Наука, 1980.

2. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. .М: Мир,1975.

М.А.Голуб, С.Н.Хонина

РАЗЛОЖЕНИЕ КАРУНЕНА-ЛОЭВА ПРИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-КОСИНУСНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

1. Введение

Развитие оптических систем распознавания изображений и методов компьютерной оптики дает новый импульс для аппаратурной реализации разложения Карунена-Лоэва [1,2]. При компьютерном синтезе оптически пространственных фильтров, согласованных с разложением Карунена-Лоэва, важно иметь аналитические представления базисных функций. В работе [3] дан общий подход к аналитическому нахождению базисных функций Карунена-Лоэва для случая дробно-рационального спектра. Однако, он требует выполнения значительного количества громоздких операций, типа вычисления комплексных определителей, и не удобен для алгоритмизации.

В работе [4] даны простые формулы для случая экспоненциальной корреляционной функции. Однако для реальных полутоновых изображений более свойственен осциллирующий характер корреляционной функции, описываемый экспоненциально-косинусной формулой.

Численное решение интегрального уравнения Карунена-Лоэва трудоемко и практически неприемлемо для расчета оптических пространственных фильтров с числом отсчетов $\approx 2\cdot 10^3 \times 2\cdot 10^3$.

2.Аналитическое решение уравнения на собственные значения

Поскольку двумерные базисные функции могут рассчитываться в виде произведения одномерных, то будем рассматривать одномерное интегральное уравнение на собственные значения на симметричном интервале $[-A,A]$:

$$\int_{-A}^{A} K(x-u)\psi(u)du=\lambda\psi(x) \ . \tag{2.1}$$

Экспоненциально-косинусная корреляционная функция

$$K(\Delta x)=\sigma^2 \exp(\alpha|\Delta x|)\cos(\beta\Delta x) \ , \quad |\Delta x|\le A \tag{2.2}$$

имеет спектр:

$$G(\omega)=\frac{2\alpha\sigma^2(\alpha^2+\beta^2+\omega^2)}{\omega^4+2\omega^2(\alpha^2-\beta^2)+(\alpha^2+\beta^2)^2} \ . \tag{2.3}$$

Нормировку собственных функций выберем в виде

$$\int_{-A}^{A}|\psi(x)|^2dx=1 \ . \tag{2.4}$$

В соответствии с алгоритмом решения интегрального уравнения II-го рода для ядра с дробно-рациональном спектром (2.3), интегральное уравнение (2.1) сводится к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$\psi^{(4)}(x)-2\left(\alpha^2-\beta^2-\frac{\alpha\sigma^2}{\lambda}\right)\psi^{(2)}(x)+ +(\alpha^2+\beta^2)\left(\alpha^2+\beta^2-\frac{2\alpha\sigma^2}{\lambda}\right)=0 \ .$$

Решение этого уравнения можно записать в виде:

$$\psi(x)=b_1 e^{-\mathrm{E}\frac{x}{A}}+b_2 e^{\mathrm{E}\frac{x}{A}}+b_3 e^{-\Gamma\frac{x}{A}}+b_4 e^{\Gamma\frac{x}{A}} \ , \tag{2.5}$$

где E и Γ - корни соответствующего (2.5) характеристического уравнения, удовлетворяющие по теореме Виета условиям:

$$\begin{cases} \mathrm{E}^2+\Gamma^2=2\left(\alpha^2-\beta^2-\dfrac{A\alpha\sigma^2}{\lambda}\right) \\ \mathrm{E}^2\Gamma^2=(\alpha^2+\beta^2)\left(\alpha^2+\beta^2-\dfrac{2A\alpha\sigma^2}{\lambda}\right) \ . \end{cases} \tag{2.6}$$

Переходя от комплексных уравнений (2.6) к вещественным, представив E и Γ в комплексном виде: $E=\epsilon_0+i\epsilon$, $\Gamma=\gamma+i\gamma_0$

получаем пять возможных случаев решения (2.6):

1.

