В. В. Сергеев, Л. Г. Фролова

РАСЧЕТ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КИХ-ФИЛЬТРОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

Цифровые фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтры) обладают важными преимуществами среди линейных систем обработки сигналов: они несложно рассчитываются, не требуют проверки на устойчивость, могут иметь линейную фазочастотную характеристику и т. д. [1, 2]. Их недостатком является высокая вычислительная сложность в тех случаях, когда импульсная характеристика имеет много ненулевых отсчетов. Возможность резкого снижения сложности КИХ-фильтров заключается в их построении в параллельной форме, использовании при этом небольшого числа параллельных звеньев и рекурсивной реализации каждого звена [3]. Однако воплощение идеи параллелизма вносит особенности в проектирование КИХ-фильтров и требует разработки специальных методов их расчета. Данная статья содержит изложение этих методов для некоторых наиболее часто встречающихся прикладных задач обработки однородных и двумерных сигналов.

В одномерном случае целью расчета параллельного КИХ-фильтра является определение параметров его импульсной характеристики вида

$$h(m) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k h_k(m), \tag{1}$$

где K – число параллельных звеньев фильтра, $\{a_k\}_{k=0}^{K-1}$ – коэффициенты, $\{h_k(m)\}_{k=0}^{K-1}$ – линейно независимые базисные функции разложения (1), т. е. конечные импульсные характеристики звеньев:

$h_k(m) = 0$, при $m \notin [M, M+N-1]$

величина M задает положение, а N – размер скользящего окна обработки сигнала. В соответствии с правилами преобразования сигналов линейными системами, этот фильтр трансформирует входную последовательность $x(n)$ в выходную

$$y(n) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k y_k(n), \tag{2}$$

где

$$y_k(n) = \sum_{m=M}^{M+N-1} h_k(m)\, x(n-m), \tag{3}$$

– сигналы на выходах параллельных звеньев.

В случае обработки двумерных сигналов (изображений) аналогами соотношений (1) – (3) являются:

$$h(m_1, m_2) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k h_k(m_1, m_2), \tag{4}$$

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k y_k(n_1, n_2), \tag{5}$$

$$y_k(n_1, n_2) = \sum_{(m_1, m_2) \in D} \sum h_k(m_1, m_2)\, x(n_1 - m_1, n_2 - m_2), \tag{6}$$

где D – область ненулевых отсчетов импульсных характеристик двумерных КИХ-звеньев фильтра (двумерное окно обработки сигнала).

1. ОБЩАЯ СХЕМА РАСЧЕТА

При конструировании параллельно-рекурсивного КИХ-фильтра необходимо решить три задачи:

а) выбрать класс базисных функций разложения (1) или (4);

б) из всего множества базисных функций выбранного класса выделить фактически используемые в разложении K функций;

в) рассчитать коэффициенты фильтра.

Первая задача может быть решена эвристически, некоторые соображения по выбору базисных функций даны в [3]. Ниже будем считать класс базисных функций заданным. Вторая и третья задачи решаются совместно, в процессе переборной процедуры численных расчетов.

Выделенное подмножество из K функций должно обеспечивать как можно более высокую эффективность обработки сигналов. Для определения наилучшего подмножества в общем случае требуется перебрать все возможные сочетания по K базисных функций в полном их наборе, вычислить для каждого сочетания некоторый показатель качества R и найти вариант, соответствующий максимальному значению показателя. Однако при достаточно большом окне обработки (что особенно характерно для двумерного случая) множество базисных функций становится очень большим, и такой полный перебор оказывается практически неосуществимым из-за чрезмерного объема необходимых вычислений.

Наиболее просто было бы заранее ввести некоторое упорядочение базисных функций (например, для базиса Фурье [3] – по возрастанию "частотного" индекса) и выбирать первые функции упорядоченного множества. Но, во-первых, не всегда удается указать "естественный" порядок следования функций (для прямоугольного базиса [3], в двумерном случае и т. д.), и, во-вторых, выбранное подмножество может оказаться весьма далеким от оптимального.

Существуют субоптимальные методы сокращенного перебора, традиционно применяемые для выбора подмножеств признаков в задачах распознавания образов [4]. Простейшим среди них является метод "последовательной селекции вперед", который в нашем случае заключается в том, что сначала выбирается единственная базисная функция, обеспечивающая максимум показателя качества, затем к ней присоединяется еще одна, которая в паре с уже выбранной максимизирует показатель на данном шаге и так далее до получения набора из K функций*. Как показывает практика, такой метод вполне подходит для расчета параллельно-рекурсивных КИХ-фильтров, он резко сокращает вычислительные затраты по сравнению с полным перебором при несущественной потере оптимальности формируемого подмножества базисных функций.

