_3); \quad Z'_5 = Z_5; \quad C'_{5(2)} = C_{5(2)} - \frac{1}{3zr} (2A_3 + F_3 - D_3); \quad A'_5 = A_5; \\
F'_5 &= F_5 - \frac{4}{3zr} D_3; \quad D'_5 = D_5; \quad S'_{7(1)} = S_{7(1)} + \frac{24}{5zr} S'_{5(1)} - \frac{56}{5z^2r^2} S_3 + \frac{8}{5zr^3} S_3 - \frac{8}{5r} S_3^2; \\
C'_{7(1)} &= C_{7(1)} - \frac{3}{5zr} (S'_{5(1)} - 5C'_{5(1)}) + \frac{2}{5z^2r^2} (7S_3 - 9C_3) - \frac{1}{5zr^3} (S_3 - 3C_3) - \frac{6}{5r} S_3 C_3; \\
P'_{7(1)} &= P_{7(1)} - \frac{4}{5zr} (C'_{5(1)} - 2P'_5) - \frac{2}{15z^2r^2} (3S_3 - 14C_3 + 5A_3) - \frac{2}{15zr^3} (C_3 - A_3) - \frac{4}{15r} (S_3 A_3 + 2C_3^2); \\
S'_{7(2)} &= S_{7(2)} - \frac{6}{5zr} (C'_{5(1)} - 2S'_{5(2)}) - \frac{2}{5z^2r^2} (S_3 - 8C_3 + 5F_3) - \frac{2}{5zr^3} (C_3 - F_3) - \frac{2}{5r} (2S_3 F_3 + C_3^2); \\
M'_7 &= M_7 - \frac{3}{5zr} (P'_5 - Z'_5) - \frac{2}{5z^2r^2} (C_3 - A_3) - \frac{2}{5r} C_3 A_3; \\
C'_{7(2)} &= C_{7(2)} - \frac{2}{5zr} (2P'_5 + S'_{5(2)} - 3C'_{5(2)}) - \frac{2}{15z^2r^2} (5C_3 - 6A_3 - \\
&- 5F_3 + 2D_3) - \frac{1}{15zr^3} (2A_3 + F_3 - D_3) - \frac{2}{15r} (S_3 D_3 + 2C_3 A_3 + 3C_3 F_3); \\
P'_{7(2)} &= P_{7(2)} - \frac{2}{5zr} (Z'_5 + C'_{5(2)} - A'_5) - \frac{2}{15z^2r^2} (2A_3 + F_3 - D_3) - \frac{2}{15r} (C_3 D_3 + A_3^2 + A_3 F_3); \\
B'_7 &= B_7; \quad S'_{7(3)} = S_{7(3)} - \frac{4}{5zr} (2C'_{5(2)} - F'_5) - \frac{4}{15z^2r^2} (2A_3 + F_3 - 4D_3) - \frac{4}{15zr^3} D_3 - \frac{4}{15r} (2C_3 D_3 + F_3^2); \\
C'_{7(3)} &= C_{7(3)} - \frac{1}{5zr} (4A'_5 + F'_5 - D'_5) - \frac{4}{15z^2r^2} D_3 - \frac{2}{15r} (2A_3 D_3 + F_3 D_3); \quad Z'_7 = Z_7; \\
A'_7 &= A_7; \quad F'_7 = F_7 - \frac{6}{5zr} D'_5 - \frac{1}{3r} D_3^2; \quad D'_7 = D_7.
\end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Обратный переход со сферы на плоскость выражается следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned}
S_{5(1)} &= S'_{5(1)} - \frac{4}{zr} S_3; \quad C_{5(1)} = C'_{5(1)} + \frac{2}{3zr} (S_3 - 3C_3); \quad P_5 = P'_5 + \frac{2}{3zr} (C_3 - A_3); \\
S_{5(2)} &= S'_{5(2)} + \frac{4}{3zr} (C_3 - F_3); \quad Z_5 = Z'_5; \quad C_{5(2)} = C'_{5(2)} + \frac{1}{3zr} (2A_3 + F_3 - D_3); \\
A_5 &= A'_5; \quad F_5 = F'_5 + \frac{4}{3zr} D_3; \quad D_5 = D'_5; \quad S_{7(1)} = S'_{7(1)} - \frac{24}{5zr} S_{5(1)} - \\
&- \frac{8}{z^2r^2} S_3 - \frac{8}{5zr^3} S_3 + \frac{8}{5r} S_3^2; \quad C_{7(1)} = C'_{7(1)} + \frac{3}{5zr} (S_{5(1)} - 5C'_{5(1)}) + \frac{4}{5z^2r^2} (2S_3 - 3C_3) + \\
&+ \frac{1}{5zr^3} (S_3 - 3C_3) + \frac{6}{5r} S_3 C_3; \quad P_{7(1)} = P'_{7(1)} + \frac{4}{5zr} (C_{5(1)} - 2P_5) - \frac{4}{15z^2r^2} (S_3 - 6C_3 + 3A_3) + \\
&+ \frac{2}{15zr^3} (C_3 - A_3) + \frac{4}{15r} (S_3 A_3 + 2C_3^2);
\end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
S_{7(2)} &= S'_{7(2)} + \frac{6}{5zr}(C_{5(1)} - 2S_{5(2)}) - \frac{2}{5z^2r^2}(S_3 - 6C_3 + 3F_3) + \\
&+ \frac{2}{5zr^3}(C_3 - F_3) + \frac{2}{5r}(2S_3F_3 + C_3^2); \\
M_7 &= M'_7 + \frac{3}{5zr}(P_5 - Z_5) + \frac{2}{5r}C_3A_3; \\
C_{7(2)} &= C'_{7(2)} + \frac{2}{5zr}(2P_5 + S_{5(2)} - 3C_{5(2)}) - \frac{2}{15z^2r^2}(3C_3 - 4A_3 - 2F_3 + D_3) + \\
&+ \frac{1}{15zr^3}(2A_3 + F_3 - D_3) + \frac{2}{15r}(S_3D_3 + 2C_3A_3 + 3C_3F_3); \\
P_{7(2)} &= P'_{7(2)} + \frac{2}{5zr}(Z_5 + C_{5(2)} - A_5) + \frac{2}{15r}(C_3D_3 + A_3^2 + A_3F_3); \\
B_7 &= B'_7; \quad Z_7 = Z'_7; \quad S_{7(3)} = S'_{7(3)} + \frac{4}{5zr}(2C_{5(2)} - F_5) - \frac{4}{15z^2r^2}(2A_3 + F_3 - 2D_3) + \\
&+ \frac{4}{15zr^3}D_3 + \frac{4}{15r}(2C_3D_3 + F_3^2); \\
C_{7(3)} &= C'_{7(3)} + \frac{1}{5zr}(4A_5 + F_5 - D_5) + \frac{2}{15r}(2A_3D_3 + F_3D_3); \\
A_7 &= A'_7; \quad F_7 = F'_7 + \frac{6}{5zr}D_5 + \frac{1}{3r}D_3^2; \quad D_7 = D'_7.
\end{aligned} \tag{11}$$