$$\begin{cases} \epsilon_0=0\ ,\quad \gamma=0 \\ \epsilon^2+\gamma_0^2=-2\left(\alpha^2-\beta^2-\dfrac{A\alpha\sigma^2}{\lambda}\right) \\ \epsilon^2\gamma_0^2=-\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\alpha^2+\beta^2-\dfrac{2A\alpha\sigma^2}{\lambda}\right) \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} \epsilon=0\ ,\quad \gamma_0=0 \\ \epsilon_0^2+\gamma^2=-2\left(\alpha^2-\beta^2-\dfrac{A\alpha\sigma^2}{\lambda}\right) \\ \epsilon_0^2\gamma^2=-\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\alpha^2+\beta^2-\dfrac{2A\alpha\sigma^2}{\lambda}\right) \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} \epsilon_0=0\ ,\quad \gamma_0=0 \\ \gamma^2-\epsilon^2=-2\left(\alpha^2-\beta^2-\dfrac{A\alpha\sigma^2}{\lambda}\right) \\ \epsilon^2\gamma^2=-\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\alpha^2+\beta^2-\dfrac{2A\alpha\sigma^2}{\lambda}\right) \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} \epsilon=0\ ,\quad \gamma=0 \\ \epsilon_0^2-\gamma_0^2=-2\left(\alpha^2-\beta^2-\dfrac{A\alpha\sigma^2}{\lambda}\right) \\ \epsilon_0^2\gamma_0^2=-\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\alpha^2+\beta^2-\dfrac{2A\alpha\sigma^2}{\lambda}\right) \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} \epsilon_0=\gamma\ ,\quad \epsilon=-\gamma_0 \\ \epsilon_0^2-\epsilon^2=\alpha^2-\beta^2-\dfrac{A\alpha\sigma^2}{\lambda} \\ \epsilon_0^2+\epsilon^2=\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\alpha^2+\beta^2-\dfrac{2A\alpha\sigma^2}{\lambda}\right) \end{cases}$$

Случаи 1,2,5 вступают в противоречие при $\lambda\to 0$, а 3 и 4 эквивалентны. Для случая 3, приходим к решению, что $E=i\epsilon$ - число мнимое, а $\Gamma=\gamma$ - действительное.

Подставляя (2.5) в интегральное уравнение (2.1), а затем приравнивая коэффициенты при одинаковых линейно-независимых функциях, получаем систему уравнений, из которой легко видеть, что возможен один из вариантов:

3.1: $b_1=b_2$ и $b_3=b_4$,

3.2: $b_1=-b_2$ и $b_3=-b_4$.

Последовательно рассматривая оба варианта, получаем формулу для базисных функций:

$$\psi(x)=\begin{cases} d_1\cos\left(\epsilon\dfrac{x}{A}\right)+d_2\mathrm{ch}\left(\gamma\dfrac{x}{A}\right) \\ c_1\sin\left(\epsilon\dfrac{x}{A}\right)+c_2\mathrm{ch}\left(\gamma\dfrac{x}{A}\right) \end{cases} \tag{2.7}$$

где коэффициенты удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} K_1\left[\dfrac{e^{i\epsilon}(\alpha-i\epsilon)}{\beta^2+(\alpha-i\epsilon)^2}\pm\dfrac{e^{-i\epsilon}(\alpha+i\epsilon)}{\beta^2+(\alpha+i\epsilon)^2}\right]+ \\ \quad +K_2\left[\dfrac{e^{\gamma}(\alpha-\gamma)}{\beta^2+(\alpha-\gamma)^2}\pm\dfrac{e^{-\gamma}(\alpha+\gamma)}{\beta^2+(\alpha+\gamma)^2}\right]=0 \\ K_1\left[\dfrac{e^{i\epsilon}}{\beta^2+(\alpha-i\epsilon)^2}\pm\dfrac{e^{-i\epsilon}}{\beta^2+(\alpha+i\epsilon)^2}\right]+ \\ \quad +K_2\left[\dfrac{e^{\gamma}}{\beta^2+(\alpha-\gamma)^2}\pm\dfrac{e^{-\gamma}}{\beta^2+(\alpha+\gamma)^2}\right]=0 \end{cases} \tag{2.8}$$

для 3.1: $K_1=d_1$, $K_2=d_2$ и используется знак "+",
для 3.2: $K_1=d_1$, $K_2=d_2$ и используется знак "-".