Как следует из изложенного, для каждого анализируемого набора используемых базисных функций требуется рассчитывать показатель качества обработки сигналов, а для их окончательного варианта – и коэффициенты разложения импульсной характеристики фильтра в ряд (1) или (4). Интересно, что для многих задач обработки сигналов схема этих расчетов оказывается, по-существу, одинаковой. Вектор искомых коэффициентов $A = \left\{a_k\right\}_{k=0}^{K-1}$ всегда задается матричным соотношением вида

$$A = B^{-1} C, \tag{7}$$

а показатель качества, максимизируемый в процессе выбора базисных функций, соотношением

$$R = A^t C = C^t B^{-1} C, \tag{8}$$

где $B = \left\{b_{lk}\right\}_{l,k=0}^{K-1}$ – невырожденная симметрическая матрица, $C = \left\{C_k\right\}_{k=0}^{K-1}$ – вектор, верхний индекс – 1 означает обращение матрицы, t – транспонирование вектора. Специфика расчета фильтра каждой конкретной задачи заключается только в способе вычисления элементов матрицы B и вектора C.

Получим основные соотношения, по которым рассчитываются указанные элементы, для некоторых наиболее часто встречающихся практических ситуаций. Для экономии места будем детально рассматривать лишь случай обработки одномерных сигналов, а для двумерных изображений просто приведем основные расчетные соотношения.

Все участвующие в преобразованиях последовательности будем считать вещественными.

2. АППРОКСИМАЦИЯ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Пусть требуется построить фильтр с импульсной характеристикой h(m), которая аппроксимирует некоторую заданную импульсную характеристику g(m). Для решения этой задачи воспользуемся известным методом наименьших квадратов. Будем минимизировать взвешенную квадратичную ошибку аппроксимации:

$$\epsilon^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(m) \left[g(m) - h(m) \right]^2, \tag{9}$$

где w (m) – некоторая весовая последовательность $(w(m) \geqslant 0)$. Подставим в формулу (9) выражение (1) для импульсной характеристики параллельного фильтра:

$$\epsilon^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(m) \left[g(m) - \sum_{k=0}^{K-1} a_k h_k(m) \right]^2 \tag{10}$$

и приравняем нулю частные производные:

$$\frac{\partial \epsilon^2}{\partial a_l} = 0, \; 0 \leqslant l \leqslant K-1. \tag{11}$$

В результате получаем систему линейных уравнений относительно коэффициентов фильтра:

$$B\,A = C, \tag{12}$$

в которой элементы матрицы B и вектора C вычисляются по формулам

$$b_{lk} = \sum_{m=M}^{M+N-1} w(m)\, h_l(m)\, h_k(m), \quad c_k = \sum_{m=M}^{M+N-1} w(m)\, g(m)\, h_k(m). \tag{13}$$

Очевидно, решение данной системы определяется записанным выше соотношением (7). Подставив найденные коэффициенты фильтра в (10), несложно найти достигаемый минимум ошибки аппроксимации:

$$\epsilon^2_{\min} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(m)\, g^2(m) - R, \tag{14}$$

где R вычисляется по формуле (8). В разности (14) первый член не зависит от параметров фильтра, поэтому дальнейшее уменьшение ошибки в процессе подбора базисных функций (см. предыдущий раздел) обеспечивается максимизацией показателя качества R.

При расчете двумерного параллельного КИХ-фильтра, описываемого соотношениями (4) – (6), с импульсной характеристикой, аппроксимирующей $g(m_1, m_2)$, выражения (9), (13) и (14) модифицируются:

$$\epsilon^2 = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} w(m_1, m_2)\, [g(m_1, m_2) - h(m_1, m_2)]^2; \tag{15}$$

$$b_{lk} = \sum\sum_{(m_1, m_2)\in D} w(m_1, m_2)\, h_l(m_1, m_2)\, h_k(m_1, m_2),$$
$$c_k = \sum\sum_{(m_1, m_2)\in D} w(m_1, m_2)\, g(m_1, m_2)\, h_k(m_1, m_2), \tag{16}$$

$$\epsilon^2_{\min} = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} w(m_1, m_2)\, g^2(m_1, m_2) - R, \tag{17}$$

где $w(m_1, m_2)$ – двумерная неотрицательная весовая функция ошибки аппроксимации.