В построении формул (10, 11) можно выявить определенные закономерности, но, как и в случае перехода между плоскостями, они не позволяют однозначно написать аналогичные соотношения для последующих порядков абберационного разложения.

Теперь остается рассмотреть переход со сферы на асферическую поверхность с тем же радиусом кривизны r в общей вершине. Величины, относящиеся к сфере, будем обозначать по-прежнему со штрихами, к асферической поверхности — без штрихов. Методика вычисления аббераций все та же с той лишь разницей, что промежуточные выкладки в этом случае оказываются наиболее громоздкими, а заключительные результаты — наиболее простыми.

Начнем с перехода на асферику. Направляющие косинусы $\alpha'_\xi, \alpha'_\eta, \alpha'_z$ луча, пересекающего сферу в точке $(\xi', \eta', \Delta z')$, даются уже известными выражениями (6). Необходимо найти точку пересечения этого луча с асферику, уравнение которой представим в следующем виде:

$$\Delta z - \frac{\rho^2}{2r} - \frac{\rho^4}{8r^3}(1 + \sigma_{30}) - \frac{\rho^6}{16r^5}(1 + \sigma_{50}) - \frac{5\rho^8}{128r^7}(1 + \sigma_{70}) = 0, \tag{12}$$

где $\sigma_{30} - \sigma_{70}$ — коэффициенты асферичности поверхности (см. [1]).

