Н.И.Глумов, Н.И.Крайнюков, В.В.Сергеев, А.Г.Храмов

БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ АППРОКСИМАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЯ В СКОЛЬЗЯЩЕМ ОКНЕ

1. Введение.

Для вычисления локальных характеристик изображения при наличии шумов часто используются различные алгоритмы аппроксимации изображения. Аппроксимация функции яркости изображения в некотором окне в виде многочлена от двух переменных позволяет выполнить сглаживание изображения, вычислить значение производных, определить геометрические инварианты (первую и вторую квадратичную форму поверхности, среднюю и гауссовскую кривизну) и т.д. Аппроксимация функции яркости производится методом наименьших квадратов, в этом случае аппроксимирующий многочлен представляет собой проекцию на конечномерное подпространство многочленов степени меньше или равной заданной [1,2]. При вычислении коэффициентов многочлена используются рекуррентные формулы, позволяющие существенно сократить вычисления.

2.Локальная аппроксимация изображения

Пусть $x(m,n)$ - функции яркости изображения в точке $(m,n)\in G$, G - область определения изображения. Аппроксимация изображения $x(m,n)$ в симметричном прямоугольном окне $W=\{\ (k,l)\ |\ -M\le k\le M,\ -N\le l\le N\ \}$ размером $(2M+1)\times(2N+1)$ заключается в том, что для каждого положения центра окна ищется приближенное представление функции яркости в виде полинома степени P:

$$\hat{x}(m-k,n-l)=\sum_{(l,j)\in\Omega} a_{ij}(m,n)\cdot k^i l^j\ ,\qquad (m,n)\in G\ ,\quad (k,l)\in W \tag{1}$$

где $\Omega=\{\ (i,j)\ |\ 0\le i\le P,\ 0\le j\le P,\ 0\le i+j\le P\ \}$ - множество показателей степеней, соответствующих полиному степени P. Заметим, что коэффициенты полинома $a_{ij}(m,n)$ являются функциями от положения центра окна (m,n).

Найдем коэффициенты $a_{ij}(m,n)$ в (1) из условия минимума среднеквадратичной ошибки аппроксимации:

$$\epsilon^2(m,n)=\sum_{(k,l)\in W}\left[x(m-k,n-l)-\hat{x}(m-k,n-l)\right]^2\ \to\ \min$$

Приравнивая нулю частные производные по коэффициентам полинома, получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов:

$$\sum_{(l,j)\in\Omega}\theta_{s+i,t+j}\cdot a_{ij}(m,n)=\mu_{st}(m,n)\ ,\quad (s,t)\in\Omega\ , \tag{2}$$

где $\mu_{st}(m,n)=\sum_{(k,l)\in W} k^s l^t x(m-k,n-l)$ - момент функции яркости изображения порядка (s,t) при положении центра окна в точке (m,n), $\theta_{s,t}=\sum_{(k,l)\in W} k^s l^t$ - постоянные коэффициенты, определяемые размерами окна W.

Решая систему (2), находим значения коэффициентов апроксимирующего полинома в виде линейной функции от моментных характеристик.

Рассмотрим случай аппроксимации квадратичным полиномом:

$$\begin{aligned}\hat{x}(m-k,n-l)=&A(m,n)\cdot k^2+B(m,n)\cdot k\cdot l+\\&+C(m,n)\cdot n^2+D(m,n)\cdot k+E(m,n)\cdot l+F(m,n)\end{aligned} \tag{3}$$

Решение системы (2) в этом случае будет иметь следующий вид:

$$A(m,n)=\frac{45\cdot\left(\mu_{20}(m,n)-\dfrac{M(M+1)\,\mu_{00}(m,n)}{3}\right)}{M(M+1)(2N+1)(8M^3+12M^2-2M-3)}\ ,$$

$$B(m,n)=\frac{9\cdot\mu_{11}(m,n)}{M(M+1)N(N+1)(2M+1)(2N+1)}\ ,$$

$$C(m,n)=\frac{45\cdot\left(\mu_{02}(m,n)-\dfrac{N(N+1)\mu_{00}(m,n)}{3}\right)}{N(N+1)(2M+1)(8N^3+12N^2-2N-3)}\ ,$$

$$D(m,n)=\frac{3\cdot\mu_{10}(m,n)}{M(M+1)(2M+1)(2N+1)}\ ,$$

$$E(m,n)=\frac{3\cdot\mu_{01}(m,n)}{N(N+1)(2N+1)(2M+1)}\ ,$$

$$F(m,n)=\frac{\mu_{00}(m,n)}{(2N+1)(2M+1)}-\frac{15\cdot\left(\mu_{20}(m,n)-\dfrac{M(M+1)\mu_{00}(m,n)}{3}\right)}{(2N+1)(8M^3+12M^2-2M-3)}-\frac{15\cdot\left(\mu_{02}(m,n)-\dfrac{N(N+1)\mu_{00}(m,n)}{2}\right)}{(2M+1)(8N^3+12N^2-2N-3)}\ .$$

Из выше приведенных формул видно, что вычислительная сложность алгоритма локальной аппроксимации определяется, в основном, затратами времени на вычисление моментных характеристик $\mu_{st}(m,n)$.

