

# РАСЧЕТ СКЛЕЕННЫХ ДВУХ- И ТРЕХЛИНЗОВЫХ РАДИАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С. А. Степанов, Е. Г. Ежов, Г. И. Грейсх

Пензенская государственная архитектурно-строительная академия

## Аннотация

Рассмотрены расчетные процедуры и проанализированы коррекционные возможности оптических систем, склеенных из двух или трёх элементов, выполненных из неоднородных материалов с радиальным распределением показателя преломления. Приведены схемы и конструктивные параметры систем, свободных от всех монохроматических aberrаций третьего, а также третьего и пятого порядков. Представлены полевые характеристики, показывающие, что системы всех рассмотренных типов могут быть использованы в качестве высококрасящих объективов-монохроматов.

## Введение

Коррекционные возможности радиально-градиентных линз существенно превосходят соответствующие возможности одиночных линз любого другого типа. Однако и они ограничены так, что одиночная радиально-градиентная линза со сферическими преломляющими поверхностями не может быть свободна одновременно более чем от четырех из пяти монохроматических aberrаций третьего порядка и более чем от двух из двенадцати aberrаций пятого порядка [1]. Очевидный путь расширения коррекционных возможностей – построение систем из нескольких линз. Простейшими системами такого типа являются склеенные дублеты и триплеты. Число коррекционных параметров этих систем достаточно для того, чтобы поставить задачу одновременного устранения всех монохроматических aberrаций третьего или третьего и пятого порядков. Пути решения этой задачи практически не зависят от увеличения оптической системы, если модуль увеличения не равен единице. Поэтому ниже для определенности будем полагать, что увеличение рассматриваемой системы равно нулю, т.е. предмет расположен в бесконечности.

### 1. Системы, свободные от aberrаций третьего порядка

Склеенный дублет может быть свободен от всех монохроматических aberrаций третьего порядка даже в том случае когда его внешние преломляющие поверхности плоские. Для этого он должен быть изготовлен из двух неоднородных материалов, разделенных сферической поверхностью склейки. Склеенная линза Вуда (СЛВ) – вполне подходящее название для такого дублета.

В приближении aberrаций не выше третьего порядка и в случае нулевого увеличения оптические характеристики СЛВ (Рис. 1) определяются следующими девятью параметрами: кривизной поверхности склейки  $C$ , толщинами сред  $d_1$  и  $d_2$ , их базовыми показателями преломления  $n_0^{(1)}$  и  $n_0^{(2)}$  (верхний индекс указывает номер среды), коэффициентами радиального градиента  $n_1^{(i)}$ ,  $n_2^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ).

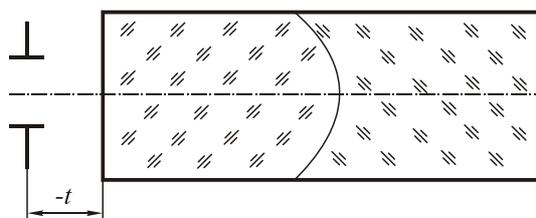


Рис. 1. Склеенная линза Вуда

Здесь предполагается, что распределение показателя преломления неоднородной среды, описывается выражением вида

$$n(\rho) = \sum_{p=0} n_p \rho^{2p},$$

где  $\rho$  – расстояние от оси линзы.

В данный набор параметров не вошло расстояние  $t$ , определяющее положение входного зрачка, поскольку, если в оптической системе все монохроматические aberrации данного порядка устранены при некотором положении зрачка, то они отсутствуют и при любом другом его положении.

Обратимся теперь к системе уравнений, которая должна быть решена для определения вышеперечисленных параметров. В нее входят два параксиальных уравнения (одно для фокусного расстояния  $f'$ , а другое для заднего фокального отрезка  $s'_F$ ) и пять компенсационных уравнений, обеспечивающих устранение сферической aberrации, комы, астигматизма, кривизны Петцваля и дисторсии. Все семь уравнений несложно записать в явном виде воспользовавшись результатами работ [2, 3]. Решить систему можно итерационно относительно семи выделенных параметров, считая два оставшихся свободными. В качестве свободных параметров целесообразно выбрать базовые показатели преломления  $n_0^{(1)}$  и  $n_0^{(2)}$ .

