

Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, В.А. Сойфер, С.И. Харитонов

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ФОКУСИРОВКИ В ОТРЕЗОК.

Введение

Фазовые оптические элементы-фокусаторы, синтезируемые методами компьютерной оптики [1], позволяют реализовать фокусировку лазерного излучения в заданную фокальную кривую. Ввиду сложности решения обратной задачи фокусировки фазовые функции фокусаторов получены только для случаев фокусировки в простые фокальные кривые такие как отрезок, кольцо, полукольцо и т.п. Наибольшее практическое значение имеет задача фокусировки в отрезок. В большинстве случаев фокальная линия произвольного вида может быть аппроксимирована набором отрезков с достаточной для практических целей точностью. Разбиение апертуры фокусатора на несколько областей (по числу отрезков), каждая из которых фокусирует излучение в отрезок требуемой длины и направления, позволяет сфокусировать излучение в сложную фокальную кривую [2-6]. Таким образом, задачу фокусировки в отрезок можно рассматривать как эталонную задачу формирования фокальной линии, являющуюся неотъемлемым этапом синтеза составных фокусаторов в сложные фокальные контура.

фокальной плоскости $|x| < d$ (см.рис.1). Фокальная плоскость отстоит на расстоянии f от плоскости элемента. Апертуру фокусатора G предполагаем ограниченной кривыми отрезками прямых $u=a$, $u=b$.

В данной статье проводится сравнительный анализ известных и новых решений сформулированной задачи фокусировки.

1. Исследование геометрооптических фокусаторов и фокусаторов с дифракционными поправками.

Наибольшее распространение получил геометрооптический подход к синтезу фокусаторов. Для геометрооптических фокусаторов в кривую вводится понятие слоя [6-8] - линии на фокусаторе, все точки которой фокусируют излучение в одну и ту же точку фокальной кривой. При фокусировке в отрезок в параксиальном приближении слои имеют вид прямых, перпендикулярных геометрическому отрезку. При этом фазовая функция геометрооптического фокусатора в отрезок имеет вид [6,7,9,10]:

$$\phi(\sigma) = -\frac{k\sigma}{2f} + \frac{k}{f} \int_{u_0}^u \kappa(\xi) d\xi - k\psi_0(\sigma) \tag{1}$$

Функция $x = \kappa(u)$ в (1) описывает соответствие между слоями на фокусаторе и точками фокального отрезка. Конкретный вид находится из решения дифференциального уравнения:

$$\frac{d\kappa(u)}{du} = \frac{1}{\theta(\kappa(u))} \int_{g_1(u)}^{g_2(u)} I_0(u, \xi) d\xi \tag{2}$$

с граничными условиями $\kappa(a) = -d$, $\kappa(b) = d$.

Уравнение (2) соответствует закону сохранения светового потока падающего с фокусатора на элемент фокальной кривой. Распределение мощности излучения вдоль фокального отрезка описывается "линейной плотностью" - функция в $\theta(x)$ (2). Для уяснения

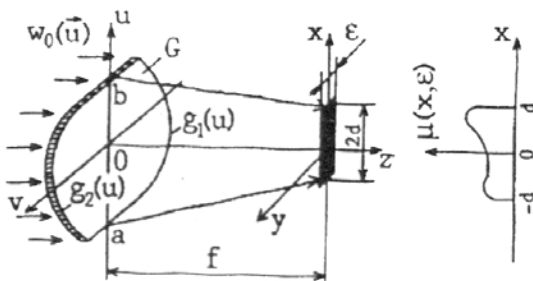


Рис.1 Геометрия задачи фокусировки в отрезок

Рассмотрим задачу фокусировки лазерного пучка с комплексной амплитудой

$w_0(\sigma) = \sqrt{I_0(\sigma)} \exp(ik\psi_0(\sigma))$, где $I_0(\sigma)$ - интенсивность освещающего пучка, $\psi_0(\sigma)$ эйконал пучка, $k = 2\pi/\lambda$, λ - длина волны, в отрезок

сушности геометрооптического решения проведем дифракционный анализ поля в фокальной плоскости фокусатора (1),(2).

В параксиальном приближении интеграла Кирхгофа комплексная амплитуда $w(x)$ в плоскости фокусировки имеет вид:

$$w(x) = \frac{k \exp(ikf)}{2\pi if} \times \int_G w_0(u) \exp(i\phi(u)) \exp\left(\frac{ik}{2f}(x-u)^2\right) d^2u \quad (3)$$

Подставляя (1) в (3) получим:

$$w(x) = \frac{k \exp(ikf)}{2\pi if} \times \int_G \sqrt{I_0(u)} \exp\left(i\frac{k}{f} \left[\int_{u_0}^u \kappa(\xi) d\xi - x u \right]\right) d^2u \quad (4)$$

По методу дифракционного расчета [11,12] может быть получена дифракционная аппроксимация интеграла (4), основанная на использовании метода стационарной фазы при интегрировании поперек слоя, то есть по переменной u , причем:

$$I(x) = \left| \sqrt{\frac{k}{2\pi f}} \times \int_{g_1(u_x)}^{g_2(u_x)} \sqrt{I_0(u, v)} \left(\frac{d\kappa}{du}\bigg|_{u=u_x}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{ik}{f} y v\right) dv \right|^2 \quad (5)$$

где u_x - решение $x = \kappa(u)$ уравнения относительно u .

Приведенная аппроксимация хорошо описывает дифракционные эффекты в поперечном сечении фокального отрезка, но не вблизи концов.

Введем функцию

$$\mu(x, \epsilon) = \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} I(x, u) dy, \quad (6)$$

характеризующую распределение энергии в ϵ -окрестности фокального отрезка. Подставляя (5) в (6) запишем $\mu(x, \epsilon)$ в виде:

$$\mu(x, \epsilon) = \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \left| \sqrt{\frac{k}{2\pi f}} \times \int_{g_1(u_x)}^{g_2(u_x)} \sqrt{I_0(u, v)} \left(\frac{d\kappa}{du}\bigg|_{u=u_x}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{ik}{f} y v\right) dv \right|^2 dy. \quad (7)$$

В случае $\Delta \ll \epsilon$, где Δ - дифракционная ширина отрезка, заменим пределы во внешнем интеграле на бесконечные и применим равенство Парсеваля. В результате уравнения (7) с учетом (2) примет вид:

$$\mu(x, \epsilon) = \theta(x), \quad \epsilon > \Delta. \quad (8)$$

Согласно (8), под линейной плотностью следует понимать интеграл от интенсивности, взятый в направлении поперек отрезка. Таким образом, геометрооптический подход ограничивается $\epsilon > \Delta$, что, например, не позволяет создать требуемое распределение интенсивности вдоль фокального отрезка.

В работе [13] дифракционное соотношение (7) было использовано для расчета фокусатора с дифракционными поправками, формирующего требуемое распределение энергии вдоль фокального отрезка при произвольном ϵ . Фазовая функция фокусатора с дифракционными поправками также имеет вид (1). При этом дифференциальное уравнение для $\kappa(x)$ в (1) может быть получено из (7) в виде:

$$\frac{d\kappa(u)}{du} = \frac{1}{\mu(\kappa(u), \epsilon)} \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \left| \sqrt{\frac{k}{2\pi f}} \right. \\ \times \left. \int_{g_1(u)}^{g_2(u)} \sqrt{I_0(u, v)} \left(\frac{d\kappa}{du} \Big|_{u=u_x} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{ik}{f} yv\right) dv \right|^2 dy, \\ \kappa(a) = -d, \kappa(b) = d. \quad (9)$$

При постоянной интенсивности освещающего пучка уравнение (9) примет вид:

$$\frac{d\kappa(u)}{du} = \\ = \frac{c}{\mu(\kappa(u), \epsilon)} \Phi\left(\frac{ke}{4f}(g_2(u) - g_1(u))\right) (g_2(u) - g_1(u)) \quad (10) \\ \kappa(a) = -d, \kappa(b) = d,$$

где c - константа;

$$\Phi(\beta) = \text{Si}(2\beta) - \beta \text{Sinc}^2(\beta),$$

$$\text{Si}(\beta) = \int_0^\beta \frac{\sin(x)}{x} dx, \quad \text{Sinc}(\beta) = \frac{\sin(\beta)}{\beta}.$$

В частном случае $\epsilon \ll \Delta$ разложим обе части уравнения (9) в ряд по степеням ϵ и учтем только линейные члены разложения. При этом уравнение для $\kappa(u)$ примет вид:

$$\frac{d\kappa(u)}{du} = \frac{1}{I(\kappa(u))} \left| \sqrt{\frac{k}{2\pi f}} \int_{g_1(u)}^{g_2(u)} \sqrt{I_0(u, v)} dv \right|^2 \\ \kappa(a) = -d, \kappa(b) = d, \quad (11)$$

где $I(x)$ - заданная интенсивность на отрезке при $y=0$, $|x| \leq d$.