Воспользуемся итерационной методикой, описанной в [4]. Координаты точки пересечения с асферику $(\xi, \eta, \Delta z)$ выражаются, как обычно, через расстояние Δ от сферы до этой точки:

$$\xi = \xi' + \alpha'_\xi \Delta; \quad \eta = \eta' + \alpha'_\eta \Delta; \quad \Delta z = \Delta z' + \alpha'_z \Delta, \tag{13}$$

а каждое последующее приближение Δ вычисляется по формуле:

$$\Delta' = \Delta - \frac{F(\xi, \eta, \Delta z)}{\alpha'_\xi \frac{\partial F}{\partial \xi} + \alpha'_\eta \frac{\partial F}{\partial \eta} + \alpha'_z \frac{\partial F}{\partial (\Delta z)}}, \tag{14}$$

где $F(\xi, \eta, \Delta z)$ — уравнение асферики в неявном виде [т.е. левая часть (12)], в которое подставляются координаты точки, полученные для предыдущего приближения. Начальное значение $\Delta = 0$ позволяет в несколько итераций с нужной точностью вычислить Δ и координаты ξ, η .

Для обратного перехода с асферики необходимо через абберации на ее поверхности найти направляющий косинус луча. Это осуществляется с помощью выражений (1, 2) из [2] с учетом уравнения поверхности (12), а также того обстоятельства, что направляющие косинусы нормали к поверхности в этом случае равны:

$$\left. \begin{aligned}
\beta_\xi &= -\frac{\xi}{r} - \frac{\xi\rho^2}{2r^3}\sigma_{30} - \frac{3\xi\rho^4}{8r^5}(\sigma_{50} - 2\sigma_{30}) - \frac{5\xi\rho^6}{16r^7}(\sigma_{70} - \frac{9}{5}\sigma_{50} + \frac{3}{5}\sigma_{30} - \frac{6}{5}\sigma_{30}^2); \\
\beta_\eta &= -\frac{\eta}{r} - \frac{\eta\rho^2}{2r^3}\sigma_{30} - \frac{3\eta\rho^4}{8r^5}(\sigma_{50} - 2\sigma_{30}) - \frac{5\eta\rho^6}{16r^7}(\sigma_{70} - \frac{9}{5}\sigma_{50} + \frac{3}{5}\sigma_{30} - \frac{6}{5}\sigma_{30}^2).
\end{aligned} \right\} \tag{15}$$

В итоге направляющий косинус в точке $(\xi, \eta, \Delta z)$ равен:

$$\alpha_{\xi} = -\frac{\xi-x}{z} + \frac{(\xi-x)R^2}{2z^3} - \frac{(\xi-x)\rho^2}{2z^2r} - \frac{3(\xi-x)R^4}{8z^5} + \frac{3(\xi-x)R^2\rho^2}{4z^4r} - \frac{(\xi-x)\rho^4}{4z^3r^2} - \frac{(\xi-x)\rho^4}{8z^2r^3} (1+\sigma_{30}) + \frac{5(\xi-x)R^6}{16z^7} - \frac{15(\xi-x)R^4\rho^2}{16z^6r} + \frac{3(\xi-x)R^2\rho^4}{4z^5r^2} + \frac{3(\xi-x)R^2\rho^4}{16z^4r^3} (1+\sigma_{30}) - \frac{(\xi-x)\rho^6}{8z^4r^3} - \frac{(\xi-x)\rho^6}{8z^3r^4} (1+\sigma_{30}) - \frac{(\xi-x)\rho^6}{16z^2r^5} (1+\sigma_{50}) + G_{\xi} - \frac{\xi}{zr} (R \cdot G) + \frac{\xi(R \cdot \rho)}{z^2r^2} (R \cdot G) - \frac{\xi\rho^2}{2z^2r^2} (R \cdot G) - \frac{\xi\rho^2}{2zr^3} (R \cdot G) (1+\sigma_{30}) + \frac{\xi}{2r} (G \cdot G), \quad (16)$$

которое сводится к (6) при $\sigma_{30} = \sigma_{50} = 0$.