Поиск и исследование областей существования физически реализуемых решений рассматриваемой системы уравнений показал, что решения существуют при условии, что фронтальная часть СЛВ выполнена из материала с более высоким базовым показателем преломления ( $n_0^{(1)} > n_0^{(2)}$ ), а кривизна поверхности склейки и оптическая сила материала, следующего за ней, являются отрицательными ( $c < 0$ ;  $n_1^{(2)} > 0$ ). При этом имеется два типа реше-

ний. В одном из них оптическая сила материала фронтальной части СЛВ положительна ( $n_1^{(1)} < 0$ ), а во втором - отрицательна ( $n_1^{(1)} > 0$ ). Найденные решения, равноценные с точки зрения aberrаций третьего порядка, конечно же, отличаются друг от друга в других отношениях и, в частности, по уровню остаточных aberrаций высших порядков. Хорошим индикатором последнего является модуль кривизны поверхности склейки: чем он больше, тем выше общий уровень остаточных aberrаций. Из приведенных условий существования решений следует, что меньшие кривизны соответствуют решениям первого типа. Поэтому именно эти решения и были выбраны для лучевой оценки потенциальных возможностей СЛВ с точки зрения ее использования в качестве высокоразрешающего объектива.

Анализ показал, что для минимизации кривизны поверхности склейки целесообразно выбирать  $n_0^{(1)}$  и  $n_0^{(2)}$  такими, чтобы разность между ними была максимально возможной. При этом задний отрезок  $s'_F$  следует выбрать минимально возможным. Здесь, однако, отметим, что с уменьшением величины  $s'_F$  растет максимальный перепад показателя преломления сред СЛВ. Поэтому величину заднего отрезка приходится выбирать на основе компромисса между стремлением достичь максимально большого поля зрения и технологическими возможностями реализации требуемого перепада показателя преломления.

Потенциальные возможности СЛВ, используемой в качестве высокоапертурного объектива, продемонстрируем на примере линзы с фокусным расстоянием  $f' = 24$  мм и числовой апертурой  $NA = 0.18$ , обеспечивающей на длине волны  $\lambda = 0.44$  мкм релейское разрешение  $\delta_R = 1.5$  мкм. В качестве низкоапертурного объектива рассмотрим СЛВ с тем же фокусным расстоянием, но с числовой апертурой  $NA = 0.108$ , обеспечивающей на выбранной длине волны релейское разрешение  $\delta_R = 2.5$  мкм. Наборы конструктивных параметров высокоапертурного ( $s'_F = 0$ ) и низкоапертурного ( $s'_F = 0.1 f'$ ) вариантов СЛВ, обеспечивающие одновременное устранение всех монохроматических aberrаций третьего порядка, представлены в Табл. 1.

Полевые характеристики СЛВ с параметрами, представленными в этой таблице при числовой апертуре  $NA = 0.18$ , заднем фокальном отрезке  $s'_F = 0$  и положении входного зрачка, обеспечивающем максимальное поле высококачественного изображения, приведены в Табл. 2 в строке, соответствующей  $\delta_R = 1.5$  мкм и  $n_p^{(i)} = 0$  при  $p \geq 3$ . Полевые характеристики получены на основе расчета хода лучей, качество изображения оценивалось по критерию  $Q_4 = 0.7$  [4].