3. АППРОКСИМАЦИЯ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Аппроксимация частотной характеристики – это традиционная задача проектирования цифровых фильтров [1]. Частотная характеристика рассчитываемого фильтра (спектр Фурье его импульсной характеристики)

$$H(e^{i\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\, e^{-i\omega m}, \tag{18}$$

где ω – безразмерный вещественный частотный аргумент, должна здесь приближенно соответствовать некоторой требуемой частотной характеристике $G(e^{i\omega})$. Как и в предыдущей задаче, будем минимизировать взвешенную квадратичную ошибку аппроксимации, которую в данном случае, принимая во внимание периодичность спектров последовательностей [1], запишем в виде

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{i\omega})\, |G(e^{i\omega}) - H(e^{i\omega})|^2\, d\omega, \tag{19}$$

где $W(e^{i\omega})$ – вещественная четная неотрицательная весовая функция. С учетом соотношений (1) и (18) представим выражение (19) в более конкретной форме:

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{i\omega})\, |G(e^{i\omega}) - \sum_{k=0}^{K-1} a_k\, H_k(e^{i\omega})|^2\, d\omega, \tag{20}$$

где $H_k(e^{i\omega})$ – частотные характеристики параллельных звеньев фильтра. Далее через условие (11) перейдем к системе уравнений вида (12) и соотношению (7), в которых элементы матрицы B и вектора C могут быть определены следующим образом:

$$b_{lk} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{i\omega})\, He(e^{i\omega})\, H_k(e^{-i\omega})\, d\omega,$$
$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{i\omega})\, G(e^{i\omega})\, H_k(e^{-i\omega})\, d\omega. \tag{21}$$

Коэффициенты фильтра, найденные по формуле (7) с использованием (21), обеспечивают минимум ошибки аппроксимации (20):

$$\epsilon^2_{min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{i\omega}) | G(e^{i\omega})|^2 \, d\omega - R, \tag{22}$$

где R – подлежащий максимизации показатель качества фильтра, вычисляемый по формуле (8).

В практических ситуациях может оказаться более удобным использовать вместо спектральных функций, входящих в приведенные выше выражения, соответствующие им последовательности. Опираясь на свойства преобразования Фурье [1], несложно трансформировать соотношения (21), (22) к виду:

$$\begin{aligned} b_{lk} &= \sum_{m=M}^{M+N-1} \sum_{n=M}^{M+N-1} h_l(m)\, h_k(n)\, W(m-n), \\ c_k &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=M}^{M+N-1} g(m)\, h_k(n)\, W(m-n); \end{aligned} \tag{23}$$

$$\epsilon^2_{min} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(m)\, g(n)\, W(m-n) - R, \tag{24}$$

где

$$w(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{i\omega})\, e^{i\omega n} \, d\omega$$

– последовательность, соответствующая спектральной весовой функции $W(e^{i\omega})$,

$$g(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{i\omega})\, e^{i\omega n} \, d\omega$$

– импульсная характеристика идеального (аппроксимируемого) фильтра.

При переходе к двумерным сигналам полученные расчетные соотношения претерпевают непринципиальные изменения. Вместо квадратичной ошибки (19) теперь рассматривается:

$$\epsilon^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} W(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) | G(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) - H(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})|^2 d\omega_1 d\omega_2, \tag{25}$$

где $W(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}$ – вещественная неотрицательная весовая функция, обладающая свойством центральной симметрии:

$W(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) = W(e^{-i\omega_1}, e^{-i\omega_2})$,

$G(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})$ – требуемая частотная характеристика,

$H(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})$ – частотная характеристика рассчитываемого фильтра. Вместо соотношений (21), (22) следует использовать:

$$\begin{aligned} b_{lk} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} W(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})\, H_l(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})\, H_k(e^{-i\omega_1}, e^{-i\omega_2})\, d\omega_1\, d\omega_2, \\ c_k &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} W(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})\, G(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})\, H_k(e^{-i\omega_1}, e^{-i\omega_2})\, d\omega_1\, d\omega_2; \end{aligned} \tag{26}$$

$$\epsilon^2_{min} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} W(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) | G(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})|^2 \, d\omega_1\, d\omega_2 - R, \tag{27}$$