Интересно провести сравнительный анализ работоспособности геометрооптического фокусатора (1), (2) и фокусатора с дифракционными поправками (1), (9). Сравнение проведем на примерах фокусировки пучков круглого и кольцевого сечений в отрезок с постоянным распределением энергии.

Функция $\kappa(u)$ для фокусатора с дифрак-

ционными поправками при равномерном освещающем пучке круглого сечения радиуса R

имеет вид (10) при $\mu(x, \epsilon) = \text{const}$ и $g_1(u) = -\sqrt{R^2 - u^2}$, $g_2(u) = \sqrt{R^2 - u^2}$. При равномерном освещающем пучке кольцевого сечения $\kappa(u)$ ищется из решения следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{d\kappa(u)}{du} = c \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \left(\sqrt{R_2^2 - u^2} - \alpha(u) \right)^2 \times \\ \times \text{Sinc}^2\left(\frac{k}{2f} y \left[\sqrt{R_2^2 - u^2} - \alpha(u) \right]\right) \times \\ \times \cos^2\left(\frac{k}{2f} y \left[\sqrt{R_2^2 - u^2} + \alpha(u) \right]\right) dy \quad (12)$$

$$\kappa(a) = -d, \kappa(b) = d$$

где c - константа,

$$\alpha(u) = \sqrt{R_1^2 - u^2} \text{Rect}\left(\frac{u}{2R_1}\right)$$

$$\text{Rect}(u) = \begin{cases} 1, & |u| \leq 1/2 \\ 0, & |u| > 1/2 \end{cases}.$$

R_1, R_2 - внутренний и внешний радиусы кольцевого освещающего пучка.

Следует отметить, что дифференциальные уравнения для функций $\kappa(u)$ геометрооптических фокусаторов имеют существенно другой вид:

$$\frac{d\kappa(u)}{du} = c \sqrt{R^2 - u^2} \quad (13)$$

$$\kappa(-R) = -d, \kappa(R) = d$$

при круглом освещающем пучке и

$$\frac{d\kappa(u)}{du} = c \left(\sqrt{R_2^2 - u^2} - \text{Rect}\left(\frac{u}{2R_1}\right) \sqrt{R_1^2 - u^2} \right) \quad (14)$$

$$\kappa(-R_2) = -d, \kappa(R_2) = d$$

при кольцевом освещающем пучке.

Для характеристики качества фокусировки будем использовать значения энергетической эффективности E и среднеквадратичного отклонения δ .

$$\text{Величина } E(\epsilon) = \frac{\int_{-d}^d \mu(x, \epsilon) dx}{\int_G I(\sigma) d^2 \sigma} \text{ характеризует}$$

долю энергии освещающего пучка, фокусируемую в ϵ -окрестности фокального отрезка.

$$\text{Величина } \delta(\epsilon) = \frac{1}{I} \left[\int_{-d}^d (\mu(x, \epsilon) - \bar{I})^2 dx \right]^{1/2} \text{ характе-}$$

ризует среднеквадратичное отклонение распределения энергии $\mu(x, \epsilon)$ вдоль фокального отрезка от среднего значения

$$\bar{I} = \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \mu(x, \epsilon) dx.$$

При $\epsilon \ll \Delta$ $\delta(\epsilon)$ соответствует среднеквадратичному отклонению распределения интенсивности вдоль геометрического отрезка от постоянной величины.

В левой части таблицы 1 для различных ϵ приведены значения $E(\epsilon)$ и $\delta(\epsilon)$ для геометрического фокусатора в отрезок при освещающем пучке круглого сечения. В правой части таблицы приведены аналогичные значения для фокусаторов с дифракционными поправками, рассчитанных при значениях ϵ , указанных в первой колонке таблицы, где $\Delta = \lambda f / R$ - дифракционная ширина в центре отрезка фокусировки.

Таблица 1. Характеристики качества фокусировки для геометрического фокусатора и фокусаторов с дифракционными поправками при освещающем пучке круглого сечения.

ϵ	Геометрооптический фокусатор		Фокусаторы с дифракционными поправками	
	E (%)	δ (%)	E (%)	δ (%)
$\epsilon \ll \Delta$	---	24,3	---	14,6
$\Delta/2$	65,6	27,1	65,2	13,4
Δ	85,9	18,1	85,6	14,5
$3\Delta/2$	88,5	17,6	88,2	16,1
2Δ	95,1	15,8	93,1	14,9

Данные таблицы 1 получены численным расчетом интеграла Кирхгофа по методу [14] при следующих параметрах: $\lambda = 1,06 \text{ мкм}$, $f = 100 \text{ мм}$, $2d = 0,68 \text{ мм}$ и радиусе освещающего пучка $R = 5 \text{ мм}$. Анализ данных таблицы 1 показывает, что при фактически равной энергетической эффективности $E(\epsilon)$, фокусатор с

дифракционными поправками позволяет сформировать более равномерное распределение энергии в ϵ -окрестности фокального отрезка. При $\epsilon \ll \Delta$, $\epsilon = \Delta/2$ и $\epsilon = \Delta$ среднеквадратичное отклонение $\delta(\epsilon)$ для фокусатора с дифракционными поправками меньше чем для геометрического фокусатора в 1.6, 1.6 и 1.25 раза соответственно. Графики функций $\mu(x, \epsilon)$ при $\epsilon \ll \Delta$, $\epsilon = \Delta/2$ и $\epsilon = \Delta$ для геометрического фокусатора приведены на рис.2, а для фокусатора с дифракционными поправками - на рис.3. При увеличении ϵ относительно Δ фокусатор с дифракционными поправками не позволяет существенно уменьшить среднеквадратичное отклонение $\delta(\epsilon)$ по сравнению с геометрическим фокусатором. В частности при $\epsilon = 2\Delta$ геометрический фокусатор и фокусатор с дифракционными поправками работают фактически одинаково.

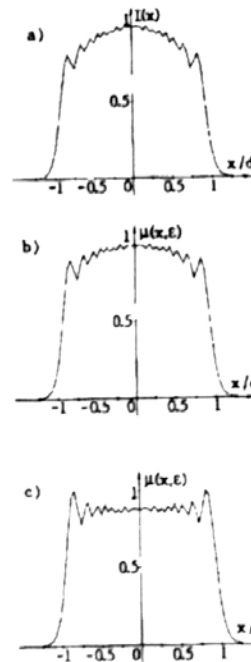


Рис.2 Функция $\mu(x, \epsilon)$ для геометрического фокусатора при равномерном освещающем пучке круглого сечения; а) $\epsilon \ll \Delta$, б) $\epsilon = \Delta/2$, в) $\epsilon = \Delta$

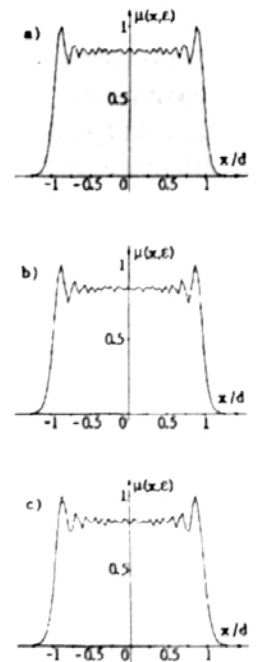


Рис.3 Функция $\mu(x, \epsilon)$ для фокусатора с дифракционными поправками при равномерном освещающем пучке круглого сечения; а) $\epsilon \ll \Delta$, б) $\epsilon = \Delta/2$, в) $\epsilon = \Delta$

В таблице 2 приведены значения $E(\epsilon)$ и $\delta(\epsilon)$ для геометрического фокусатора и фокусатора с дифракционными поправками при кольцевом освещающем пучке. При кольцевом освещающем пучке дифракционная ширина в центре фокального отрезка $\Delta = 2\lambda f / (R_2 - R_1)$. Расчет проводился при $\lambda = 1,06 \text{ мкм}$, $f = 100 \text{ мм}$, $2d = 1 \text{ мм}$, $R_1 = 3 \text{ мм}$, $R_2 = 5 \text{ мм}$. Согласно данным таблицы 2, для геометрического фокусатора распределение энергии $\mu(x, \epsilon)$ наиболее неравномерно при $\epsilon \ll \Delta$ и

Таблица 2. Характеристики качества фокусировки для геометрооптического фокусатора и фокусаторов с дифракционными поправками при кольцевом освещающем пучке.