Координаты точки пересечения луча со сферой определим так же, как и для перехода из плоскости, но в рассматриваемом случае третья из уравнений (2) изменяется на:

$$\Delta z' = \Delta z + \alpha_z \Delta, \quad (17)$$

что приводит к следующему выражению для:

$$\Delta = r\alpha_z - \Delta z\alpha_z - (\rho \cdot \alpha) - r\alpha_z \left\{ 1 - \frac{\rho^2}{(r\alpha_z)^2} - \frac{(\rho \cdot \alpha)}{r\alpha_z} + \frac{(\rho \cdot \alpha)^2}{(r\alpha_z)^2} - \frac{\Delta z}{r} \left(1 - \frac{2\Delta z}{r} \right) \left(\frac{1}{\alpha_z^2} - 1 \right) - \frac{2\Delta z}{r^2} \frac{(\rho \cdot \alpha)}{\alpha_z} \right\}^{1/2}. \quad (18)$$

Выражения (16) и (18) позволяют найти координаты точки пересечения со сферой (ξ', η') в зависимости от угловых аберраций на асферике.

Выражения для (ξ, η) и (ξ', η') не приводятся здесь в силу их громоздкости, хотя взаимные подстановки дают в результате достаточно простые результаты. Как и следовало ожидать, при переходе со сферы на асферику и обратно не изменяются аберрации не только 3-го, но и 5-го порядка, а для аберраций 7-го порядка имеет место следующая формула:

$$\left. \begin{aligned} G_{7\xi}(\xi, \eta) &= G'_{7\xi}(\xi, \eta) + \Delta_7 \left\{ G_{3\xi} \left[\xi - \frac{(\xi-x)\rho^4}{8zr^3} \sigma_{30}, \right. \right. \\ \left. \left. \eta - \frac{(\eta-y)\rho^4}{8zr^3} \sigma_{30} \right] - \frac{\sigma_{30}\rho^4}{8zr^3} G_{3\xi} - \frac{\sigma_{30}\xi\rho^2}{2zr^3} (R \cdot G_3), \right. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где со штрихами фигурируют аберрации на сфере, а без штрихов — на асферической поверхности. Подстановка в (19) аберраций в каноническом виде приводит к следующим соотношениям для коэффициентов аберраций (напомним, что коэффициенты 3-го и 5-го порядков одинаковы для обеих поверхностей):

$$\left. \begin{aligned} S_{7(1)} &= S'_{7(1)} - \frac{8\sigma_{30}}{5zr^3} S_3; \quad C_{7(1)} = C'_{7(1)} + \frac{\sigma_{30}}{5zr^3} (S_3 - 3C_3); \\ P_{7(1)} &= P'_{7(1)} + \frac{2\sigma_{30}}{15zr^3} (C_3 - A_3); \quad S_{7(2)} = S'_{7(2)} + \frac{2\sigma_{30}}{5zr^3} (C_3 - F_3); \\ C_{7(2)} &= C'_{7(2)} + \frac{\sigma_{30}}{15zr^3} (2A_3 + F_3 - D_3); \quad M_7 = M'_7; \quad B_7 = B'_7; \quad P_{7(2)} = P'_{7(2)}; \\ S_{7(3)} &= S'_{7(3)} + \frac{4\sigma_{30}}{15zr^3} D_3; \quad Z_7 = Z'_7; \quad C_{7(3)} = C'_{7(3)}; \quad A_7 = A'_7; \quad F_7 = F'_7; \quad D_7 = D'_7. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Таким образом наличие соотношений (10, 11) и (20), а также формул перехода с плоскости на плоскость, полученных в [2], дает возможность пересчитать аберрации, заданные на асферической поверхности, на другую такую же поверхность, отстоящую от первой на заданное расстояние. В совокупности с коэффициентами аберраций тонких оптических элементов, полученными в [1], это решает задачу расчета (как аналитического, так и численного) аберраций 3–7-го порядков в центрированных оптических системах.

Л и т е р а т у р а

1. *Бобров С. Т.* Аналитический и компьютерный расчет aberrаций высших порядков: 1. Общие положения и aberrации тонких элементов//Компьютерная оптика: Сб./МЦНТИ, М., 1992, вып. 10–11.
2. *Бобров С. Т.* Аналитический и компьютерный расчет aberrаций высших порядков: 2. Преобразование aberrаций из плоскости в плоскость//Компьютерная оптика: Сб./МЦНТИ, М., 1992, вып. 10–11.
3. *Бобров С. Т., Грейсх Г. И., Туркевич Ю. Г.* Оптика дифракционных элементов и систем. Л.: Машиностроение, 1986, 223 с.
4. *Spencer G. N., Murty M. V. R. K.* General ray-tracing procedure. — J. of Opt. Soc. Am., 1962, v. 52, No. 6, p. 672–678.

* * *