где $H_k(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})$ – частотные характеристики параллельных звеньев фильтра, а вместо соотношений (23), (24) –

$$\begin{aligned} b_{lk} &= \sum_{(m_1,m_2)\in D} \sum_{(n_1,n_2)\in D} h_l(m_1, m_2)\, h_k(n_1, n_2)\, w(m_1 - n_1, m_2 - n_2), \\ c_k &= \sum_{m_1=-\infty} \sum_{m_2=-\infty} \sum_{(n_1,n_2)\in D} g(m_1, m_2)\, h_k(n_1, n_2)\, w(m_1 - n_1, m_2 - n_2); \end{aligned} \tag{28}$$

$$\epsilon^2_{min} = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} g(m_1, m_2)\, g(n_1, n_2)\, w(m_1 - n_1, m_2 - n_2) - R, \tag{29}$$

где $w(n_1, n_2)$, $g(n_1, n_2)$ – двумерные последовательности, соответствующие спектральным функциям $W(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})$ и $G(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})$. Связь между всеми последовательностями и их спектрами определяется здесь двумерным преобразованием Фурье [2]. Например,

$$W(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} w(n_1, n_2)\, e^{-i(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)},$$

$$w(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})\, e^{i(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)} d\omega_1\, d\omega_2.$$

Заметим, что, если минимизировать простую (невзвешенную) квадратичную ошибку аппроксимации, то нет необходимости рассчитывать фильтр с использованием частотного подхода. В силу известной теоремы Парсеваля [1, 2], при отсутствующих (тождественно равных единице) весовых функциях критерии (19) и (25) идентичны соответственно критериям (9) и (15). Это означает, что задача расчета фильтра с требуемой частотной характеристикой сводится к предыдущей задаче аппроксимации импульсной характеристики, решение которой в вычислительном плане, как правило, проще. Однако при нетривиальных весовых функциях аппроксимация импульсной и частотной характеристик приводит к разным фильтрам. В этой связи рассмотрим отдельно один частный случай выбора спектральных весовых функций, имеющий определенное практическое значение.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Пусть требуется рассчитать фильтр, который преобразует входной сигнал x (n) так же, как некоторая "идеальная" линейная система с известными характеристиками. Обозначим через $y^{(h)}(n)$ – сигнал на выходе рассчитываемого фильтра, а через $y^{(g)}(n)$ – сигнал на выходе идеальной системы.

Предположим, что x (n) – детерминированная последовательность со спектром $x(e^{i\omega})$. Будем минимизировать квадратичное отклонение одного выходного сигнала от другого:

$$\epsilon^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [y^{(g)}(n) - y^{(h)}(n)]^2. \tag{30}$$

В соответствии с теоремой Парсеваля и другими свойствами преобразования Фурье [1]

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |Y^{(g)}(e^{i\omega}) - Y^{(h)}(e^{i\omega})|^2\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{i\omega})|^2 |G(e^{i\omega}) - H(e^{i\omega})|^2\, d\omega,$$

где $Y^{(g)}(e^{i\omega})$, $Y^{(h)}(e^{i\omega})$ – спектры выходных сигналов, $G(e^{i\omega})$ – частотная характеристика идеальной системы, $H(e^{i\omega})$ – частотная характеристика рассчитываемого фильтра. Сравнение последнего выражения с критерием (19) показывает, что данная задача заключается в аппроксимации частотной характеристики $G(e^{i\omega})$ – при весовой функции

$$W(e^{i\omega}) = |X(e^{i\omega})|^2. \tag{31}$$

При этом значения ошибок (19) и (30) совпадают. Спектральной весовой функции (31) соответствует последовательность

$$w(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\, x(m+n), \tag{32}$$

которая нужна при расчете фильтра с использованием соотношений (23), (24).