ϵ	Геометрооптический фокусатор		Фокусаторы с дифракционными поправками	
	E (%)	δ (%)	E (%)	δ (%)
$\epsilon \ll \Delta$	---	28,3	---	13,3
$\Delta/4$	62,3	36,3	62,2	16,2
$\Delta/2$	83,7	18,6	83,6	14,8
$3\Delta/4$	89,7	18,2	89,5	15,0
Δ	90,9	15,6	90,8	15,2

$\epsilon = \Delta/4$; $\delta(\epsilon)|_{\epsilon \ll \Delta} = 28,7\%$, $\delta(\Delta/4) = 36,3\%$ (рис. 4а, 4б). При указанных параметрах фокусатор с дифракционными поправками характеризуется более чем в два раза меньшим среднеквадратичным отклонением (рис. 5а, 5б). При $\epsilon = \Delta/2$ фокусатор с дифракционными поправками позволяет уменьшить $\delta(\epsilon)$ уже только в 1,26 раза (см. рис. 4с, 5с), а при $\epsilon = \Delta$ геометрооптический фокусатор и фокусатор с дифракционными поправками работают практически одинаково.

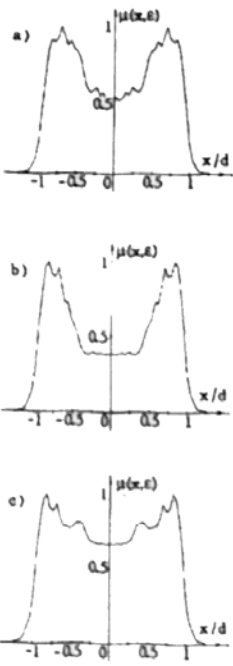


Рис. 4 Функция $\mu(x, \epsilon)$ для геометрического фокусатора при равномерном освещающем пучке кольцевого сечения; а) $\epsilon \ll \Delta$, б) $\epsilon = \Delta/2$, в) $\epsilon = \Delta$

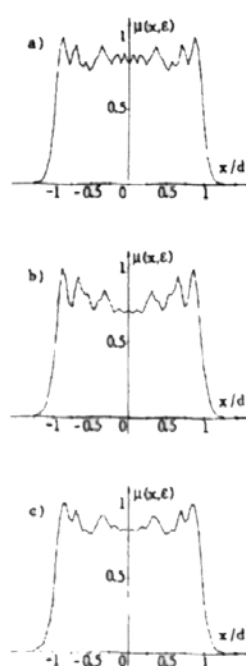


Рис. 5 Функция $\mu(x, \epsilon)$ для фокусатора с дифракционными поправками при равномерном освещающем пучке кольцевого сечения; а) $\epsilon \ll \Delta$, б) $\epsilon = \Delta/2$, в) $\epsilon = \Delta$

что фокусаторы с дифракционными поправками при освещающих пучках круглого и кольцевого сечений позволяют сформировать требуемое распределение энергии $\mu(x, \epsilon)$ вдоль фокального отрезка при произвольном ϵ с погрешностью в 13-16%. Геометрооптический фокусатор является частным случаем фокусатора с дифракционными поправками и при значении ϵ , равном дифракционной ширине отрезка фокусировки, формирует распределение энергии $\mu(x, \epsilon)$ с ошибкой порядка 16%.

2. Сравнительный анализ итерационных и аналитических методов в задаче фокусировки в отрезок.

В связи с широким распространением дифракционных методов расчета [15-18] представляется актуальным провести сравнительный анализ оптических элементов для фокусировки в отрезок, рассчитанных по итерационному алгоритму Герцберга-Секстона и фокусаторов с дифракционными поправками. Анализ проведем для случая формирования заданной интенсивности $I(x)$ вдоль фокального отрезка. Фазовую функцию фокусатора с дифракционными поправками (1), (10) запишем в виде:

$$\Phi(u) = -\frac{k u^2}{2f} + f(u) - k\psi_0(u), \quad (15)$$

где

$$f(u) = \frac{k}{f} \int_{u_0}^u \kappa(\xi) d\xi \quad (16)$$

Выше расчет функции $f(u)$ был основан на аналитическом выборе гладкого соответствия $\kappa(u)$ (10) между слоями на фокусаторе и точками фокального отрезка. Рассмотрим методику расчета функции $f(u)$ по итерационному алгоритму Герцберга-Секстона. Для применения итерационных методов в задаче фокусировки в отрезок предлагается представить поле в фокальной плоскости элемента (15) в виде:

$$w(x, y) = \frac{k \exp(ikf)}{2\pi if} \int_a^b \gamma(u, y) \exp\left(if(u) - \frac{ik}{f} x u \right) du \quad (17)$$

где

Проведенное исследование показывает,

$$\gamma(u, y) = \int_{g_1(u)}^{g_2(u)} \sqrt{I_0(u, v)} \exp\left(-\frac{ik}{f} yv\right) dv \quad (18)$$

Выражения (17), (18) получены из интеграла Кирхгофа (3) интегрированием по переменной v . Согласно (17), поле вдоль оси x (вдоль фокального отрезка) можно интерпретировать как результат преобразования одномерного (цилиндрического) пучка с амплитудой $\gamma(u, 0)$ элементом с фазовой функцией $f(u)$. Поэтому для формирования заданной интенсивности $I(x) = |w(x, 0)|^2$ вдоль фокального отрезка расчет $f(u)$ может проводиться по одномерному алгоритму Герцберга-Секстона, что существенно снижает вычислительные затраты.

Таблица 3. Характеристики качества фокусировки для фокусатора с дифракционными поправками и итерационных элементов, рассчитанных по алгоритму Герцберга-Секстона

η	Фокусатор с дифракционными поправками		Итерационные элементы			
			Начальное приближение - случайная фаза		Начальное приближение - фазовая функция фокусатора с дифракционными поправками	
	E (%)	δ (%)	E (%)	δ (%)	E (%)	δ (%)
4	79,9	26,7	83,1	37,1	83,4	26,8
8	82,3	23,1	82,9	28,1	84,9	17,1
16	84,0	16,6	83,4	28,4	85,6	12,6
32	84,8	14,6	82,7	33,0	84,8	13,3

В таблице 3 приведены значения энергетической эффективности $E(\Delta)$ и среднеквадратичного отклонения интенсивности δ вдоль отрезка фокусировки от постоянной величины в зависимости от величины $\eta = 2d/\Delta$, характеризующей длину фокального отрезка по сравнению с дифракционной шириной Δ в центре отрезка. Данные таблицы 3 соответствуют случаю фокусировки равномерного пучка круглого сечения радиуса R (при этом $\Delta = \lambda f/R$). В левой части таблицы 3 приведены значения $E(\Delta)$, δ для фокусатора с дифракционными поправками (1), (11), соответствующего выравниванию интенсивности на геометрическом отрезке. В средней части таблицы 3 приведены $E(\Delta)$, δ для дифракционного элемента рассчитанного по алгоритму Герцберга-Секстона при выборе в качестве начального приближения

случайной фазы, равномерно распределенной в интервале $[0, 2\pi]$. В правой части таблицы 3 приведены значения $E(\Delta)$, δ для элемента, рассчитанного по алгоритму Герцберга-Секстона с фазовой функцией фокусатора с дифракционными поправками (1), (11) в качестве начального приближения. Расчет для двух последних случаев проводился с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье при следующих параметрах: числе отсчетов $N = 512$, числе отсчетов на апертуре фокусатора $N_u = 256$. При этом шаг в фокальной области $\Delta x = \Delta/4$, а число отсчетов вдоль фокального отрезка длины $2d = \eta \Delta$ соответствует значению $N_x = 4\eta$. При расчете итерационных элементов выполнялось 30 итераций, что для приведенных в таблице 3 случаев оказывалось достаточным для полной стабилизации алгоритма. При этом после первых 5-10 итераций расчетная интенсивность $I_n(x)$ на шаге не обнулялась при $|x| > d$, а оставлялась неизменной (как отмечено в работе [18], это позволяет улучшить сходимость алгоритма). Анализ данных таблицы 3 показывает, что в общем случае фокусатор с дифракционными поправками позволяет сформировать более равномерное распределение интенсивности вдоль фокального отрезка, чем "итерационный" элемент при случайном начальном приближении. Использование в качестве начального приближения фазовой функции фокусатора с дифракционными поправками (1), (11) позволяет уменьшить среднеквадратичное отклонение δ на 1-3% и увеличить энергетическую эффективность $E(\Delta)$ на 1-2%.

