ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ

В. В. Котляр, В. А. Сойфер

"ВИНТОВОЙ" ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ФАЗОВЫЙ ФИЛЬТР

ВВЕДЕНИЕ

Впервые "винтовые" фазовые фильтры были упомянуты в [1], где было предложено выражение для функции пропускания пространственного фазового фильтра, фокусирующего в узкое кольцо. В [2] были описаны "винтовые" дислокации когерентного волнового поля. В местах таких дислокаций волновой фронт описывается комплексной амплитудой, фазовая часть которой тождественна фазовой функции пропускания "винтового" фильтра из [1]. В работе [3] "винтовой" фазовый фильтр применен для реализации оптического преобразования Ханкеля. Также в [3] впервые сообщается о реализации такого фильтра с помощью технологии компьютерной оптики. В [4] описано применение "винтового" фазового фильтра для задач оптической обработки информации: выполнения операции дифференцирования и оптического осуществления преобразования Гильберта для радиально-симметричных когерентных световых полей.

В данной работе приводятся новые аналитические выражения, связанные с дифракцией когерентного света на "винтовых" фазовых фильтрах.

"ВИНТОВОЙ" ФИЛЬТР ДЛЯ ФОКУСИРОВКИ В КОЛЬЦО

Под "винтовым" фазовым фильтром здесь понимается пространственный фильтр с функцией комплексного пропускания $F(\rho,\varphi)$ вида

$$F(\rho,\varphi) = A(\rho)\, e^{im\varphi}, \tag{1}$$

где $m = 1, 2, 3, \ldots$, $A(\rho)$ – амплитудно-фазовая функция, зависящая только от радиальной переменной, (ρ,φ) – полярные координаты в плоскости фильтра.

В [1] предлагалось использовать для фокусировки в кольцо оптический фазовый элемент с функцией пропускания $F_1(\rho,\varphi)$ вида

$$F_1(\rho,\varphi) = \operatorname{sgn}\left\{J_m(\alpha\rho)\right\} e^{im\varphi}, \tag{2}$$

где $\operatorname{sgn}\left\{f(x)\right\}$ – знакомая функция, $J_m(x)$ – функция Бесселя первого рода m-го порядка. Оптическая схема для расположения фильтра (2) согласно [1] показана на рис. 1. Обозначения на рис. 1 следующие: λ – длина волны света, a – радиус линзы и фильтра, которые расположены вплотную друг к другу, f – фокальное расстояние линзы, R – радиус кольцевого распределения интенсивности света в фокальной плоскости.

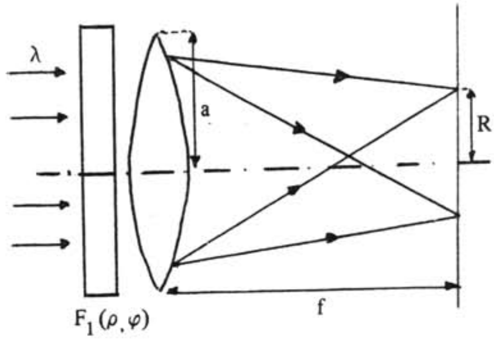

Рис. 1

Обоснование, что фильтр (2) формирует кольцо в фокальной плоскости линзы, в работе [1] дано с привлечением результатов численного моделирования. Понять же это можно следующим образом. Если бы пропускание фильтра $F_1(\rho,\varphi)$ имело бы вид

$$\widetilde{F}_1(\rho,\varphi) = J_m(\alpha\rho)\, e^{im\varphi}, \tag{3}$$

то в фокальной плоскости световое поле, продифрагировавшее на таком фильтре, имело бы распределение амплитуды $\Phi(r,\psi)$ в виде

$$\Phi(r,\psi) = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \widetilde{F}_1(\rho,\varphi) \exp\left[\frac{ik}{f} r\rho\cos(\varphi-\psi)\right] \rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= e^{im\psi}\int_0^{\infty} J_m(\alpha\rho)\, J_m\left(\frac{k}{f} r\rho\right)\rho\, d\rho = e^{im\psi}\,\delta\left(\alpha - \frac{k}{f} r\right), \tag{4}$$

где k – волновое число света, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. То есть распределение интенсивности было бы в виде бесконечно узкого кольца с радиусом $R = \frac{\alpha f}{k}$. Если в функции пропускания $\widetilde{F}_1(\rho,\varphi)$ заменить амплитудную часть на единицу, а оставить только фазовую часть, при этом получим функцию пропускания (2) вместо (3), то основная часть энергии излучения, из-за сохранения фазовой части функции пропускания, по-прежнему будет фокусироваться в кольцо с радиусом $R = \frac{\alpha f}{k}$, а оставшаяся часть падающей на фильтр (2) энергии (около 20%) будет собираться в кольца с другими радиусами.