Пусть теперь x (n) – стационарная случайная последовательность с нулевым средним и энергетическим спектром $\Phi_x(e^{i\omega})$ [1]. При расчете фильтра потребуем минимизации дисперсии разности выходных сигналов:

$$\epsilon^2 = E\left\{ [y^{(g)}(n) - y^{(h)}(n)]^2 \right\}. \tag{33}$$

(Здесь и далее $E\{.\}$ – оператор математического ожидания). Известно [1], что эта дисперсия может быть вычислена через энергетический спектр разности, который, в свою очередь, выражается через энергетический спектр входной последовательности и частотные характеристики идеальной системы и рассчитываемого фильтра:

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_x(e^{i\omega}) |G(e^{i\omega}) - H(e^{i\omega})|^2\, d\omega.$$

Сопоставив это соотношение с критерием (19), видим, что мы снова пришли к задаче аппроксимации частотной характеристики, но при весовой функции

$$W(e^{i\omega}) = \Phi_x(e^{i\omega}), \tag{34}$$

а ошибки (19) и (33) опять совпадают. Для того чтобы воспользоваться при расчетах формулами (23), (24), выполним над весовой функцией (34) обратное преобразование Фурье и получим, что

$$w(n) = Bx(n) \tag{35}$$

– автокорреляционная функция входного сигнала.

Для случая двумерных сигналов и систем аналоги формул (30) – (35) имеют соответственно вид:

$$\epsilon^2 = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} [y^{(g)}(n_1, n_2) - y^{(h)}(n_1, n_2)]^2; \tag{36}$$

$$W(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) = |X(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})|^2; \tag{37}$$

$$w(n_1, n_2) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} x(m_1, m_2)\, x(m_1+n_1,\ m_2+n_2); \tag{38}$$

$$\epsilon^2 = E\left\{[y^{(g)}(n_1, n_2) - y^{(h)}(n_1, n_2)]^2\right\}; \tag{39}$$

$$W(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) = \Phi_x(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}); \tag{40}$$

$$w(n_1, n_2) = B_x(n_1, n_2), \tag{41}$$

где $y^{(g)}(n_1, n_2)$ и $y^{(h)}(n_1, n_2)$ – двумерные сигналы на входах идеальной системы и рассчитываемого фильтра, $x(n_1, n_2)$ и $X(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})$ – двумерная входная детерминированная последовательность и ее спектр, $B_x(n_1, n_2)$ и $\Phi_x(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})$ – автокорреляционная функция и энергетический спектр входного стационарного случайного сигнала. Значения ошибок (36), (39) равны значению использовавшегося при частотной аппроксимации критерия (25).

5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Во многих практических ситуациях требуется применение линейного фильтра, преобразующего некоторый входной стационарный случайный процесс в выходной процесс с заданным энергетическим спектром. Задача синтеза такого фильтра при его параллельной структуре является частным случаем рассмотренных выше задач. Известно [1], что энергетические спектры входного сигнала фильтра – $\Phi_x(e^{i\omega})$ и выходного сигнала – $\Phi_y(e^{i\omega})$ связаны между собой соотношением

$$\Phi_y(e^{i\omega}) = \Phi_x(e^{i\omega})|G(e^{i\omega})|^2,$$

где $G(e^{i\omega})$ – частотная характеристика фильтра. Очевидно, что при заданных энергетических спектрах сигналов на входе и на выходе требуемая частотная характеристика фильтра может быть записана в виде*

$$G(e^{i\omega}) = \sqrt{\frac{\Phi_y(e^{i\omega})}{\Phi_x(e^{i\omega})}}. \tag{42}$$

В соответствии с уже полученными результатами, в данном случае синтез параллельного фильтра по условию минимума критерия (33) сводится к аппроксимации частотной характеристики (42) с весовой функцией (34). Общие расчетные соотношения (21) и (23) при этом конкретизируются и записываются соответственно в виде:

$$b_{lk} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_x(e^{i\omega})\, H_l(e^{i\omega})\, H_k(e^{i\omega})\, d\omega,$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\Phi_x(e^{i\omega})\,\Phi_y(e^{i\omega})}\; H_k(e^{-i\omega})\, d\omega \tag{43}$$

и

$$b_{lk} = \sum_{m=M}^{M+N-1} \sum_{n=M}^{M+N-1} h_l(m)\, h_k(n)\, B_x(m-n),$$

$$c_k = \sum_{m=M}^{M+N-1} f(m)\, h_k(m), \tag{44}$$

где $B_x(m)$ – автокорреляционная функция входного процесса, $f(m)$ – последовательность, вычисляемая через обратное преобразование Фурье:

$$f(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\Phi_x(e^{i\omega})\,\Phi_y(e^{i\omega})}\; e^{i\omega n}\, d\omega.$$

---

*Предполагается, что энергетический спектр входного сигнала строго положителен на всех частотах.