В работах [19, 20] в алгоритме Герцберга-Секстона предложено использовать процедуру адаптивной коррекции, позволяющую улучшить сходимость итерационного процесса. Процедура адаптивной коррекции состоит в замене получаемого распределения интенсивности $I_n(x)$ на каждом шаге не на требуемое распределение $I(x)$ (как в классическом варианте алгоритма Герцберга-Секстона), а на скорректированное распределение $I_n^*(x)$, полученное прибавлением к $I(x)$ разности между требуемым и полученным распределениями интенсивности с выбираемым коэффициентом α :

$$I_n^*(x) = I(x) + \alpha(I(x) - I_n(x)) \quad (19)$$

В таблице 4 приведены значения $E(\Delta)$, δ для итерационных элементов, рассчитанных (за 30 итераций) при использовании процедуры адаптивной коррекции. При этом первые несколько итераций выполнялись по алгоритму Герцберга-Секстона (пока среднеквадратичное

Таблица 4. Характеристики качества фокусировки для итерационных элементов, рассчитанных по алгоритму Герчберга-Секстона с применением адаптивной коррекции.

η	Начальное приближение - случайная фаза		Начальное приближение - фазовая функция фокусатора с дифракционными поправками	
	E (%)	δ (%)	E (%)	δ (%)
4	83,1	37,1	83,4	26,8
8	82,9	28,1	84,9	17,1
16	83,4	28,4	85,6	12,6
32	82,7	33,0	84,8	13,3

отклонение полученного распределения интенсивности от требуемого распределения убывает быстро), а затем применялась процедура адаптивной коррекции при $\alpha=1$. Сравнительный анализ таблиц 3,4 показывает, что применение процедуры адаптивной коррекции при фазовой функции фокусатора с дифракционными поправками в качестве начального приближения позволяет уменьшить среднеквадратичное отклонение по сравнению с фокусатором с дифракционными поправками на 10-20% (в 3-7 раз) при незначительном снижении энергетической эффективности $E(\Delta)$. Применение процедуры адаптивной коррекции при случайном начальном приближении обеспечивает некоторое уменьшение δ (на 3-15%) для малых длин ($4\Delta-16\Delta$) фокального отрезка при снижении энергетической эффективности $E(\Delta)$ на 8-15%. Анализируя данные таблиц 3,4 можно отметить следующую тенденцию: с увеличением длины отрезка фокусировки эффективность применения итерационных методов (при случайном начальном приближении) по сравнению с фокусатором с дифракционными поправками уменьшается.

В качестве примера на рис. 6а-6е приведены графики функции $f(u)$ для следующих случаев: рис.6а - для фокусатора с дифракционными поправками, рис.6б,6с - для "итерационных" элементов, рассчитанных по алгоритму Герчберга-Секстона при случайной начальной фазе и при фазовой функции фокусатора с дифракционными поправками в качестве начальных приближений, рис.6б,6е - для итерационных элементов, рассчитанных с применением процедуры адаптивной коррекции при случайной фазе и при фазовой функции фокусатора с дифракционными поправками в качестве начальных приближений. Указанные графики получены для фокусировки в отрезок длины $2d=16\Delta$. На рис. 7а-7е показаны расчетные распределения интенсивности вдоль фо-

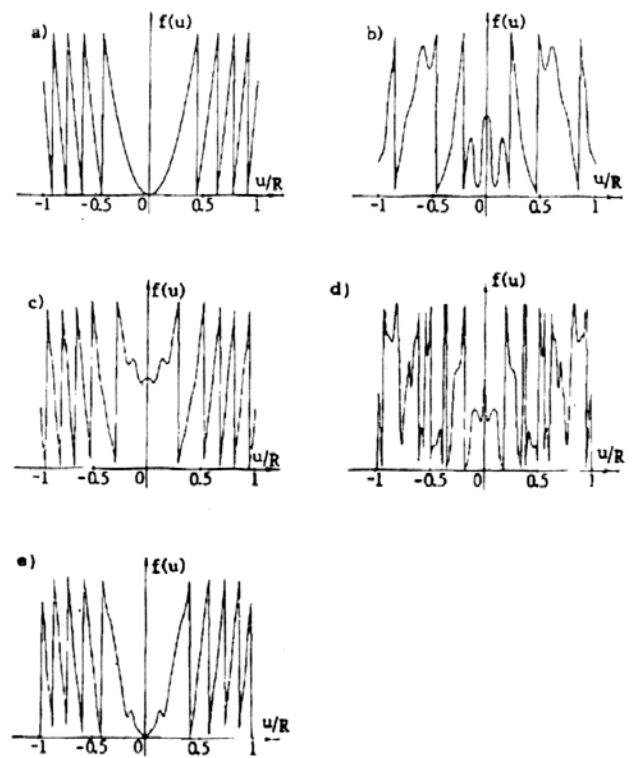


Рис.6 Функция $f(u)$ для следующих фокусаторов: а) с дифракционными поправками, б) итерационного элемента при случайной начальной фазе, в) итерационного элемента при начальной фазе фокусатора с дифракционными поправками, д) итерационного элемента, рассчитанного с применением процедуры адаптивной коррекции при случайной начальной фазе, е) итерационного элемента, рассчитанного с применением процедуры адаптивной коррекции при начальной фазе фокусатора с дифракционными поправками.

кального отрезка при функциях, приведенных на рис.6а-6е. Всплески интенсивности вне отрезка фокусировки на рис.7д объясняются тем, что процедура адаптивной коррекции не учитывает вид распределения интенсивности вне области фокусировки. В то же время процедура адаптивной коррекции не ухудшает распределение интенсивности вне отрезка фокусировки для фокусатора с дифракционными поправками (см. рис.7а,7д).

Анализ (табл.3,4, рис.7а-7е) показывает эффективность фокусатора с дифракционными поправками. В частности, итерационный алгоритм Герчберга-Секстона не позволяет заметно улучшить качество работы такого фокусатора. В то же время использование его фазовой функции в качестве начального приближения для алгоритма Герчберга-Секстона с адаптивной коррекцией позволило существенно уменьшить среднеквадратичное отклонение δ .

Интересно отметить, что полученное с помощью процедуры адаптивной коррекции улучшение характеристик фокусатора с дифракционными поправками сохраняется при

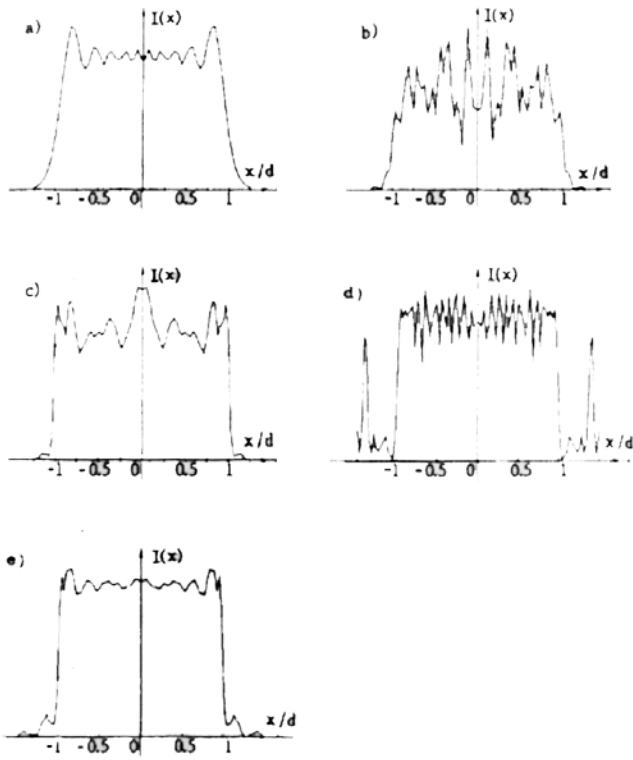


Рис.7 Распределение интенсивности вдоль фокального отрезка для следующих фокусаторов: а) с дифракционными поправками, б) итерационного элемента при случайной начальной фазе, в) итерационного элемента при начальной фазе фокусатора с дифракционными поправками, д) итерационного элемента, рассчитанного с применением процедуры адаптивной коррекции при случайной начальной фазе, е) итерационного элемента, рассчитанного с применением процедуры адаптивной коррекции при начальной фазе фокусатора с дифракционными поправками.