**Таблица 1.** Конструктивные параметры высокоапертурного ( $s'_F = 0$ ) и низкоапертурного ( $s'_F = 0.1 f'$ ) вариантов СЛВ, свободной от всех монохроматических aberrаций третьего порядка

Параметры	Значения параметров	
	$s'_F = 0$	$s'_F = 0.1 f'$
$d_1 / f'$	2.4025	1.7836
$n_0^{(1)}$	1.9	1.9
$n_1^{(1)} f'^2$	-0.2328	-0.2601
$n_2^{(1)} f'^4$	0.0638	0.2195
$cf'$	-2.7145	-2.9338
$d_2 / f'$	0.5119	0.6258
$n_0^{(2)}$	1.5	1.5
$n_1^{(2)} f'^2$	1.5182	1.2023
$n_2^{(2)} f'^4$	-1.5274	1.2023

Параксиальный расчет и теория aberrаций третьего порядка позволяют получить значения лишь двух коэффициентов разложения показателей преломления радиально-градиентных сред:  $n_p^{(i)}$  при  $p = 1, 2$ . Дальнейшая оптимизация профилей, т.е., определение оптимальных значений коэффициентов  $n_p^{(i)}$  при  $p \geq 3$ , также как и оптимизация положения входного зрачка, проводились на основе расчета хода лучей. При этом полагалось, что полином, описывающий распределение показателей преломления градиентных сред, не содержит членов с  $p > 5$ . В результате задача оптимизации профилей сводилась к определению значений коэффициентов  $n_p^{(i)}$  при  $p = 3 - 5$ . Результат оптимизации представлен в Табл. 2 в части, соответствующей  $\delta_R = 1.5$  мкм и  $n_p^{(i)} \neq 0$  при  $p = 3 - 5$ . В этой таблице  $2y'$  и  $\delta y'$  - диаметр поля высококачественного изображения и дисторсия СЛВ.

Поскольку рассмотренная здесь СЛВ имеет нулевой задний фокальный отрезок, то ее в определенной степени можно считать конструктивно усложненным аналогом четвертьпериодного градиентного стержня. Расчет хода лучей через последний показал, что при фокусном расстоянии градиентного стержня  $f' = 24$  мм, базовом показателе преломления  $n_0 = 1.9$ , оптимальном положении зрачка  $t = 0$  и оптимальном профиле показателя преломления [5], диаметр поля, в пределах которого обеспечивается релейское разрешение  $\delta_R = 1.5$  мкм, составляет лишь  $2y' = 0.7$  мм. Отметим здесь также, что длина градиентного стержня примерно равна суммарной толщине рассмотренной СЛВ.

Ниже остановимся на результатах исследования потенциальных возможностей СЛВ при низкой апертуре. В этом случае величина заднего фокального отрезка выбиралась на основе вышеупомянутого компромисса и при числовой апертуре  $NA=0.108$ , обеспечивающей на длине волны  $\lambda=0.44$  мкм релейское разрешение  $\delta_R=2.5$  мкм, составляла  $s'_F=0.1 f'$  (см. Табл. 1). Оптимизация профилей показателей преломления сред СЛВ производилась также, как и для линзы с  $NA=0.18$ . В

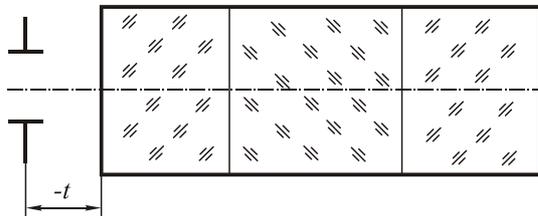
нижней части Табл. 2 приведены конструктивные параметры СЛВ, формирующей изображение с разрешением  $\delta_R=2.5$  мкм до и после оптимизации коэффициентов  $n_p^{(i)}$  при  $p=3-5$ . Из Табл. 2 видно, что благодаря оптимизации профилей показателей преломления сред СЛВ диаметр поля высококачественного изображения удалось увеличить в зависимости от числовой апертуры в 1.7 - 1.9 раза.