Оказывается можно сформировать световое поле перед линзой (рис. 1), описываемое комплексной амплитудой вида (3), с помощью фазового пространственного фильтра с пропусканием

$$F_2(\rho,\varphi) = e^{i(-\alpha\rho + m\varphi)},\quad \alpha > 0, \tag{5}$$

причем данный фильтр будет уже всю энергию (за исключением дифракционных потерь) фокусировать в кольцо с радиусом $R = \frac{\alpha f}{k}$.

Наличие "винтовой" составляющей в функции пропускания (5) обеспечивает отсутствие изолированного максимума энергии в нулевой пространственной частоте фокальной плоскости. Заметим, что радиально-линейная составляющая фазы в функции пропускания описывает пропускание аксикона, который уже применялся для фокусировки в кольцо [5].

Получим выражение, описывающее максимальное значение интенсивности света в кольце на радиусе $R = \frac{\alpha f}{k}$ в зависимости от параметра α аксикона или от требуемого радиуса кольца R. Распределение комплексной амплитуды света $\Phi(r,\psi)$ в фокальной плоскости линзы для пропускания фильтра (5) будет иметь вид

$$\Phi(r,\psi) = \frac{k}{f} e^{ikf} e^{i\frac{k}{2f}r^2}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-i\alpha\rho}\, e^{im\varphi}\, e^{i\frac{k}{f} r\rho\cos(\varphi-\psi)}\rho\, d\rho\, d\varphi. \tag{6}$$

Максимальное значение модуля $|\Phi(r,\psi)|$ находится из условия равенства нулю фазы в подынтегральном выражении (6), то есть при условии

$$\alpha\rho = \frac{k}{f} r\rho\cos(\varphi-\psi),$$

которое выполняется для точек кольца с радиусом $\alpha = \frac{k}{f} r$ или

$$R = \frac{\alpha f}{k}. \tag{7}$$

При этом условии вместо (6) получим выражение

$$\Phi(R,\psi) = \frac{k}{f} e^{ikf} e^{im\psi} e^{i\frac{k}{2f}R^2}\int_0^{a} e^{-i\alpha\rho} J_m(\alpha\rho)\,\rho\, d\rho. \tag{8}$$

Пусть далее для простоты m = 1, тогда, воспользовавшись известным выражением (стр. 39 в [6])

$$\int_0^{\xi} e^{ix} J_1(x)\, x\, dx = \frac{\xi^2 e^{i\xi}}{3} [J_1(\xi) - i J_2(\xi)], \tag{9}$$

получим для максимальной интенсивности в Фурье-плоскости I(R) выражение

$$I(R) = |\Phi(R, \psi)|^2 = \left(\frac{k}{f}\right)^2 \frac{a^4}{9} [J_1^2(\alpha a) + J_2^2(\alpha a)], \tag{10}$$

или в обозначениях: $\omega = \dfrac{f}{ka}$ – радиус дифракционного пятна, R – радиус требуемого кольца, получим следующее выражение

$$I(R) = \frac{1}{18\pi} \left(\frac{a}{\omega}\right)^2 \left[J_1^2\left(\frac{R}{\omega}\right) + J_2^2\left(\frac{R}{\omega}\right)\right]. \tag{11}$$

Из (11) видно, что при стремлении R к нулю интенсивность на кольце стремится к нулю как R^2, а при стремлении R к бесконечности интенсивность на кольце стремится к нулю как R^{-1}.

Аналогичное выражение можно получить и при m = 0, то есть для случая, когда в качестве фильтра используется только аксикон без "винтовой" составляющей. При этом вместо (9) воспользуемся выражением (стр. 39 в [6])

$$\int_0^{\xi} e^{ix} J_0(x)\, x\, dx = e^{i\xi} \left\{ \left[\xi J_1(\xi) - \frac{\xi^2}{3} J_2(\xi)\right] + i \frac{\xi^2}{3} J_1(\xi) \right\}. \tag{12}$$