внесении технологических погрешностей, характерных для изготовления элементов компьютерной оптики. В качестве примера технологической погрешности [21-22] рассмотрим квантование фазовой функции фокусатора (см. табл.5).

Таблица 5. Характеристики качества фокусировки для фокусатора с дифракционными поправками и итерационно улучшенного элемента при различном числе M уровней квантования фазы

M	Фокусатор с дифракционными поправками		Итерационно улучшенный элемент по методу адаптивной коррекции	
	E (%)	δ (%)	E (%)	δ (%)
4	72,3	36,5	71,1	34,2
8	80,4	23,5	79,7	16,2
16	83,1	18,6	82,8	10,1

В таблице 5 для случая фокусировки в отрезок длины $2d=16\Delta$ приведены значения энергетической эффективности $E(\Delta)$ и среднеквадратич-

ного отклонения δ для различного числа M уровней квантования фазовой функции (рассматриваемой как дополнение к линзе). Анализ данных таблицы 5 показывает, что среднеквадратичное отклонение для "фокусатора с адаптивной коррекцией" (рис. 6d) остается меньшим, чем у фокусатора с дифракционными поправками (рис.6a) при $M=16,8,4$.

3. Фокусатор в отрезок, устойчивый к искажениям интенсивности освещающего пучка.

В работе [23] рассмотрен синтез "квазипериодических" оптических элементов, устойчивых к искажениям освещающего пучка. Для фокусировки в отрезок прямой в [23] предполагается фазовую функцию элемента определить в виде N раз повторенной фазовой функции дифракционной решетки. При каждом повторении вводится специально подбираемый фазовый сдвиг p_k , чтобы фокальная картина оставалась непрерывной, а не распадалась на ряд пятен, как при наличии многих периодов у обычной дифракционной решетки. В частности, при четном числе повторений N величины фазовых сдвигов p_k описываются простой формулой [23]:

$$p_k = \frac{\pi k^2}{N}, k=0, N-1, N - \text{четное} \quad (20)$$

Устойчивость квазипериодического элемента к искажениям освещающего пучка объясняется тем, что распределение энергии в спектре дифракционной решетки практически не зависит от интенсивности освещающего пучка, если пучок падает на достаточно большое число периодов. Расчет фазовой дифракционной решетки с заданной интенсивностью дифракционных порядков требует специальных численных методов [24-26], что не позволяет получить фазовую функцию квазипериодического элемента в аналитическом виде. Предлагается геометрикооптический аналог квазипериодического элемента. При этом фазовую функцию квазипериодического элемента (как дополнение к линзе) предлагается определить в виде N раз повторенной фазовой функции $\hat{\phi}(u)$ фокусатора сходящегося сферического пучка в отрезок при фазовых сдвигах (20), вводимых при каждом повторении.

$$\hat{\phi}(u) = \frac{k}{f} \frac{dN}{b-a} u^2, \quad |u| \leq \frac{b-a}{2N}. \quad (21)$$

При этом апертура квазипериодического элемента по оси u предполагается ограниченной отрезками прямых $u=a$ и $u=b$. Достоинством предлагаемого варианта квазипериодического элемента является возможность проведения аналитических расчетов. Вследствие геометрического расчета функции $\hat{\phi}(u)$, квазипериодический элемент (20), (21) оказывается работоспособным только при длине фокального отрезка $2d \gg \Delta$, например, при $2d = 10N\Delta$, где $\Delta = \frac{\lambda f}{b-a}$. Действительно, при $2d = M\Delta$ функция $\hat{\phi}(u)$ соответствует фокусировке в отрезок длины $(M/N)\Delta$, $\Delta = \frac{\lambda f N}{b-a}$ - размер дифракционного разрешения для подпериода. Поэтому для обеспечения работоспособности квазипериодического элемента (20), (21) число периодов N следует выбирать из условия $N \leq M/10$, что эквивалентно следующему соотношению физических параметров $N \leq [2d(b-a)] / (10\lambda f)$. Следует отметить, что выбор значений фазовых сдвигов (20) сделан в работе [23] для постоянной интенсивности освещающего пучка с квадратным сечением, при этом вывод об устойчивости квазипериодического элемента к искажениям освещающего пучка носит качественный характер. Анализ работы квазипериодического элемента в [23] не проводился. Для оценки влияния искажений освещающего пучка на работоспособность квазипериодического элемента (20), (21) проводился дифракционный расчет интенсивности вдоль фокального отрезка при следующих параметрах: $\lambda = 0,63 \mu\text{м}$, $f = 100 \text{мм}$, $2d = 3,2 \text{мм}$. Апертура элемента G предполагалась квадратной со стороной $a = 10 \text{мм}$. Фазовая функция квазипериодического элемента (как дополнение к линзе) при числе подпериодов $N = 8$ приведена на рис.8а. Для сравнения на рис.8б показана фазовая функция (как дополнение к линзе) геометрического фокусатора при выше указанных параметрах. На рис.9а, 10а приведены расчетные распределения интенсивности вдоль фокального отрезка для квазипериодического элемента (20), (21) и геометрического фокусатора при равномерном освещаемом пучке квадратного сечения. Устойчивость квазипериодического элемента к искажениям освещающего пучка иллюстрируется на рис.9б, 9с. На рис.9б приведено распределение интенсивности вдоль

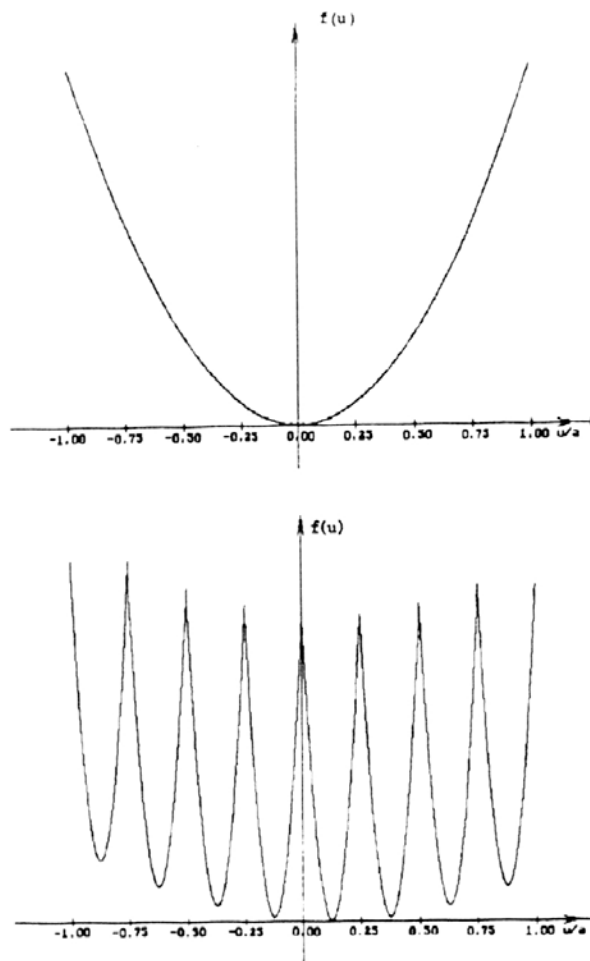


Рис.8 Фазовая функция (как дополнение к линзе) а) геометрического фокусатора в отрезок, б) квазиоптического элемента

фокального отрезка при освещении квадратной апертуры равномерным пучком круглого сечения радиуса $R = 5 \text{мм}$, а на рис.9с - распределение интенсивности вдоль отрезка при кольцевом освещающем пучке с радиусами $R = 3 \text{мм}$, $R = 5 \text{мм}$. Для сравнения на рис.10б, 10с приведены графики распределения интенсивности вдоль фокального отрезка, полученные при освещении геометрического фокусатора равномерного пучка квадратного сечения указанными пучками круглого и кольцевого сечений. Анализ рис.9, 10 показывает, что отклонение формы освещающего пучка от расчетной приводит к разрушению фокального отрезка для геометрического фокусатора (рис.10б, 10с). В тоже время графики на рис.9б, 9с свидетельствуют о сохранении фокального отрезка для квазипериодического элемента (20), (21), несмотря на усиление амплитуды высокочастотной составляющей вдоль отрезка фокусировки. Следует отметить, что в большинстве технологических задач воздействие сфокусированного лазерного излучения определяется усредненным значением интенсивности по некоторой окрестности. Для квазипериодического элемен-