**Таблица 2.** Дополнительные конструктивные параметры и полевые характеристики высокоапертурного и низкоапертурного вариантов СЛВ до и после оптимизации ( $f' = 24$  мм,  $\lambda = 0.44$  мкм)

Среда	Конструктивные параметры				Полевые характеристики				
	$n_3 f'^6$	$n_4 f'^8$	$n_5 f'^{10}$	$t/f'$	$D_{\%}, \text{мм}$	$\Delta n$	$\delta_R, \text{мкм}$	$2y', \text{мм}$	$\delta y', \%$
1	0	0	0		16.7	-0.028		6.1	-0.04
2	0	0	0		6.3	0.026			
1	-0.1168	-0.1404	0.5484	1.3	24.0	-0.058	1.5	11.7	0.15
2	26.67	-1228	15691		11.7	0.090			
1	0	0	0		12.2	-0.017		8.6	0.02
2	0	0	0		7.7	0.031			
1	0.4480	-7.8572	39.260	0.81	16.8	-0.032	2.5	14.3	0.42
2	15.095	-709.36	9062.8		12.4	0.080			

Параметры  $D_{\%}$ ,  $\Delta n$  - световые диаметры и перепады показателей преломления соответствующих сред.

Другим вариантом простейшей радиально-градиентной системы, свободной от всех монохроматических аберраций третьего порядка, является компонент, склеенный из трех плоскопараллельных пластин, выполненных из двух неоднородных материалов с радиальным распределением показателя преломления (Рис. 2).



**Рис.2** Компонент, склеенный из трех плоскопараллельных пластин

В приближении аберраций не выше третьего порядка и в случае расположения предмета в бесконечности оптические характеристики такого тройного склеенного компонента (ТСК) определяются, также как и у СЛВ, девятью параметрами: толщинами сред  $d_1$ ,  $d_2$  и  $d_3$ ; их базовыми показателями преломления  $n_0^{(1)} = n_0^{(3)}$ ,  $n_0^{(2)}$ ; коэффициентами радиального градиента  $n_p^{(1)} = n_p^{(3)}$ ,  $n_p^{(2)}$  ( $p=1, 2$ ).

При решении системы параксиальных и компенсационных уравнений, подобной той что была описана выше для СЛВ, в качестве свободных параметров целесообразно вновь выбрать базовые показатели преломления  $n_0^{(1)}$  и  $n_0^{(2)}$ . Поиск и исследование областей существования физически реализуемых решений системы уравнений, составленной для

ТСК, показал, что решения существуют в достаточно широком диапазоне длин заднего фокального отрезка  $s'_F$  при выполнении двух нижеследующих условий: базовый показатель преломления внешних сред ТСК должен быть более высоким, чем у внутренней среды; оптические силы внешних сред должны быть положительными, а оптическая сила внутренней среды - отрицательной ( $n_0^{(1)} > n_0^{(2)}$ ,  $n_1^{(1)} < 0$ ,  $n_1^{(2)} > 0$ ). В этом случае каждому конкретному значению  $s'_F$  внутри диапазона существования решений соответствует свой диапазон допустимых значений разности базовых показателей преломления  $\Delta n_0 = n_0^{(1)} - n_0^{(2)}$ .

Наборам свободных параметров  $n_0^{(1)}$  и  $n_0^{(2)}$ , а также значениям  $s'_F$ , лежащим в области существования решений, соответствуют, как правило, два решения, отличающиеся друг от друга, в частности, суммарной толщиной трех неоднородных сред. Разница в толщинах уменьшается с приближением к верхней границе диапазона допустимых значений  $n_0^{(1)}$  и на этой границе происходит вырождение двух решений в одно. При дальнейшем увеличении  $n_0^{(1)}$  уравнения решаемой системы становятся несовместными. Нижние же границы диапазона допустимых значений  $n_0^{(1)}$  для двух решений не совпадают. Однако существование этих границ обусловлено одной и той же причиной: при подходе к границе толщина внутренней среды ТСК  $d_2$  стремится к нулю, а первый коэффициент радиального градиен-

та этой среды  $n_1^{(2)}$  резко возрастает. При одинаковых значениях  $s'_F$  «толстые» решения существуют в более широком диапазоне значений  $\Delta n_0$ , но как у «тонких», так и у «толстых» решений этот диапазон сужается при сокращении заднего фокального отрезка.