Тогда получим выражение для максимальной интенсивности на кольце, сформированном только аксиконом

$$I_1(R) = \frac{1}{18\pi} \left(\frac{a}{\omega}\right)^2 \left[J_1^2\left(\frac{R}{\omega}\right) + J_2^2\left(\frac{R}{\omega}\right)\right] + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{a}{\omega}\right)^2 \left[J_1^2\left(\frac{R}{\omega}\right) \cdot \left(\frac{R}{\omega}\right)^{-2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{3} \left(\frac{R}{\omega}\right)^{-1} J_1\left(\frac{R}{\omega}\right) J_2\left(\frac{R}{\omega}\right)\right]. \tag{13}$$

Из сравнения (11) и (13) видно, что выражение для I_1 (R) отличается от выражения для I(R) слагаемым (второе слагаемое в квадратных скобках в (13)), которое при стремлении R к нулю не зануляется, а стремится к постоянной $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{a}{\omega}\right)^2$. Это подтверждает вывод о том, что наличие в оптическом элементе для фокусировки в кольцо "винтовой" фазовой составляющей обеспечивает отсутствие излучения в центре плоскости фокусировки.

Из сравнения (11) и (13) также видно, что при увеличении R второе слагаемое в квадратных скобках в (13) становится гораздо меньше первого слагаемого. То есть выражения для I_1 (R) и I(R) становятся почти одинаковыми при $R \gg \omega$. Это означает, что при фокусировке в кольцо с радиусом много большим радиуса дифракционного пятна добавление "винтового" фильтра не приводит к заметным преимуществам по сравнению с использованием только одного аксикона.

ДИФРАКЦИЯ СВЕТА НА "ВИНТОВОМ" ФАЗОВОМ ФИЛЬТРЕ

Получим выражение для распределения интенсивности света в зоне дифракции Френеля для случая освещения плоской монохроматической волной фазового фильтра с функцией комплексного пропускания в виде $F_3(\varphi) = \exp(i\varphi)$. В этом случае комплексная амплитуда светового поля $\Phi(\rho, \psi; z)$ получается как результат преобразования Френеля-Бесселя от функции $F_3(\varphi)$:

$$\Phi(\rho, \psi; z) = \frac{k}{z} e^{ikz} e^{-\frac{ik}{2z}\rho^2} \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{i\varphi} e^{-\frac{ik}{2z}r^2} e^{i\frac{k}{z} r\rho\cos(\varphi-\psi)}\, r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \frac{k}{z} e^{ikz} e^{-\frac{ik}{2z}\rho^2} e^{im\psi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{ik}{2z}r^2} J_1\left(\frac{k}{z} r\rho\right) r\, dr. \tag{14}$$

Далее используя выражение (стр. 198 в [6])

$$\int_0^{\infty} x e^{-ibx^2} J_1(cx)\, dx = \frac{c}{8b} \sqrt{\frac{\pi}{b}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{c^2}{8b}} \left[i J_0\left(\frac{c^2}{8b}\right) + J_1\left(\frac{c^2}{8b}\right)\right], \tag{15}$$

получим вместо (14) следующее выражение

$$\Phi(\rho, \psi; z) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi k}{2z}}\, \rho\, e^{iA(\rho,\psi)} \left[i J_0\left(\frac{k}{4z}\rho^2\right) + J_1\left(\frac{k}{4z}\rho^2\right)\right], \tag{16}$$

где $A(\rho, \psi) = kz + m\psi - \dfrac{k}{2z}\rho^2 - \dfrac{\pi}{4}$.

Окончательное выражение для интенсивности света в зоне дифракции Френеля для случая падения плоской волны на "винтовой" фазовый фильтр имеет вид

$$I(x) = \frac{\pi}{2} x^2 [J_0^2(x^2) + J_1^2(x^2)], \tag{17}$$

где $x = \rho\sqrt{\frac{k}{4z}}$. Вид функции $I(x)$ показан на рис. 2. Из рисунка видно, что по мере распространения света в пространстве за фильтром в центральной части светового пучка образуется область с пониженной интенсивностью, которая расширяется пропорционально расстоянию z. Радиус этой области пониженной интенсивности равен $x_0 \simeq 1$ или $\rho_0 \simeq 2\sqrt{\frac{z}{k}}$. Так как интеграл в (14) берется в бесконечных пределах, то есть считается, что размеры фильтра не ограничены, то величина интенсивности $I(x)$ не спадает при стремлении ρ к бесконечности, а асимптотически стремится к постоянному значению (см. рис. 2).