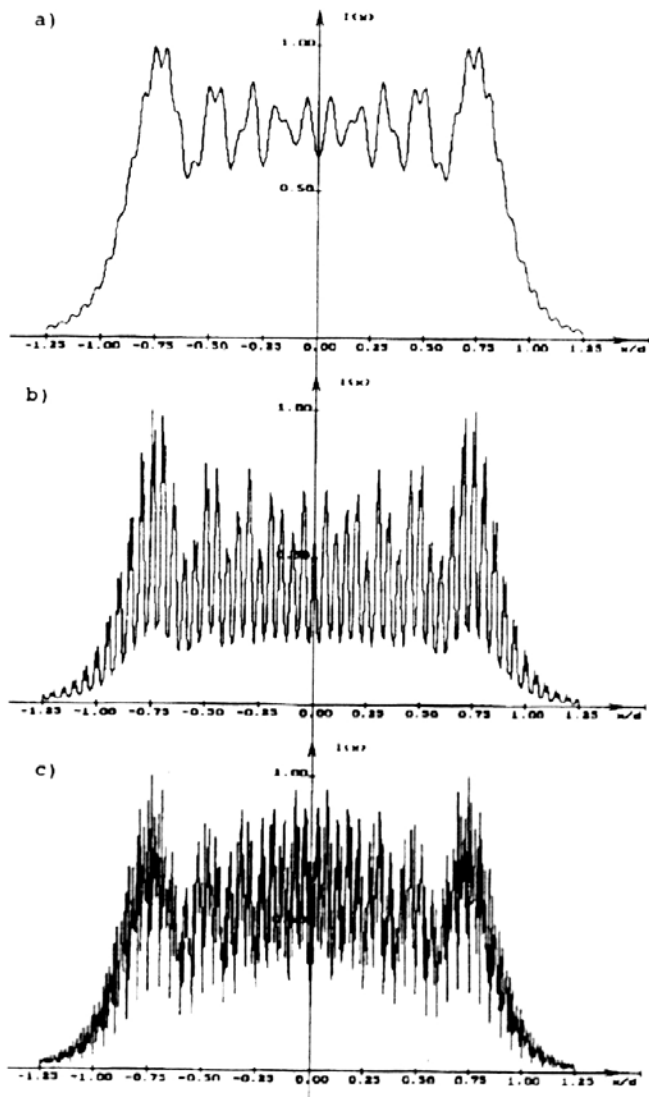


Рис.9 Распределение интенсивности вдоль фокального отрезка для квазипериодического элемента а) при равномерном освещающем пучке квадратного сечения, б) при равномерном освещающем пучке круглого сечения, с) при освещающем пучке кольцевого сечения

та (20),(21) на рис.11 приведен график функции, соответствующий результату усреднения распределений интенсивности вдоль отрезка по дифракционной длине при кольцевом освещающем пучке. График на рис.11 значительно более равномерен, чем график на рис.9с. При этом для геометрического фокусатора аналогичное усреднение не приводит к заметному изменению графика на рис.10с. Проведенный анализ свидетельствует о том, что для лазеров с неустойчивым или неравномерным выходным пучком перспективным является использование квазипериодических элементов.

4. Фокусатор в отрезок с заданным распределением температуры.

В связи с перспективностью применения фокусаторов в задачах лазерной обработки материалов [27,28] для заковки, резки, сварки,

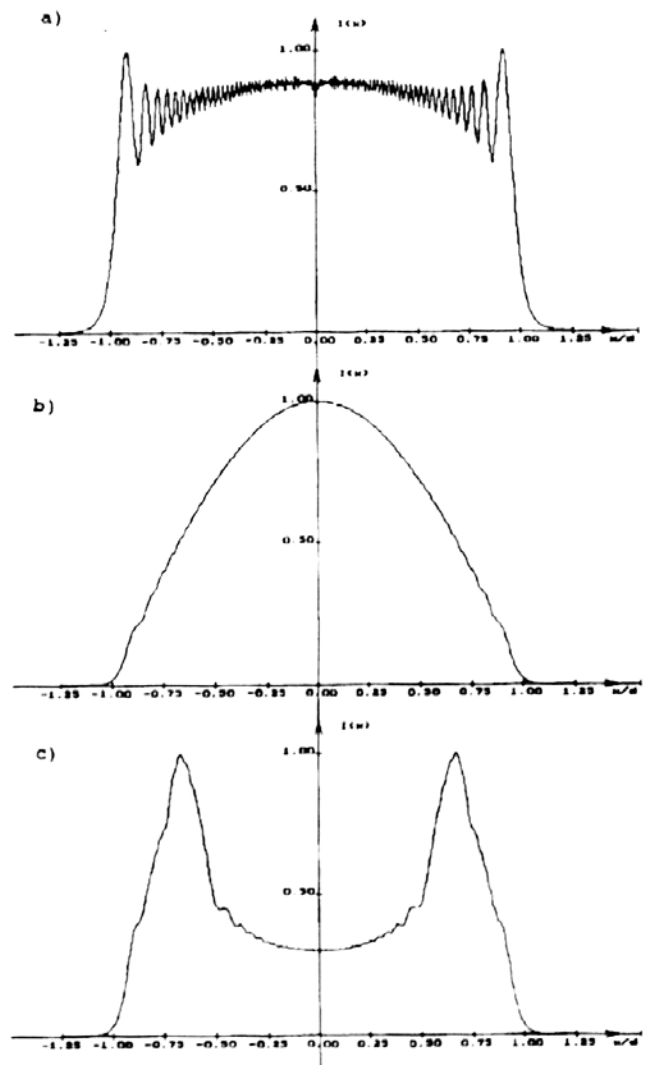


Рис.10 Распределение интенсивности вдоль фокального отрезка для геометрического фокусатора а) при равномерном освещающем пучке квадратного сечения, б) при равномерном освещающем пучке круглого сечения, с) при освещающем пучке кольцевого сечения

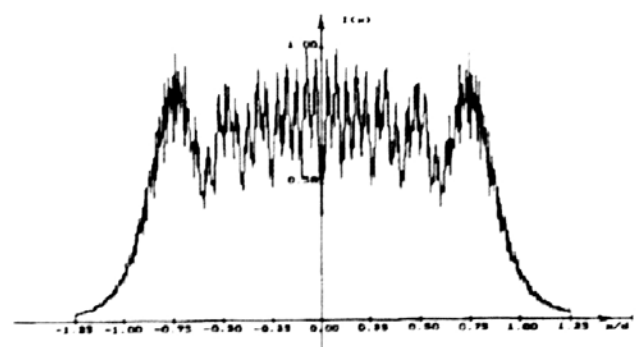


Рис.11 Усредненное по длине распределение интенсивности вдоль фокального отрезка для квазипериодического элемента при освещающем пучке кольцевого сечения

маркировки актуальной является задача исследования температурных характеристик светового поля, формируемого фокусатором. Кроме того, известные фокусаторы обеспечивают формирование заданного распределения интенсивности в некоторой области, а, например, не требуемого распределения температуры на

поверхности технологического объекта.

Рассмотрим задачу нагрева полубесконечного тела лазерным пучком, сфокусированным в виде отрезка. Нагреваемую поверхность полубесконечного тела будем считать совпадающей с фокальной плоскостью фокусатора в отрезок (рис.1). Проведем анализ температурного распределения, формируемого вдоль фокального отрезка. Будем предполагать, что тепловые источники в объеме полубесконечного тела отсутствуют, а начальное распределение температуры равно нулю. При этом распределение температуры на поверхности полубесконечного тела описывается следующим выражением [29,30]:

$$T(x,t) = \frac{2a}{b} \int_0^t \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(x')}{(4\pi a(t-t'))^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4a(t-t')}\right) d^2x' \right] dt' \quad (22)$$

где t - время воздействия лазерного излучения, a - коэффициент температуропроводности, b - коэффициент теплопроводности,

$I(x')$ - интенсивность сфокусированного излучения. Выполняя в (22) замену переменной

$\xi = 1/\sqrt{t-t'}$ и интегрируя по ξ , перепишем (22) в виде:

$$T(x,t) = \frac{1}{2\pi\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(x')}{|x-x'|} \left[1 - \operatorname{erf}\left(-\frac{|x-x'|}{\sqrt{4at}}\right) \right] d^2x' \quad (23)$$

где

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\xi^2) d\xi.$$

Выполняя в последнем выражении замену переменной

$$\begin{cases} x-x' = \rho \cos(\phi) \\ y-y' = \rho \sin(\phi) \end{cases}$$

запишем распределение температуры вдоль фокального отрезка $|x| \leq d, y=0$ в виде:

$$T(x,0,t) = \frac{1}{2\pi\beta} \times \int_0^{2\pi} \int_0^d I(x-\rho \cos(\phi), -\rho \sin(\phi)) \gamma(\rho,t) d\rho d\phi, \quad (24)$$

где

$$\gamma(\rho,t) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\rho}{\sqrt{4at}}\right). \quad (25)$$

Согласно (24), температура в точке $(x,0)$ фокального отрезка при фиксированном $t=t_0$ определяется как результат интегрирования интенсивности с весом $\gamma(\rho,t_0)$ (25). Поскольку $\operatorname{erf}(x) \approx 1$ при $x \gg 1$, то функция $\gamma(\rho,t_0) \approx 0$ при $\rho \gg \sqrt{4at_0}$. В частности, при $\rho = 2\sqrt{4at_0}$, $\gamma(\rho,t_0) = 0,005 \gamma(0,t_0)$ ($\gamma(0,t_0) = \max(\gamma(\rho,t_0)) = 1$).