При расчете коэффициентов параллельного фильтра по формуле (7) с использованием (43) или (44) обеспечивается минимальное значение ошибки (33), равное

$$\epsilon^2_{min} = D_y - R, \tag{45}$$

где D_y – дисперсия выходного случайного процесса.

Рассмотрим еще более конкретную задачу формирования случайного процесса с энергетическим спектром $\Phi_y(e^{i\omega})$ из дискретного белого шума – последовательности независимых случайных величин с единичной дисперсией. В данном случае $\Phi_x(e^{i\omega}) = 1$ и выражения (43), (44) упрощаются:

$$b_{lk} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_l(e^{i\omega}) H_k(e^{-i\omega}) \, d\omega,$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\Phi_y(e^{i\omega})} \, H_k(e^{-i\omega}) \, d\omega; \tag{46}$$

$$b_{lk} = \sum_{m=M}^{M+N-1} h_l(m) \, h_k(m);$$

$$c_k = \sum_{m=M}^{M+N-1} f(m) \, h_k(m); \tag{47}$$

где

$$f(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\Phi_y(e^{i\omega})} \, e^{i\omega m} \, d\omega.$$

Сопоставление выражений (47) и (13) показывает, что данная задача свелась к простой (невзвешенной) квадратичной аппроксимации импульсной характеристики $f(m)$.

В двумерном случае аналоги формул (43), (44), (46) и (47) имеют соответственно вид:

$$b_{lk} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_x(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) H_l(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) \; H_k(e^{-i\omega_1}, e^{-i\omega_2}) \, d\omega_1 \, d\omega_2,$$

$$c_k = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\Phi_x(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) \Phi_y(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})} \; H_k(e^{-i\omega_1}, e^{-i\omega_2}) \, d\omega_1 \, d\omega_2; \tag{48}$$

$$b_{lk} = \sum_{(m_1, m_2) \in D} \sum \; \sum_{(n_1, n_2) \in D} \sum h_l(m_1, m_2) \, h_k(n_1, n_2) \, Bx(m_1 - n_1, m_2 - n_2),$$

$$c_k = \sum_{(m_1, m_2) \in D} \sum f(m_1, m_2) \, h_k(m_1, m_2), \tag{49}$$

где

$$f(m_1, m_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\Phi_x(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) \; \Phi_y(e^{i\omega_1}; e^{i\omega_2})} \; e^{i(\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2)} \, d\omega_1 \, d\omega_2,$$

$$b_{lk} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_l(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) \; H_k(e^{-i\omega_1}, e^{-i\omega_2}) \, d\omega_1 d\omega_2; \tag{50}$$

$$c_k = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\Phi_y(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})} \, H_k(e^{-i\omega_1}, e^{-i\omega_2}) \; d\omega_1 \, d\omega_2;$$

$$b_{lk} = \sum_{(m_1, m_2) \in D} \sum h_l(m_1, m_2) \, h_k(m_1, m_2),$$

$$c_k = \sum_{(m_1, m_2) \in D} \sum f(m_1, m_2) \, h_k(m_1, m_2), \tag{51}$$

где

$$f(m_1, m_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\Phi_y(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})} \; e^{i(\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2)} \, d\omega_1 d\omega_2.$$

Для минимального значения ошибки формирования выходного процесса остается в силе выражение (45).

Рассмотрим линейную модель наблюдения случайного сигнала на входе цифрового фильтра:

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\, x_0(n-m) + v(n), \tag{52}$$

где $f(m)$ – импульсная характеристика устойчивой линейной "искажающей" системы, $x_0(n)$ и $v(n)$ – соответственно полезный сигнал и помеха, некоррелированные между собой стационарные случайные последовательности с нулевыми средними и автокорреляционными функциями $B_{x_0}(m)$ и $B_v(m)$. Потребуем, чтобы рассчитываемый фильтр обеспечивал наилучшее в среднеквадратичном смысле восстановление полезного сигнала или, иными словами, чтобы для сигнала $y(n)$ на выходе фильтра дисперсия ошибки

$$\epsilon^2 = E\left\{[x_0(n) - y(n)]^2\right\} \tag{53}$$

принимала минимальное значение. С учетом формул (2) и (3) конкретизируем выражение (53):

$$\epsilon^2 = E\left\{[x_0(n) - \sum_{k=0}^{K-1} a_k \sum_{m=M}^{M+N-1} h_k(m)\, x(n-m)]^2\right\} \tag{54}$$

и далее через условие (11) перейдем к системе уравнений (12) и к соотношению (7) для расчета коэффициентов фильтра, в которых в данном случае

$$\begin{aligned} b_{lk} &= \sum_{m=M}^{M+N-1} \sum_{n=M}^{M+N-1} h_l(m)\, h_k(n)\, B_x(m-n), \\ c_k &= \sum_{m=M}^{M+N-1} h_k(m)\, B_{x_0 x}(-m), \end{aligned} \tag{55}$$

где $B_x(m)$ – автокорреляционная функция наблюдаемого входного сигнала, $B_{x_0 x}(m)$ – взаимная корреляционная функция полезного и наблюдаемого сигналов. В соответствии с моделью наблюдения (52), эти функции выражаются через введенные ранее ее характеристики [1]:

$$B_x(m) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} f(r)\, f(r+p)\, B_{x_0}(m-p) + B_v(m),$$

$$B_{x_0 x}(m) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} f(p)\, B_{x_0}(m-p).$$

Подставив найденные коэффициенты фильтра в формулу (54), после некоторых преобразований получаем значение минимальной ошибки восстановления:

$$\epsilon^2_{min} = D_{x_0} - R, \tag{56}$$

где $D_{x_0} = B_{x_0}(0)$ – дисперсия полезного сигнала.

Для двумерных сигналов соотношения (52), (53) и (55) модифицируются. Модель наблюдения записывается в виде:

$$x(n_1, n_2) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} f(m_1, m_2)\, x_0(n_1 - m_1, n_2 - m_2) + v(n_1, n_2), \tag{57}$$

минимизируемая ошибка восстановления:

$$\epsilon^2 = E\left\{[x_0(n_1, n_2) - y(n_1, n_2)]^2\right\}, \tag{58}$$

элементы матрицы B и вектора C в формулах (7), (8) и (12):

$$\begin{aligned} b_{lk} &= \sum_{(m_1,m_2)\in D} \sum_{(n_1,n_2)\in D} h_l(m_1, m_2)\, h_k(n_1, n_2)\, B_x(m_1 - n_1, m_2 - n_2), \\ c_k &= \sum_{(m_1,m_2)\in D} h_k(m_1, m_2)\, B_{x_0 x}(-m_1, -m_2), \end{aligned} \tag{59}$$

где

$$B_x(m_1, m_2) = \sum_{p_1=-\infty}^{\infty} \sum_{p_2=-\infty}^{\infty} \sum_{r_1=-\infty}^{\infty} \sum_{r_2=-\infty}^{\infty} f(r_1, r_2)\, f(r_1+p_1, r_2+p_2)\, B_{x_0}(m_1-p_1, m_2-p_2) + B_v(m_1, m_2),$$

$$B_{x_0 x}(m_1, m_2) = \sum_{p_1=-\infty}^{\infty} \sum_{p_2=-\infty}^{\infty} f(p_1, p_2)\, B_{x_0}(m_1 - p_1, m_2 - p_2).$$

Все участвующие здесь двумерные последовательности имеют тот же смысл, что и в одномерном случае. Выражение (56) для минимального значения ошибки остается без изменений.

Пусть сигнал на входе фильтра состоит либо из аддитивной смеси "объекта" $T(n)$ известной формы и "фона" – случайной последовательности $v(n)$:

$$x(n) = T(n) + v(n), \tag{60}$$

либо только из фона:

$$x(n) = v(n) \tag{61}$$

и задача состоит в том, чтобы отличить одну ситуацию от другой. Будем судить о наличии объекта по уровню сигнала $y(n)$ на выходе фильтра, т. е. считать, что наблюдаемый входной сигнал соответствует модели (60), если

$$y(n) > \Delta, \tag{62}$$

где Δ – некоторое пороговое значение, и модели (61) в противном случае. Решение, принятое по правилу (62), означает обнаружение объекта, при этом значение аргумента n позволяет указать положение (произвести локализацию) объекта на временной оси [5].

Данную задачу можно интерпретировать как задачу классификации входного сигнала, решаемую для каждого значения аргумента n. Примем в качестве классификационных признаков сигналы (3) на выходах параллельных звеньев фильтра. Совокупность этих сигналов образует вектор признаков $Y = \left\{ y_k(n) \right\}_{k=0}^{K-1}$.

Будем считать, что фон $v(n)$ стационарен, распределен по нормальному закону, имеет нулевое среднее и автокорреляционную функцию $B_v(m)$. Несложно получить, что для модели сигнала (60) математическое ожидание вектора Y имеет вид

$$C = E\left\{Y\right\} = \left\{c_k\right\}_{k=0}^{K-1} = \left\{\sum_{m=M}^{M+N-1} h_k(m)\, T(-m)\right\}_{k=0}^{K-1}, \tag{63}$$

а для модели (61) оно равно нулю. Ковариационная матрица вектора в обоих случаях одинакова:

$$B = E\left\{(Y-C)(Y-C)^t\right\} = \left\{b_{lk}\right\}_{l,k=0}^{K-1} = \left\{\sum_{m=M}^{M+N-1} \sum_{n=N}^{M+N-1} h_l(m)\, h_k(n)\, B_v(m-n)\right\}_{l,k=0}^{K-1}. \tag{64}$$

Поскольку процедура формирования признаков линейна, вектор в каждом классе сигналов, также как и фон, распределен нормально. Известно [6], что в описанной ситуации оптимальным является линейный классификатор, который принимает решение о наличии объекта при

$$C^t B^{-1} Y > \frac{1}{2} C^t B^{-1} C - d, \tag{65}$$

где d – параметр, зависящий от выбранного критерия обнаружения и априорной вероятности появления объекта в наблюдаемом сигнале. Сопоставление неравенств (62) и (65) с учетом формулы (2) позволяет одновременно найти вектор коэффициентов фильтра (он снова определяется соотношением (7)) и пороговое значение выходного сигнала:

$$\Delta = \frac{1}{2} C^t B^{-1} C - d = \frac{1}{2} R - d, \tag{66}$$

где величина R снова выражается формулой (8) и в данном случае представляет собой расстояние Махаланобиса между классами сигналов [6]. Параметр R является показателем качества классификатора: чем больше его значение, тем меньше вероятность ошибок обнаружения объекта.

В задаче обнаружения двумерного объекта для наблюдаемого сигнала вместо моделей (60) и (61) используются соответственно:

$$x(n_1, n_2) = T(n_1, n_2) + v(n_1, n_2) \tag{67}$$

и

$$x(n_1, n_2) = v(n_1, n_2). \tag{68}$$

Решение о наличии объекта выносится, если сигнал на выходе двумерного фильтра превышает пороговый уровень:

$$y(n_1, n_2) > \Delta. \tag{69}$$

Формулы (7), (8) и (60) для расчета и анализа фильтра сохраняются, но модифицируются выражения для элементов матрицы (64) и вектора (63):

$$\begin{aligned} b_{lk} &= \sum_{(m_1, m_2) \in D} \sum_{(n_1, n_2) \in D} h_l(m_1, m_2)\, h_k(n_1, n_2)\, B_v(m_1 - n_1, m_2 - n_2), \\ c_k &= \sum_{(m_1, m_2) \in D} h_k(m_1, m_2)\, T(-m_1, -m_2). \end{aligned} \tag{70}$$

Двумерные последовательности, которые присутствуют в соотношениях (67) – (70), имеют тот же смысл, что и одномерные, введенные выше.

Таким образом, в статье показано, что во многих приложениях может быть использована единая схема расчета параллельных КИХ-фильтров, в каждом конкретном случае специфичным является лишь способ вычисления элементов матрицы B и вектора C в основных расчетных соотношениях (7) и (8). Выведенные формулы позволяют вычислять указанные элементы для широкого класса прикладных задач обработки одномерных сигналов и двумерных изображений.

Литература

1. *Оппенгейм А. В., Шафер Р. В.* Цифровая обработка сигналов. – М.: Связь, 1979, 416 с.

2. *Даджнон Д., Мерсеро Р.* Цифровая обработка многомерных сигналов. – М.: Мир, 1988, 488 с.

3. *Сергеев В. В.* Параллельно-рекурсивные КИХ-фильтры для обработки изображений. – В наст. сборнике.

4. *Кутин Г. И.* Методы ранжировки комплексов признаков. Обзор. – Зарубежная радиоэлектроника, 1981, № 9, с. 54–70.

5. *Ярославский Л. П.* Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии: введение в цифровую оптику. – М.: Радио и связь, 1987, 296 с.

6. *Ту Дж., Гонсалес Р.* Принципы распознавания образов. – М.: Мир, 1978, 412 с.

* * *