Технологическая реализуемость найденных решений зависит от требуемого перепада показателя преломления  $\Delta n_{TСК}$ , равного перепаду показателя преломления той неоднородной среды ТСК, у которой он наибольший. Исследования показали, что наименьший перепад показателя преломления, при прочих равных условиях, обеспечивает то из двух возможных решений, которому соответствует мень-

шая суммарная толщина трех неоднородных сред ТСК. Анализ аберраций пятого и последующих порядков ТСК показал, что их уровень наиболее низок как раз в той части диапазона допустимых значений  $s'_F$ , на которую приходится минимум  $\Delta n_{TСК}$ .

Конструктивные параметры и оптимизированные полевые характеристики ТСК с перепадом показателя преломления, минимальным для тех же апертур, которые были выбраны при анализе СЛВ, представлены в Табл. 3. Оптимизация осуществлялась методом расчета хода лучей по третьему, четвертому и пятому коэффициентам радиального градиента сред ТСК ( $n_p^{(1)}$  и  $n_p^{(2)}$  при  $3 \leq p \leq 5$ ) и положению входного значения  $t$ .

**Таблица 3.** Конструктивные параметры и полевые характеристики ТСК ( $f' = 24$  мм,  $\lambda = 0.44$  мкм)

Параметры	Значения параметров для числовой апертуры $NA$ и разрешения $\delta_R$ (мкм)	
	$NA = 0.108; \delta_R = 2.5$	$NA = 0.18; \delta_R = 1.5$
ТСК		
$d_1/f'$	0.6275	0.6049
$n_0^{(1)}$	1.892	1.912
$n_1^{(1)} f'^2$	-1.142	-1.130
$n_2^{(1)} f'^4$	0.2195	0.1696
$n_3^{(1)} f'^6$	-0.5914	-0.4252
$n_4^{(1)} f'^8$	16.43	13.63
$n_5^{(1)} f'^{10}$	-80.52	-86.87
$d_2/f'$	0.4684	0.5563
$n_0^{(2)}$	1.5	1.5
$n_1^{(2)} f'^2$	2.415	1.9615
$n_2^{(2)} f'^4$	-0.6846	-0.3060
$n_3^{(2)} f'^6$	9.598	9.489
$n_4^{(2)} f'^8$	-426.6	-425.1
$n_5^{(2)} f'^{10}$	831.2	3146
$d_3/f'$	0.9473	0.9641
$s'_F/f'$	0.36	0.36
$t/f'$	0.562	0.530
$D_{\%}^{(1;3)}$ , мм	14.1	14.1
$D_{\%}^{(2)}$ , мм	7.9	9.7
$\Delta n^{(1;3)} = \Delta n_{TСК}$	0.098	0.098
$\Delta n^{(2)}$	0.065	0.080
$2\omega$ , град.	31.2	24
$2y'$ , мм	13.5	10.2
$\delta y'$ , %	0.4	0.1

Остальные конструктивные параметры ТСК были получены путем решения системы параксиальных и компенсационных уравнений, обеспечиваю-

щих полное устранение всех монохроматических аберраций третьего порядка. При этом базовый по-

казатель преломления внутренней среды  $n_0^{(2)}$  принимался равным 1.5, а значения  $s'_F$  и  $n_0^{(1)}$  выбирались такими, чтобы перепад показателя преломления  $\Delta n_{ТСК}$  был минимально возможным.

Сопоставляя данные Табл. 2 и Табл. 3, нетрудно видеть, что коррекционные возможности радиально-градиентного ТСК и склеенной линзы Вуда аналогичны, а полевые характеристики сопоставимы и позволяют использовать их в качестве высококорректирующих объективов.

## 2. Система, свободная от аберраций третьего и пятого порядков

Простейшей радиально-градиентной системой, у которой могут быть одновременно устранены все монохроматические аберрации третьего и пятого порядков, является склеенный триплет (СТ), выполненный из трех различных неоднородных материалов, ограниченных сферическими преломляющими поверхностями (Рис. 3).