Поэтому предел интегрирования по ρ в (24) реально не бесконечный, а определяется "тепловым" радиусом R_0 в пределах которого функция $\gamma(\rho,t_0)$ принимает существенно ненулевые значения. Распределение интенсивности $I(x,y)$ в фокальной плоскости достаточно слабо меняется вдоль отрезка фокусировки (но не вблизи концов отрезка) и быстро убывает в направлении поперек отрезка. Поэтому при значениях t_0 , таких что тепловой радиус $R_0 \ll d$ возможна замена $I(x-\rho \cos(\phi), -\rho \sin(\phi)) \approx I(x, -\rho \sin(\phi))$, при этом выражение (24) принимает вид:

$$T(x,0,t_0) = \frac{1}{2\pi\beta} \int_0^{2\pi} \int_0^d I(x, -\rho \sin(\phi)) \gamma(\rho,t_0) d\rho d\phi \quad (26)$$

Выражение (26) будем рассматривать как критерий, которому должно удовлетворять распределение интенсивности $I(x,y)$ от фокусатора в отрезок для формирования в конкретный момент времени $t=t_0$ (например, к концу импульса лазерного излучения) заданного распределения температуры $T(x,0,t)$. В частности, при малых t_0 , таких что тепловой радиус $R \ll \Delta$ (Δ - дифракционная ширина фокального отрезка), $I(x, -\rho \sin(\phi)) \approx I(x,0)$. В этом случае распределение температуры пропорционально интенсивности на геометрическом отрезке, поэтому требуемый температурный профиль может быть сформирован фокусатором с дифракционными поправками (1), (11).

В общем случае может быть получена аппроксимация решения тепловой задачи (26)

при использовании в (26) дифракционного соотношения (5) для интенсивности поля от фокусатора в отрезок с фазовой функцией вида (1). Указанная аппроксимация имеет вид:

$$T(x,0,t) = \frac{1}{2\pi\beta} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{k}{2\pi f} x} \times \int_{g_1(u_x)}^{g_2(u_x)} \sqrt{I_0(u_x, v)} \left(\frac{d\kappa}{du} \Big|_{u=u_x} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{ik\rho \sin(\phi)v}{f} \right) dv \Big| \times \gamma(\rho, t_0) d\rho d\phi \quad (27)$$

Рассмотрим расчет фазовой функции "теплового" фокусатора для формирования заданного температурного распределения $T(x)$ вдоль отрезка $|x| \leq d$ в заданный момент времени $t=t_0$. Фазовую функцию теплового фокусатора будем предполагать определенной в виде (1), а для отыскания функции $\kappa(u)$ в (1) воспользуемся аппроксимацией (27). При этом для функции $\kappa(u)$ получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\kappa(u)}{du} = \frac{c}{T(\kappa(u))} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \left| \int_{g_1(u)}^{g_2(u)} \sqrt{I_0(u)} \times \exp\left(\frac{ik\rho \sin(\phi)v}{f} \right) dv \right|^2 \gamma(\rho, t_0) d\rho d\phi \quad (28)$$

(где c - константа)

с граничными условиями $\kappa(a) = -d$, $\kappa(b) = d$.

При постоянной интенсивности освещающего пучка $I_0(u, v) = I_0$, $\forall \epsilon \in G$ уравнение (28) упрощается:

$$\frac{d\kappa(u)}{du} = \frac{c}{T(\kappa(u))} (g_2(u) - g_1(u))^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \text{Sinc}^2\left(\frac{k}{2f} x \right) \rho \sin(\phi) [g_2(u) - g_1(u)] \gamma(\rho, t_0) d\rho d\phi. \quad (29)$$

Подставляя решения дифференциальных уравнений (28), (29) в (1), получим фазовую функцию фокусатора в отрезок с заданным температурным профилем.

Для оценки работоспособности предложенных "тепловых" фокусаторов проводился расчет фокусаторов (1), (28) для формирования

постоянного распределения температуры $T(x)$, $|x| < d$ в момент времени t_0 , определяемый из соотношения $\sqrt{4at_0} = \frac{\Delta}{2}$, где a - коэффициент

температуропроводности. (Согласно (24), распределение температуры зависит от совокупного параметра $\sqrt{4at_0}$, являющегося характеристикой радиуса распространения тепла). Расчет проводился для освещающих пучков круглого и кольцевого сечений. На рис.12а приведен расчетный график нормированного распределения температуры вдоль фокального отрезка для теплового фокусатора равномерного пучка круглого сечения радиуса $R=5$ мм при следующих параметрах $\lambda=1,06$ мкм, $f=100$ мм,

$2d=2$ мм и $\sqrt{4at_0} = 20$ мкм. На рис.12б приведен расчетный график нормированного распределения температуры вдоль фокального отрезка, формируемого тепловым фокусатором равномерного пучка кольцевого сечения с радиусами $R_1=3$ мм, $R_2=5$ мм при следующих параметрах:

$\lambda=1,06$ мкм, $f=400$ мм, $2d=8$ мм и $\sqrt{4at_0} = 0,2$ мм. Согласно справочным данным коэффициент температуропроводности для стали $a=12$ мм/с²,

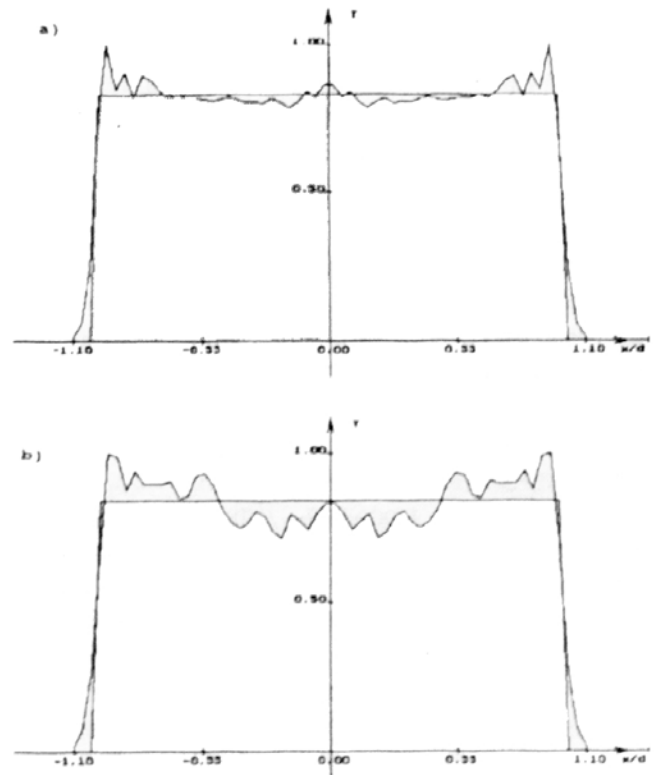


Рис. 12 Распределение температуры на отрезке фокусировки для тепловых фокусаторов а) при равномерном освещающем пучке круглого сечения, б) при кольцевом освещающем пучке

при этом последний график можно интерпретировать как результат работы теплового фокусатора, формирующего постоянный темпера-

ЛИТЕРАТУРА.

1. Сисакян И.Н., Сойфер В.А. Компьютерная оптика. Достижения и проблемы. Компьютерная оптика, вып.1, 1987, с.5-19.

2. L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, S.I. Kharitonov, G.V. Uspleniev "Focusators for laser branding". Optics and Lasers in Engineering, 1991, v.15, N5, pp. 311-322.

3. M.A. Golub, L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, S.I. Kharitonov, I.N. Sisakian, V.A. Soifer "Focusators at letters diffraction design". Proceedings SPIE, 1991, v.1500, pp. 211-22

4. Sissakian I.N., Soifer V.A. "Elements of fine optics generated by computer". Int. Conf. and School Lasers and Applications, Bucharest, 1982, pp. 853-882.