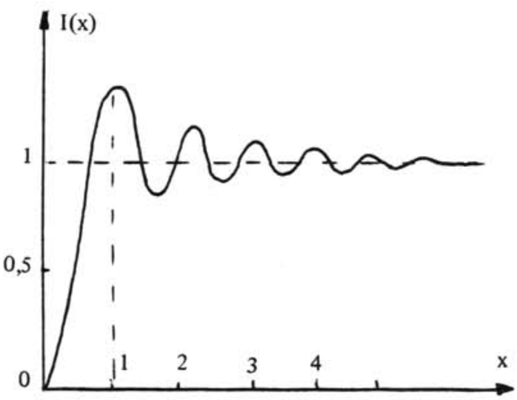

Рис. 2

Получим далее выражение для комплексной амплитуды света в дальней зоне для случая дифракции плоской монохроматической волны на "винтовом" фазовом фильтре с радиусом a. При этом вместо (14) выражение для амплитуды света $\Phi_1(\rho,\psi)$ будет иметь вид

$$\Phi_1(\rho,\psi) = \frac{k}{z} e^{ikz} e^{-\frac{ik}{2z}\rho^2} e^{im\psi} \int_0^a J_1\left(\frac{k}{z}\rho r\right) r\,dr. \tag{18}$$

Для вычисления интеграла в (18) воспользуемся выражением (стр. 39 в [6])

$$\int_0^\xi J_1(x)\,x\,dx = \frac{\pi}{2}\xi\,[J_1(\xi)H_0(\xi) - J_0(\xi)H_1(\xi)], \tag{19}$$

где $H_n(\xi)$ – функция Струве, которая имеет вид для n = 0,1:

$$H_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^5}{9\cdot 25} - \ldots\right] = \frac{2x}{\pi}\,{}_1F_2\left(1; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{x^2}{4}\right),$$

$$H_1(x) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{9\cdot 5} + \frac{x^6}{9\cdot 25\cdot 7} - \ldots\right] = \frac{2x^2}{\pi}\,{}_1F_2\left(1; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; -\frac{x^2}{4}\right),$$

где ${}_1F_2(a;b;c;x)$ – гипергеометрическая функция.

Для интенсивности света в дальней зоне дифракции с учетом (19) получим вместо (18) выражение

$$I_1(\rho) = |\Phi_1(\rho,\psi)|^2 = \frac{\pi}{2}\,\frac{a}{\rho}\left[J_1\left(\frac{\rho}{\omega}\right)H_0\left(\frac{\rho}{\omega}\right) - J_0\left(\frac{\rho}{\omega}\right)H_1\left(\frac{\rho}{\omega}\right)\right]^2, \tag{20}$$

где $\omega = \frac{z}{ka}$ – радиус дифракционного пятна, z – расстояние от фильтра до плоскости наблюдения, a – радиус фильтра. Из (20) следуют асимптотические оценки:

$$\begin{cases} I_1(\rho) \sim \rho;\ \rho \to 0 \\ I_1(\rho) \sim \rho^{-\frac{3}{2}};\ \rho \to \infty. \end{cases}$$

Из (17) и (20) видно, что на всем протяжении распространения света, продифрагировавшего на "винтовом" фазовом фильтре, в центральной части пучка нет энергии излучения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложено использовать для фокусировки в кольцо оптический элемент с функцией пропускания вида (5), в котором наряду с радиально-линейной составляющей фазы, описывающей пропускание аксикона, имеется азимутально-линейная ("винтовая") составляющая фазы, которая обеспечивает отсутствие энергии света в центральной точке плоскости фокусировки.

Получены выражения (11) и (13) для зависимости максимальной интенсивности света на кольце от радиуса самого кольца.

Получены выражения (17) и (20) для распределения интенсивности света в зонах дифракции Френеля и Фраунгофера (дальняя зона) для случая дифракции плоской монохроматической волны на "винтовом" фазовом фильтре. Показано, что на всем протяжении светового пучка, продифрагировавшего на фильтре, энергия света в центре пучка равна нулю.

Литература

1. *Fedotowsky A., Lehovec K.* Appl. Opt., 1974, v. 13, N 12, p. 2919.

2. *Баранова Н. Б., Зельдович Б. Я.* ЖЭТФ, 1981, т. 80, вып. 5, с. 1789.

3. *Березин А. Е., Прохоров А. М., Сисакян И. Н., Сойфер В. А.* ДАН СССР, 1984, т. 274, № 4, с. 802.

4. *Котляр В. В., Сойфер В. А.* Письма в ЖТФ, 1990, т. 16, вып. 12, с. 11.

5. *McLeod J. H.* JOSA, 1954, v. 44, N 8, p. 592.

6. *Прудников А. П., Бричков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции,, М., Наука, 1983.

* *
*