Система (2.8) имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен 0. Отсюда, выразив γ через ϵ в случае 3 системы (2.6) путем исключения λ, получаем систему трансцендентных уравнений:

$$\begin{cases} G_1(\gamma)\,G_2(i\epsilon)\left[\left(\dfrac{\alpha}{\epsilon}F_1(i\epsilon)\right)^P\pm\mathrm{tg}\epsilon\right]\left[\left(F_2(\gamma)\right)^P+\mathrm{th}\gamma\right]- \\ \quad -G_1(i\epsilon)\,G_2(\gamma)\left[\left(\dfrac{\alpha}{\gamma}F_1(\gamma)\right)^P-\mathrm{th}\gamma\right]\times \\ \quad\quad \times\left[\left(F_2(i\epsilon)\right)^P\mp\mathrm{tg}\epsilon\right]=0 \\ \gamma^2=\left(\alpha^2+\beta^2\right)\dfrac{\alpha^2-3\beta^2+\epsilon^2}{\alpha^2+\beta^2+\epsilon^2}\ , \end{cases} \tag{2.9}$$

где $F_1(x)=\dfrac{\beta^2+(\alpha^2-x^2)}{\beta^2-(\alpha^2-x^2)}$, $F_2(x)=\dfrac{\alpha^2+\beta^2+x^2}{2\alpha x}$

для 3.1: $G_1(x)=1$, $G_2(x)=\beta^2-(\alpha^2-x^2)$, $P=1$,

для 3.2: $G_1(x)=\alpha^2+\beta^2+x^2$, $G_2(x)=\alpha^2+\beta^2-x^2$, $P=-1$,

Из системы (2.8) и условия нормировки (2.4) получаем коэффициенты:

$$K_1=\frac{1}{\sqrt{A}\sqrt{\left(1\pm\frac{\sin 2\epsilon}{2\epsilon}\right)\pm 4D^2\left(1\pm\frac{\mathrm{sh}2\gamma}{2\gamma}\right)-\frac{4D}{\epsilon^2+\gamma^2}B}}$$

$$K_2=-D\cdot K_1$$

$$D=\frac{2C(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)}{\left[(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(e^{\gamma}\pm e^{-\gamma})+2\alpha\gamma(e^{\gamma}+e^{-\gamma})\right](\alpha^2+\beta^2+\epsilon^2)} \qquad (2.10)$$

где 3.1: $B=e^{\gamma}(\gamma\cos\epsilon+\epsilon\sin\epsilon)-e^{-\gamma}(\gamma\cos\epsilon-\epsilon\sin\epsilon)$

$C=(\alpha^2+\beta^2-\epsilon^2)\cos\epsilon+2\alpha\epsilon\cos\epsilon$

и 3.2: $B=e^{\gamma}(\gamma\sin\epsilon-\epsilon\cos\epsilon)+e^{-\gamma}(\gamma\sin\epsilon+\epsilon\cos\epsilon)$

$C=(\alpha^2+\beta^2-\epsilon^2)\sin\epsilon+2\alpha\epsilon\cos\epsilon$

Итак, решением интегрального уравнения для экспоненциально-косинусной корреляционной функции являются собственные функции вида (2.7) с $\epsilon=\epsilon_k$ и $\gamma=\gamma_k$, и собственные числа

$$\lambda_k=\frac{2A\alpha\sigma^2(\alpha^2+\beta^2+\epsilon_k^2)}{\epsilon_k^4+2\epsilon_k^2(\alpha^2-\beta^2)+(\alpha^2+\beta^2)^2}\ , \qquad (2.11)$$

где ϵ_k и γ_k для четных k являются решениями системы (2.9) для 3.1, для нечетных k - решениями системы (2.9) для 3.2, а коэффициенты d_{1k}, d_{2k} и c_{1k}, c_{2k} определяются соответственно по формуле (2.10) с $\epsilon=\epsilon_k$, $\gamma=\gamma_k$ и 3.1: $d_{1k}=K_1$, $d_{2k}=K_2$; 3.2: $c_{1k}=K_1$, $c_{2k}=K_2$.

Нумерацию индексами k выберем как принято в теории разложения Карунена-Лоэва согласно неравенствам:

$$\lambda_0\geq\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_{k-1}\geq\lambda_k\geq\ldots \qquad (2.12)$$

При $\beta=0$ приходим к случаю экспоненциальной корреляционной функции, предложенному в [4]. Уравнение (2.9) для обоих вариантов принимает вид:

$$(\alpha^2+\epsilon_k^2)\left(\mathrm{tg}\epsilon_k+\frac{\epsilon_k}{\alpha}\right)=0\ ,\quad k=0,2,4,\ldots$$

$$(\alpha^2+\epsilon_k^2)\left(\mathrm{tg}\epsilon_k-\frac{\alpha}{\epsilon_k}\right)=0\ ,\quad k=1,3,5,\ldots \qquad (2.13)$$

Нормированные коэффициенты описываются формулами:

$$d_{1k}=\frac{1}{\sqrt{A}\sqrt{\left(1+\frac{\sin 2\epsilon_k}{2\epsilon_k}\right)}}\ ,\quad D=0,\ d_{2k}=0$$

$$c_{1k}=\frac{1}{\sqrt{A}\sqrt{\left(1-\frac{\sin 2\epsilon_k}{2\epsilon_k}\right)}}\ ,\quad D=0,\ c_{2k}=0\ . \qquad (2.14)$$

Собственные числа принимают вид:

$$\lambda_k=\frac{2A\alpha\sigma^2}{\alpha^2+\epsilon^2}\ , \qquad (2.15)$$

а базисные функции:

$$\psi_k(x)=\begin{cases} d_{1k}\cos\left(\epsilon_k\frac{x}{A}\right), & k=0,2,4,\ldots \\ c_{1k}\sin\left(\epsilon_k\frac{x}{A}\right), & k=1,3,5,\ldots \end{cases} \qquad (2.16)$$

Формулы (2.13)-(2.16) совпадают с ранее полученным в [4] решением. При $\beta\neq 0$ получили обобщение на случай экспоненциально-косинусной корреляционной функции.

3. Алгоритмизация решения трансцендентных уравнений

Систему трансцендентных уравнений (2.9) будем решать методом Ньютона-Канторовича [5].

В нашем случае $(p+1)$-е приближение к решению $(\epsilon^{(p+1)},\gamma^{(p+1)})$ определяется через p-е $(\epsilon^{(p)},\gamma^{(p)})$ по формуле

$$\epsilon^{(p+1)}=\epsilon^{(p)}+\frac{1}{T}\left[\frac{\partial f_1}{\partial\gamma}f_2-\frac{\partial f_2}{\partial\gamma}f_1\right]$$

$$\gamma^{(p+1)}=\gamma^{(p)}+\frac{1}{T}\left[\frac{\partial f_1}{\partial\epsilon}f_2-\frac{\partial f_2}{\partial\epsilon}f_1\right],$$

где

$$T=\frac{\partial f_1}{\partial\epsilon}\frac{\partial f_2}{\partial\gamma}-\frac{\partial f_2}{\partial\epsilon}\frac{\partial f_1}{\partial\gamma}\ ,$$

а функции f_1, f_2 и их производные берутся в точке $(\epsilon^{(p)},\gamma^{(p)})$.

Каждый из интервалов системы (2.9) имеет бесконечное множество решений, которые могут быть отделены на непересекающихся интервалах [6], соответствующих $\psi(x)$:

$$\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ k=0;\ \left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right),\ldots,\left(\frac{\pi(k-1)}{2},\frac{\pi(k+1)}{2}\right),\ k=2,4$$

$$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right),\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right),\ldots,\left(\frac{\pi k}{2},\frac{\pi(k+1)}{2}\right),\ k=1,3,5,\ldots$$

При этом λ_k определяется по формуле (2.11).

Анализ полученных результатов показывает, что монотонно возрастающие $\{\epsilon_k\}$ и $\{\gamma_k\}$ определяют строго убывающую последовательность собственных чисел (2.11).

Алгоритм нахождения базисных функций Карунена-Лоэва записывается следующим образом.

При четном номере k базисной функции (k=0,2,4,...)

$$\psi_k(x)=d_{1k}\cos\left(\epsilon_k\frac{x}{A}\right)+d_{2k}\mathrm{ch}\left(\gamma_k\frac{x}{A}\right)$$

Для нахождения ϵ_k берется начальное приближение $\epsilon_k^{(0)}$ из интервала

$$\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ k=0;\ \left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right),\ldots,\left(\frac{\pi(k-1)}{2},\frac{\pi(k+1)}{2}\right),\ k=2,4,6,\ldots$$

Зная ассимптотическое поведение собственных чисел [6], лучше брать

$$\epsilon_k^{(0)}=\frac{\pi k}{2}\ ,\quad \epsilon_0^{(0)}=\frac{\pi}{4}$$

Затем повторяется процедура нахождения следующего приближения по (2.16) до тех пор, пока

$$\left|\epsilon_k^{(p+1)}-\epsilon_k^{(p)}\right|$$

не станет меньше требуемой точности.

При нечетном k (k=1,3,5,...):

$$\psi_k(x)=c_{1k}\sin\left(\epsilon_k\frac{x}{A}\right)+c_{2k}\mathrm{ch}\left(\gamma_k\frac{x}{A}\right)$$

Величина $\epsilon_k^{(0)}$ назначается из интервала:

$$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right),\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right),\ldots,\left(\frac{\pi k}{2},\frac{\pi(k+2)}{2}\right),\ k=1,3,5,\ldots$$

Рекомендуется выбирать $\epsilon_k^{(0)}=\frac{\pi(k+\theta)}{2}$, θ - малое число.

4. Разложение Карунена-Лоэва для полутонового изображения

В качестве примера рассматривалось двумерное полутоновое изображение - портрет (см.рис.1). Усреднив двумерное изображение отдельно по строкам и столбцам, получили два одномерных массива, для которых и были построены два набора базисных функций Карунена-Лоэва, порождающие двумерные базисные функции путем факторизации.

Рассчитанная $K(\Delta x)$ и аппроксимирующая $\hat{K}(\Delta x)$ корреляционные функции для строк и столбцов показаны соответственно на рис.2а и рис.2б.

Для аппроксимирующих корреляционных функций были оценены следующие параметры:

для строк: σ=7.85, α=2.52, β=0.86

для столбцов: σ=14.82, α=2.87, β=0.41

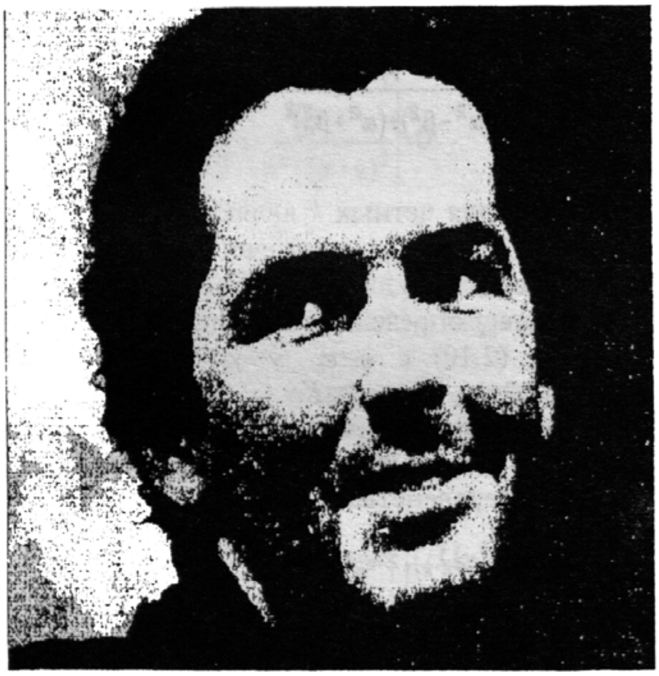

Рис.1 Двумерное полутоновое изображение - портрет

Результаты решения интегрального уравнения для обоих одномерных изображений приведены в Табл.1 и Табл.2.

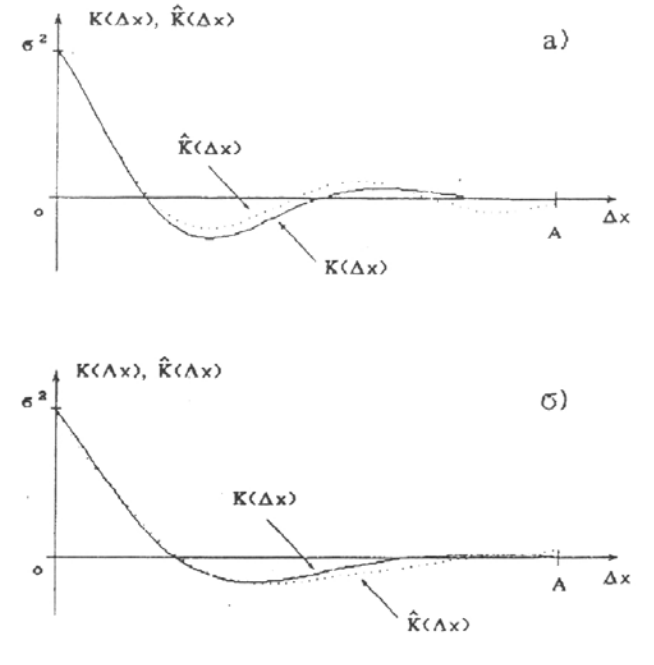

Рис.2 Рассчитанная и аппроксимирующая корреляционные функции для усредненных строк (а) и столбцов (б) изображения

Более наглядно расположение можно представить следующим образом:

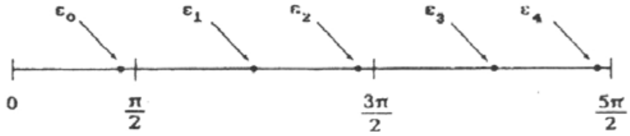

Рис.3 Расположение ϵ_k на непересекающихся интервалах

Табл.1 Параметры базисных функций Карунена-Лоэва для усредненных строк изображения

Номер базисной функции, k	ϵ_k	γ_k	Собственное число, λ_k
0	1,513	13,349	38,387
1	3,024	13,440	37,341
2	4,549	13,582	35,620
3	6,030	13,759	33,268
4	7,259	13,960	30,363

Табл.2 Параметры базисных функций Карунена-Лоэва для усредненных столбцов изображения

Номер базисной функции, k	ϵ_k	γ_k	Собственное число, λ_k
0	1,495	17,368	64,726
1	2,987	17,383	64,088
2	4,483	17,406	63,069
3	5,981	17,437	61,730
4	7,480	17,473	60,147

Вид базисных функций Карунена-Лоэва $\psi_k(x)$ на интервале $x \in [0,A]$, построенных по экспоненциально-косинусной аппроксимации корреляционной функции усредненных строк и столбцов рассматриваемого двумерного полутонового изображения, показан соответственно на рис.4а и рис.4б.

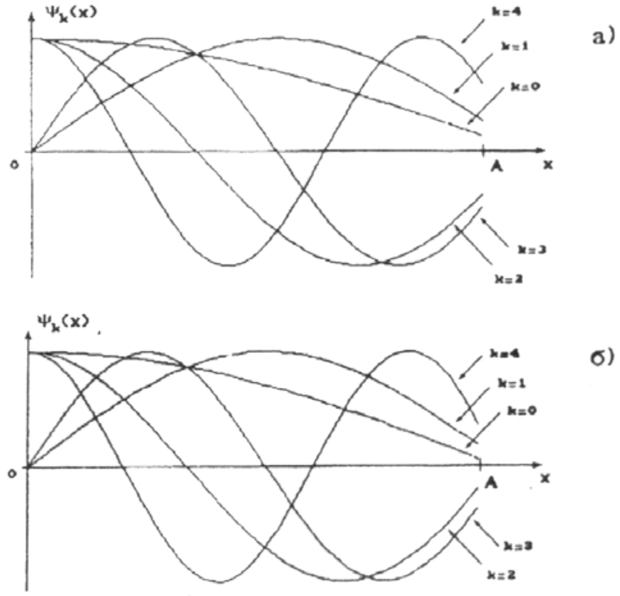

Рис.4 Базисные функции Карунена-Лоэва $\psi_k(x)$ на интервале $x \in [0,A]$, построенные по экспоненциально-косинусной аппроксимации корреляционной функции усредненных строк (а) и столбцов (б)

Литература

1. Кловский Д.Д., Сойфер В.А. Обработка пространственно-временных сигналов. М.: Связь, 1976.

2. Сисакян И.Н., Сойфер В.А. Компьютерная оптика. Достижения и проблемы. В сб. Компьютерная оптика, вып.1., М.,МЦНТИ, 1987, с.5-19.

3. Youla D.C. The solution of a homogeneus Wiener-Hopf integral equation occuring in the expansion of second-order stationary random functions; JRE Trans on Inf.Theory 1957.

4. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т.I. М.: Советское радио, 1972.

5. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. М.: Наука, 1980.

6. Capon J. Asymptotic eigenfunctions and eigenvalues of a homogeneous integral equation. IRE.Transactions on Inf.Theory, 1962, v.IT-8, pp.2-4.