5. Гончарский А.В., Данилов В.А., Попов В.В., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А., Степанов В.В. "Плоские оптические элементы для фокусировки лазерного излучения". Волны и дифракция - "85", Тбилиси, 1985, т.2, с. 420-423.

6. Данилов В.А., Попов В.В., Прохоров А.М., Сагателян Д.М., Сисакян Е.В., Сисакян И.Н., Сойфер В.А. "Оптические элементы, фокусирующие когерентное излучение в произвольную фокальную линию". Препринт N69 - М.: ФИАН СССР, 1983, 41с.

7. Данилов В.А., Дубов М.В. "Влияние исследования искажений освещающего пучка на работу фокусаторов". Сб. Компьютерная оптика, 1987, N1, с. 52-67.

8. Данилов В.А., Попов В.В., Прохоров А.М., Сагателян Д.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А. "Синтез оптических элементов, создающих фокальную линию произвольной формы". Письма в ЖТФ, 1982, т.8, N13, с. 810-815.

9. Гаснов Э.Э. "Решение обратной задачи фокусировки лазерного излучения в линию". Препринт N 376, Баку, АН Азерб. ССР, Институт физики, 1991, 22 с.

10. Golub M.A., Sisakyan I.N., Soifer V.A. "Infra-red radiation focusators". Optics and Lasers in Engineering, 1991, v.15, N5, pp. 297-309.

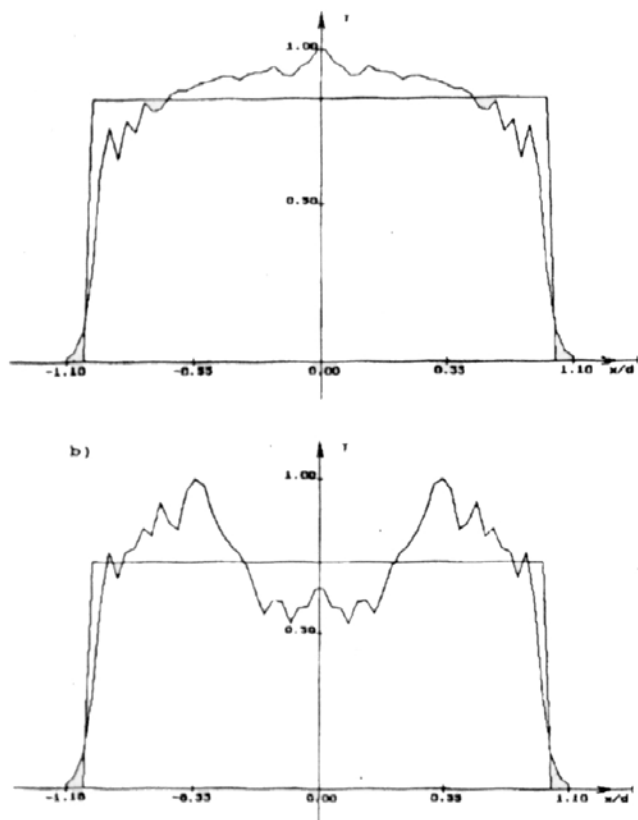


Рис. 13 Распределение температуры на отрезке фокусировки для геометрооптических фокусаторов а) при равномерном освещающем пучке круглого сечения, б) при кольцевом освещающем пучке

турный профиль на поверхности стали к концу импульса лазерного излучения с длительностью $t_0=0,001$ с. Для сравнения на рис.13а,13б для вышеприведенных параметров показаны соответствующие температурные распределения для геометрооптических фокусаторов (1),(2) равномерных пучков круглого и кольцевого сечений в отрезок с постоянной линейной плотностью. Сравнительный анализ (рис. 12, 13) показывает, что тепловые фокусаторы (1), (28) по сравнению с геометрооптическими (1), (2) позволяют сформировать значительно более равномерный температурный профиль. Для рассмотренных тепловых фокусаторов среднеквадратичное отклонение распределения температуры от постоянной величины составляет 8,8% - при освещающем пучке круглого сечения и 12,2% - при кольцевом освещающем пучке. Для геометрооптических фокусаторов =17,6% - при круглом освещающем пучке и =17,8% - при кольцевом освещающем пучке.

Заключение.

Проанализированы различные подходы к решению задачи фокусировки в отрезок. Полученные результаты позволяют оптимально выбрать фазовую функцию фокусатора в зави-

11. Голуб М.А., Казанский Н.Л., Сисакян И.Н., Сойфер В.А., Харитонов С.И. "Дифракционный расчет интенсивности светового поля вблизи фокальной линии". Оптика и спектроскопия, 1989, т.67, N6, с. 1387-1389.
12. Голуб М.А., Казанский Н.Л., Сисакян И.Н., Сойфер В.А., Харитонов С.И. "Оценка дифракционного размытия фокальной линии геометрооптических фокусаторов". Сб. Компьютерная Оптика, 1989, N5, с. 34-38.
13. Голуб М.А., Досколович Л.Л., Сисакян И.Н., Сойфер В.А., Харитонов С.И. "Дифракционные поправки при фокусировке лазерного излучения в отрезок". Оптика и спектроскопия, 1991, N6, с. 1069-1073.
14. M.A.Golub, L.L. Doscolovich, N.L. Kazanskiy, S.I. Kharitonov, N.G.Orlova, I.N.Sisakian, V.A.Soifer "Computational experiment for computer generated optical elements". Proceedings SPIE, 1991, v.1500, pp. 194-206.
15. Воронцов М.А., Матвеев А.Н., Сивоконь В.П. "Оптимальное управление волновым фронтом в задачах фокусировки лазерного излучения в дифракционном приближении". ДАН, 1986, т.270, N6, с. 1354-1358.
16. Воронцов М.А., Матвеев А.Н., Сивоконь В.П. "К расчету фокусаторов лазерного излучения в дифракционном приближении". Сб. Компьютерная оптика, 1989, N1, с. 74-78.
17. Троицкий И.Н., Сафонов А.Н., Демин А.А. "Киноформ : синтез и применение". Зарубежная радиоэлектроника, 1978, N9, с. 3-37.
18. Wyrowski F. "Diffractive optical elements: iterative calculation of quantized, blazed phase structures". Journ. Opt. Soc. Amer., 1990, vol.7, N6, pp. 961-969.
19. Kotlyar V.V., Nikolsky I.V., Soifer V.A. "Adaptive iterative algorithm for focusators synthesis" Optik, 1991, vol. 88, N1, pp. 17-19.
20. Kotlyar V.V., Nikolsky I.V., Soifer V.A. "Iterative computing of transmittance of optical elements focusing at a predetermined area. Optics and Lasers in Engineering, 1991, V.15, N5, pp. 323-330.
21. Полещук А.Г. "Изготовление рельефно-фазовых структур с непрерывным и многоуровневым профилем для дифракционной оптики". Автометрия, 1992, N1, с. 66-79.
22. Бобров С.Т., Грейсх Г.И., Туркевич Ю.Г. Оптика дифракционных элементов и систем. Л.: Машиностроение, 1986, 224 с.
23. Березный А.Е. "Квазипериодические оптические элементы". Сб. Компьютерная оптика, 1989, N6, с. 19-24.
24. Березный А.Е., Комаров С.В., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А. "Фазовые дифракционные решетки с заданными параметрами". ДАН СССР, 1986, т. 287, N3.
25. Досколович Л.Л., Котляр В.В., Сойфер В.А. "Фазовые дифракционные решетки с заданным распределением интенсивности по порядкам". Письма в ЖТФ, 1991, т.17, N21, с.54-57.
26. Досколович Л.Л., Сойфер В.А., Шинкарев М.В. "Метод стохастического синтеза бинарных дифракционных решеток". Автометрия, 1992, N3, с. 4-7.
27. Агешин С.Ф., Азаров А.А., Попов В.В., Сисакян И.Н. "Применение фокусаторов в задачах лазерной обработки материалов". Сб. Компьютерная Оптика, 1988, N3, с. 91-93.
28. Сисакян И.Н., Шорин В.П., Сойфер В.А., Мордасов В.И., Попов В.В. "Технологические возможности применения фокусаторов при лазерной обработке материалов". Сб. Компьютерная Оптика, 1988, N3, с. 94-97.
29. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1972.
30. Курочкин В.И. Теплофизическое воздействие лазерного излучения на материалы. Изд-во Куйбышевского Гос. Университета, 1990, 63 с.