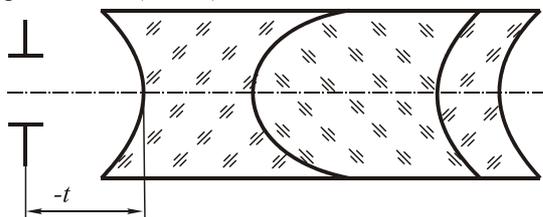


Рис. 3. Склеенный триплет.

В приближении аберраций не выше пятого порядка и в случае увеличения, равного нулю, оптиче-

Таблица 4. Конструктивные параметры СТ, свободного от всех монохроматических аберраций третьего и пятого порядков

$cf'$	$d/f'$	$n_0$	$n_1 f'^{-2}$	$n_2 f'^4$	$n_3 f'^6$
-1.2933					
	0.4370	1.5	-0.9978	2.9799	-10.328
2.4287					
	0.9704	1.9	0.0968	2.7063	14.733
0.7992					
	0.1752	1.5	-0.7614	-0.0373	-26.586
0.7552					
$s'_F = 0.31f'$					

Таблица 5. Дополнительные конструктивные параметры и полевые характеристики СТ до и после оптимизации ( $f' = 24$  мм,  $\lambda = 0.44$  мкм)

Линза	Конструктивные параметры				Полевые характеристики			
	$n_4 f'^8$	$n_5 f'^{10}$	$D_{\%}$ , мм	$\Delta n$	$t/f'$	$\delta_R$ , мкм	$2y'$ , мм	$\delta y'$ , %
1	0	0	8.24	-0.029				
2	0	0	8.32	0.003	0.249		12.14	-0.02
3	0	0	9.17	-0.028				
1	34.374	-66.167	14.7	-0.093		2.5		
2	-146.03	194.50	13.3	0.008	0.378		25.25	0.15
3	129.49	-145.65	16.2	-0.086				
1	0	0	9.35	-0.038				
2	0	0	9.24	0.004	-		0	-
3	0	0	3.81	-0.005				
1	34.638	-85.081	15.0	-0.086		1.5		
2	58.507	735.45	11.6	0.005	0.390		14.12	-0.02

ские характеристики СТ определяются следующими девятнадцатью параметрами: кривизнами преломляющих поверхностей  $c_1, c_2, c_3$  и  $c_4$ ; толщинами линз  $d_1, d_2$  и  $d_3$ ; их базовыми показателями преломления  $n_0^{(1)}, n_0^{(2)}$  и  $n_0^{(3)}$ ; коэффициентами радиального градиента  $n_1^{(i)}, n_2^{(i)}$ , и  $n_3^{(i)}$  ( $i = 1 - 3$ ).

Если фокусное расстояние и задний фокальный отрезок объектива заданы, то задача устранения всех монохроматических аберраций третьего и пятого порядков сводится к решению системы 16 уравнений с 19 неизвестными. В этом случае базовые показатели преломления всех градиентных линз целесообразно рассматривать в качестве свободных параметров, что позволит уменьшить количество неизвестных до числа решаемых уравнений.

Система 16 уравнений решалась итерационно. Анализ физически реализуемых решений показал, что оптическая схема СТ зависит от выбора величин заднего фокального отрезка и базовых показателей преломления линз. В частности, если внутренняя линза СТ имеет самый высокий базовый показатель преломления и задний фокальный отрезок не очень короткий, то фронтальная линза будет двояковогнутой, а обе последующие линзы окажутся менисками с положительной кривизной поверхностей [6].

Одно из характерных решений, обеспечивающих отсутствие у СТ всех монохроматических аберраций третьего и пятого порядков, представлено в Табл. 4.

Оценка размера поля высококачественного изображения СТ с вышеприведенными параметрами производилась при фокусном расстоянии  $f' = 24$  мм. Лучевой расчет показал, что поле высококачественного изображения достигает максимума, когда входной зрачок СТ расположен внутри фронтальной линзы. Результаты лучевого расчета до и после оптимизации для апертур, обеспечивающих релейское разрешение  $\delta_R$ , равное 2.5 и 1.5 мкм, представлены в Табл. 5.

#### **Заключение**

Данные, приведенные в Табл. 2, 3 и 5, показывают, что склеенные оптические системы всех рассмотренных в этой статье типов (СЛВ, ТСК и СТ) могут быть использованы в качестве высококачественных объективов. При этом по размеру поля высококачественного изображения СТ не уступает лучшим из известных трехлинзовых объективов-монохроматов и, в частности, объективам, состоящим из трех дифракционных линз [7].

#### **Благодарность**

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКНТ РФ (НТП "Наукоемкие технологии").

#### **Литература**

1. Greisukh G. I., Bobrov S. T., Stepanov S. A. Optics of diffractive and gradient-index elements and systems. - Bellingham: SPIE Press, 1997. - 414 p., Sec. 6.3.
2. P.J.Sands. Inhomogeneous lenses. III. Paraxial optics // J. Opt. Soc. Amer. - 1971. - Vol. 61. - P. 879-885.
3. P.J.Sands. Third-order aberrations of inhomogeneous lenses // J. Opt. Soc. Amer. - 1970. - Vol. 60. - P. 1436-1443.
4. Ссылка 1, Sec. 3.2.
5. Микаэлян А.Л. Применение слоистой среды для фокусировки волн // ДАН СССР. - 1951. - Т. 81, № 4. - С. 569-571.
6. G. I. Greisukh and S. A. Stepanov. Design of a cemented, radial gradient-index triplet // Appl. Opt. - 1998 - Vol. 37. - P. 2697-2690.
7. Ссылка 1, Secs. 7.2 - 7.4.

# Computing of optical systems consisting of two and three cemented radial gradient-index lenses

S.A. Stepanov, E.G. Ezhov, G.I. Greisukh  
Penza State Academy of Architecture and Construction

## *Abstract*

This paper considers the computational procedures and analyzes the correction capabilities of optical systems consisting of two or three elements made of inhomogeneous materials with radial distribution of the refractive index. The article presents the schemes and design parameters of the systems that are free from all monochromatic aberrations of the third order, as well as the third and fifth orders. The paper presents the field characteristics, showing that the systems of all the considered types can be used as high-resolution monochromatic lenses.

*Citation:* Stepanov SA, Ezhov EG, Greisukh GI. Computing of optical systems consisting of two and three cemented radial gradient-index lenses. *Computer Optics* 1999; 19: 96 - 101.

## *References*

- [1] Greisukh G. I., Bobrov S. T., Stepanov S. A. Optics of diffractive and gradient-index elements and systems. - Bellingham: SPIE Press, 1997. - 414 p., Sec.6.3.
- [2] P.J.Sands. Inhomogeneous lenses. III. Paraxial optics // *J.Opt.Soc.Amer.*-1971.-Vol.61.-P.879-885.
- [3] P.J.Sands. Third-order aberrations of inhomogeneous lenses // *J. Opt. Soc. Amer.* - 1970. - Vol. 60. -P. 1436-1443.
- [4] Greisukh G. I., Bobrov S. T., Stepanov S. A. Optics of diffractive and gradient-index elements and systems. - Bellingham: SPIE Press, 1997. - 414 p., Sec. 3.2.
- [5] Mikaelyan AL. Application of a layered medium to focusing of waves. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*; 1951; 81: 569-571.
- [6] G. I. Greisukh and S. A. Stepanov. Design of a cemented, radial gradient-index triplet // *Appl. Opt.* -1998 - Vol. 37. - P. 2697-2690.
- [7] Greisukh G. I., Bobrov S. T., Stepanov S. A. Optics of diffractive and gradient-index elements and systems. - Bellingham: SPIE Press, 1997. - 414 p., Secs. 7.2 - 7.4.