3. Рекурсивный алгоритм вычисления моментов.

Сначала построим рекурсивный алгоритм для расчета моментных характеристик функции одной переменной. Момент порядка k в точке n определяется по формуле:

$$\mu_k(n)=\sum_{s=-N}^{N} s^k \cdot x(n-s) \ .$$

Установим связь между $\mu_k(n)$ и моментами $\mu_0(n\text{-}1)$, $\mu_1(n\text{-}1)$,..., $\mu_k(n\text{-}1)$ в предыдущей точке $(n\text{-}1)$:

$$\sum_{s=-N}^{N} s^k \cdot x(n-s)=\sum_{s=-N+1}^{N+1} s^k \cdot x(n-s)+(-N)^k x(n+N)-(N+1)^k x(n-N-1)$$

$$\sum_{s=-N+1}^{N+1} s^k \cdot x(n-s)=\sum_{s=-N}^{N}(s+1)^k \cdot x(n-1-s)=$$

$$=\sum_{s=-N}^{N}\sum_{l=0}^{k} C_k^l \cdot s^l \cdot x(n-1-s)=\sum_{l=0}^{k} C_k^l \cdot \mu_l(n-1) \ ,$$

где C_k^i - биноминальные коэффициенты.

Таким образом, рекуррентное соотношение для вычисления моментов функции одной переменной имеет вид:

$$\mu_k(n)=\sum_{l=0}^{k} C_k^l \cdot \mu_l(n-1)+(-N)^k x(n+N)-(N+1)^k x(n-N-1) \ . \tag{4}$$

По аналогии с (4) получим рекурсивный алгоритм расчета моментных характеристик функции двух переменных:

$$\mu_k(m,n)=\sum_{l=0}^{k} C_k^l \cdot \mu_l(m-1,n)+(-M)^k x(m+N,n)-(M+1)^k x(m-N-1,n) \tag{5}$$

$$\mu_{kl}(m,n)=\sum_{j=0}^{l} C_k^j \cdot \mu_{kj}(m,n-1)+(-N)^l \mu_k(m,n+N)-(N+1)^l \mu_k(m,n-N-1) \ .$$

Данный алгоритм позволяет за один проход изображения скользящим окном вычислить все требуемые моментные характеристики за счет некоторого увеличения требуемого объема оперативной памяти для хранения промежуточных одномерных моментов $\mu_k(n)$, $k=0,\ldots,P$. Другой особенностью алгоритма является независимость объема вычислений от размеров окна обработки $(2M+1)(2N+1)$.

Для случая аппроксимации квадратичным полиномом (3) требуется вычислить моменты до второго порядка включительно, и система (5) принимает следующий вид:

$$\mu_0(m,n)=\mu_0(m-1,n)+x(m+M,n)-x(m-M-1,n)$$

$$\mu_1(m,n)=\mu_0(m-1,n)+\mu_1(m-1,n)+M\cdot x(m+M,n)-(M+1)\cdot x(m-M-1,n)$$

$$\mu_2(m,n)=\mu_0(m-1,n)+2\cdot\mu_1(m-1,n)+\mu_2(m-1,n)+M^2\cdot x(m+M,n)-(M+1)^2\cdot x(m-M-1,n)$$

$$\mu_{00}(m,n)=\mu_{00}(m,n-1)+\mu_0(m,n+N)-\mu_0(m,n-N-1)$$

$$\mu_{01}(m,n)=\mu_{00}(m,n-1)+\mu_{01}(m,n-1)-N\cdot\mu_0(m,n+N)-(N+1)\cdot\mu_0(m,n-N-1) \tag{6}$$

$$\mu_{02}(m,n)=\mu_{00}(m,n-1)+2\cdot\mu_{01}(m,n-1)+\mu_{02}(m,n-1)+N^2\cdot\mu_0(m,n+N)-(N+1)^2\cdot\mu_0(m,n-N-1)$$

$$\mu_{10}(m,n)=\mu_{10}(m,n-1)+\mu_1(m,n+N)-\mu_1(m,n-N-1)$$

$$\mu_{11}(m,n)=\mu_{10}(m,n-1)+\mu_{11}(m,n-1)-N\cdot\mu_1(m,n+N)-(N+1)\cdot\mu_1(m,n-N-1)$$

$$\mu_{20}(m,n)=\mu_{20}(m,n-1)+\mu_2(m,n+N)-\mu_2(m,n-N-1) \ .$$

Для расчетов моментов по рекуррентным соотношениям (6) требуется лишь 10 операций умножения и 27 операций сложения для каждого положения окна (умножение на два считается сложением). Рассмотренный алгоритм существенно эффективнее метода непосредственного вычисления моментов, для которого в данном случае требуется приблизительно $6(2M+1)(2N+1)$ операций умножения и сложения. Как показывает анализ, рекурсивный алгоритм вычисления моментов также эффективнее вычислений на основе быстрых алгоритмов дискретного преобразования Фурье.

4. Заключение.

Предложенный быстрый алгоритм позволяет произвести локальную аппроксимацию изображения в скользящем окне в виде многочлена любой степени от двух переменных. Рекурсивное вычисление кэффициентов существенно сокращает вычисления в случае больших размеров.

5. Литература.

1. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: