

РАСЧЕТ ХОДА ПСЕВДОЛУЧЕЙ ЧЕРЕЗ ДИФРАКЦИОННЫЕ СТРУКТУРЫ, ВЫПОЛНЕННЫЕ НА СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Е. Г. Ежов¹, С. А. Степанов²

¹Институт систем обработки изображений РАН

²Пензенская государственная архитектурно-строительная академия

Представлен математический аппарат расчета хода лучей в приближении заданного порядка малости через вращательно-симметричные оптические системы, включающие дифракционные линзы, структура которых размещена на сферической поверхности.

1. Введение

В работах [1-3] описана методика и приведены формулы расчета хода псевдолучей лучей (т.е. лучей, траектории которых рассчитываются в приближении заданного порядка малости) через вращательно-симметричные системы, включающие радиально-градиентные и дифракционные линзы. В этих работах предполагалось, что структура дифракционной линзы (ДЛ) выполнена на плоскости. Однако известно, что размещение структуры ДЛ на сферической поверхности открывает возможность управление комой линзы (вплоть до ее устранения) независимо от величины сферической аберрации, расположения предмета и зрачка [3]. Очевидно, что использование ДЛ на сферической поверхности в составе гибридной оптической системы может существенно расширить ее коррекционные возможности, поэтому целесообразно распространить методику расчета хода псевдолучей на такие элементы.

Для получения формул расчета хода псевдолуча необходимо иметь представленные в аналитическом виде точные соотношения, связывающие параметры дифрагировавшего и падающего на ДЛ лучей. Такие соотношения для элементов, структура которых размещена на поверхностях произвольной формы приведены в работах [4, 5]. Точные лучевые соотношения следует разложить в ряды по степеням входных параметров луча. В результате после разложения и соответствующей перегруппировки параметры луча на выходе из ДЛ будут описываться степенными рядами, состоящими из слагаемых различных порядков малости относительно параметров луча на входе в оптическую систему. В результате ограничения рядов конечным числом слагаемых будут получены выходные параметры псевдолуча, вычисленные в требуемом приближении. С целью упрощения вышеописанной процедуры точные лучевые соотношения целесообразно представить в виде наиболее удобном для последующего разложения.

2. Точные лучевые соотношения

Требуемые лучевые соотношения получим для представляющего наибольший практический интерес случая, когда размещенная на сферической поверхности кольцевая структура ДЛ симметрична от-

носительно оси, проходящей через центр сферы и являющейся оптической осью линзы. Введем две прямоугольные системы координат. Одна из них – K – система с началом координат, совмещенным с вершиной сферической поверхности, и осью Z , совпадающей с оптической осью. Вторая – локальная \tilde{K} – система, ее началом координат является точка падения луча на сферическую поверхность, а ось \tilde{Z} совпадает с нормалью к поверхности в этой точке. В K – системе уравнение сферической поверхности, на которой размещена структура ДЛ, имеет вид [6]

$$z = (1/c) \left[1 - \sqrt{1 - (c\rho)^2} \right], \quad (1)$$

где c – кривизна сферической поверхности, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

В этой же системе координат направляющие косинусы оси \tilde{Z} (составляющие орта $\tilde{\mathbf{k}}$) описываются выражениями

$$\tilde{k}_x = -cx, \quad \tilde{k}_y = -cy, \quad \tilde{k}_z = 1 - cz. \quad (2)$$

Что же касается двух других ортов $\tilde{\mathbf{i}}$ и $\tilde{\mathbf{j}}$, то их составляющие легко найти, воспользовавшись очевидными соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{i}} \cdot \tilde{\mathbf{j}} = 0, \quad \tilde{\mathbf{i}} \cdot \tilde{\mathbf{k}} = 0, \quad \tilde{\mathbf{j}} \cdot \tilde{\mathbf{k}} = 0 \\ \tilde{\mathbf{i}}^2 = 1, \quad \tilde{\mathbf{j}}^2 = 1 \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Поскольку (3) представляет собой систему пяти скалярных уравнений с шестью неизвестными, то одна из проекций орта $\tilde{\mathbf{i}}$ или $\tilde{\mathbf{j}}$ может быть выбрана произвольно. Положим, например,

$$\tilde{j}_x = 0, \quad (4)$$

тогда другие составляющие ортов $\tilde{\mathbf{j}}$ и $\tilde{\mathbf{i}}$ будут определяться соотношениями

$$\tilde{j}_y = \frac{\tilde{k}_z}{\sqrt{\tilde{k}_y^2 + \tilde{k}_z^2}}, \quad \tilde{j}_z = -\frac{\tilde{k}_y}{\sqrt{\tilde{k}_y^2 + \tilde{k}_z^2}}; \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{i}_x &= \frac{\tilde{k}_z \tilde{j}_y - \tilde{k}_y \tilde{j}_z}{\sqrt{(\tilde{k}_z \tilde{j}_y - \tilde{k}_y \tilde{j}_z)^2 + \tilde{k}_x^2 (\tilde{j}_y^2 + \tilde{j}_z^2)}} \\ \tilde{i}_y &= \frac{\tilde{k}_x \tilde{j}_z}{\sqrt{(\tilde{k}_z \tilde{j}_y - \tilde{k}_y \tilde{j}_z)^2 + \tilde{k}_x^2 (\tilde{j}_y^2 + \tilde{j}_z^2)}} \\ \tilde{i}_z &= -\frac{\tilde{k}_x \tilde{j}_y}{\sqrt{(\tilde{k}_z \tilde{j}_y - \tilde{k}_y \tilde{j}_z)^2 + \tilde{k}_x^2 (\tilde{j}_y^2 + \tilde{j}_z^2)}} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Составляющие ортов $\tilde{\mathbf{i}}$, $\tilde{\mathbf{j}}$ и $\tilde{\mathbf{k}}$ образуют матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{i}_x & \tilde{i}_y & \tilde{i}_z \\ \tilde{j}_x & \tilde{j}_y & \tilde{j}_z \\ \tilde{k}_x & \tilde{k}_y & \tilde{k}_z \end{pmatrix}, \quad (7)$$

с помощью которой можно перейти от составляющих любого вектора, определенных в K -системе к составляющим этого же вектора, определенным в \tilde{K} -системе. Обратный переход производится с помощью транспонированной матрицы A' .

Целесообразность использования локальной \tilde{K} -системы обусловлена тем, что именно в этой системе справедливы простые соотношения, связывающие направляющие косинусы дифрагировавшего и падающего лучей с производными эйконала записи структуры ДЛ:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\alpha}'_x &= \tilde{\alpha}_x + m\mu \frac{\partial G_0}{\partial \tilde{x}}, & \tilde{\alpha}'_y &= \tilde{\alpha}_y + m\mu \frac{\partial G_0}{\partial \tilde{y}} \\ \tilde{\alpha}'_z &= \sqrt{1 - \tilde{\alpha}'_x{}^2 - \tilde{\alpha}'_y{}^2} \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

где m – порядок дифракции, $\mu = \lambda/\lambda_0$, λ – длина волны света, падающего на ДЛ, λ_0 – длина волны записи (в дальнейшем будем полагать, что $m = -1$ и $\mu = 1$).

Производные же эйконала записи можно выразить через направляющие косинусы нормалей к двум фронтам записи, по крайней мере, один из которых является асферическим. В результате соотношения (8) приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\alpha}'_x &= \tilde{\alpha}_x - \tilde{\alpha}_{1x} + \tilde{\alpha}_{2x}, & \tilde{\alpha}'_y &= \tilde{\alpha}_y - \tilde{\alpha}_{1y} + \alpha_{2y} \\ \tilde{\alpha}'_z &= \sqrt{1 - \tilde{\alpha}'_x{}^2 - \tilde{\alpha}'_y{}^2} \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

Направляющие косинусы, входящие в правую часть выражений (9), изначально известны только в K -системе. В частности, направляющие косинусы нормали к первому (сферическому) фронту записи определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1x} &= -\frac{x}{s\sqrt{(\rho/s)^2 + (1-z/s)^2}} \\ \alpha_{1y} &= -\frac{y}{s\sqrt{(\rho/s)^2 + (1-z/s)^2}} \\ \alpha_{1z} &= \sqrt{1 - \alpha_{1x}^2 - \alpha_{1y}^2} \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

а направляющие косинусы ко второму (асферическому) фронту записи – соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{2x} &= -\frac{x}{s'\sqrt{(\rho/s')^2 + (1-z/s')^2}} + \\ &+ \frac{1}{2}b_3\rho^2 + \frac{3}{8}b_5\rho^4 - \dots \\ \alpha_{2y} &= -\frac{y}{s'\sqrt{(\rho/s')^2 + (1-z/s')^2}} + \\ &+ \frac{1}{2}b_3\rho^2 + \frac{3}{8}b_5\rho^4 - \dots \\ \alpha_{2z} &= \sqrt{1 - \alpha_{2x}^2 - \alpha_{2y}^2} \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

где $-s$ и s' – отрезки записи, b_3 , b_5 , ... – коэффициенты асферической деформации третьего, пятого и т.д. порядков [5].

Таким образом, чтобы найти направляющие косинусы дифрагировавшего луча в K -системе необходимо вначале направляющие косинусы падающего луча и нормалей к фронтам записи, известные в этой системе, пересчитать с помощью матрицы A [см. выражение (7)] в \tilde{K} -систему. Затем, используя соотношения (9), получить направляющие косинусы дифрагировавшего луча в \tilde{K} -системе и совершить с помощью транспонированной матрицы A' обратный переход в K -систему.

3. Схема расчета хода псевдолуча

Рассмотрим теперь, как можно использовать вышеприведенные соотношения для расчета хода псевдолуча через структуру ДЛ, размещенную на сферической поверхности. Для определенности ограничимся приближением пятого порядка малости.

Высоту и наклон псевдолуча в точке его падения на поверхность ДЛ опишем векторами \mathbf{S} и \mathbf{T} . Вектор \mathbf{S} имеет составляющие $(x, y, 0)$, вектор \mathbf{T} – составляющие $(T_x, T_y, 0)$, где T_x и T_y – направляющие тангенсы луча связанные с направляющими косинусами луча соотношениями

$$T_x = \alpha_x/\alpha_z, \quad T_y = \alpha_y/\alpha_z. \quad (12)$$

Векторы \mathbf{S} и \mathbf{T} являются функциями двух зрачковых векторов, определяющих высоту и наклон луча во входном зрачке оптической системы, и могут быть представлены в виде суммы слагаемых

первого, третьего, пятого и т. д. порядков малости относительно модулей этих зрачковых векторов:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(3)} + \mathbf{S}^{(5)} + \dots \\ \mathbf{T} &= \mathbf{T}^{(1)} + \mathbf{T}^{(3)} + \mathbf{T}^{(5)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Введем три инварианта вращения

$$e_1 = \mathbf{T}^2, \quad e_2 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}, \quad e_3 = \mathbf{S}^2 \quad (14)$$

и, используя соотношения (13), запишем их в виде

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= e_1^{(2)} + e_1^{(4)} + \dots \\ e_2 &= e_2^{(2)} + e_2^{(4)} + \dots \\ e_3 &= e_3^{(2)} + e_3^{(4)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где

$$\left. \begin{aligned} e_1^{(2)} &= \left(T_x^{(1)} \right)^2 + \left(T_y^{(1)} \right)^2 \\ e_1^{(4)} &= 2 \left(T_x^{(1)} T_x^{(3)} + T_y^{(1)} T_y^{(3)} \right) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} e_2^{(2)} &= x^{(1)} T_x^{(1)} + y^{(1)} T_y^{(1)} \\ e_2^{(4)} &= x^{(1)} T_x^{(3)} + x^{(3)} T_x^{(1)} + y^{(1)} T_y^{(3)} + y^{(3)} T_y^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} e_3^{(2)} &= \left(x^{(1)} \right)^2 + \left(y^{(1)} \right)^2 \\ e_3^{(4)} &= 2 \left(x^{(1)} x^{(3)} + y^{(1)} y^{(3)} \right) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Разлагая уравнение (1) в степенной ряд и используя соотношения (14), (15), координату z точки пересечения луча с поверхностью ДЛ можно представить как

$$z = z^{(2)} + z^{(4)} + \dots, \quad (19)$$

где

$$z^{(2)} = \frac{1}{2} c e_1^{(2)}, \quad z^{(4)} = \frac{1}{2} c e_1^{(4)} + \frac{1}{8} c^3 \left(e_1^{(2)} \right)^2. \quad (20)$$

Далее, поскольку направляющие косинусы падающего на ДЛ луча связаны с его направляющими тангенсами соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x &= T_x / \sqrt{1 + T_x^2 + T_y^2} \\ \alpha_y &= T_y / \sqrt{1 + T_x^2 + T_y^2} \\ \alpha_z &= 1 / \sqrt{1 + T_x^2 + T_y^2} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

то после разложения в степенные ряды получим

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x &= \alpha_x^{(1)} + \alpha_x^{(3)} + \alpha_x^{(5)} + \dots \\ \alpha_y &= \alpha_y^{(1)} + \alpha_y^{(3)} + \alpha_y^{(5)} + \dots \\ \alpha_z &= 1 + \alpha_z^{(2)} + \alpha_z^{(4)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x^{(1)} &= T_x^{(1)}, \quad \alpha_x^{(3)} = T_x^{(3)} - \frac{1}{2} T_x^{(1)} e_1^{(2)} \\ \alpha_x^{(5)} &= T_x^{(5)} - \frac{1}{2} T_x^{(3)} e_1^{(2)} + T_x^{(1)} \left[\frac{3}{8} \left(e_1^{(2)} \right)^2 - \frac{1}{2} e_1^{(4)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_y^{(1)} &= T_y^{(1)}, \quad \alpha_y^{(3)} = T_y^{(3)} - \frac{1}{2} T_y^{(1)} e_1^{(2)} \\ \alpha_y^{(5)} &= T_y^{(5)} - \frac{1}{2} T_y^{(3)} e_1^{(2)} + T_y^{(1)} \left[\frac{3}{8} \left(e_1^{(2)} \right)^2 - \frac{1}{2} e_1^{(4)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\alpha_z^{(2)} = -\frac{1}{2} e_1^{(2)}, \quad \alpha_z^{(4)} = -\frac{1}{2} e_1^{(4)} + \frac{3}{8} \left(e_1^{(2)} \right)^2. \quad (24)$$

Аналогично, разлагая в степенные ряды уравнения (10) и (11), можно представить в виде сумм величин различных порядков малости направляющие косинусы нормалей фронтов записи:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{px} &= \alpha_{px}^{(1)} + \alpha_{px}^{(3)} + \alpha_{px}^{(5)} + \dots \\ \alpha_{py} &= \alpha_{py}^{(1)} + \alpha_{py}^{(3)} + \alpha_{py}^{(5)} + \dots \\ \alpha_{pz} &= 1 + \alpha_{pz}^{(2)} + \alpha_{pz}^{(4)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (p=1-2). \quad (25)$$

Далее в виде сумм величин различных порядков малости представим составляющие ортов $\tilde{\mathbf{k}}$, $\tilde{\mathbf{j}}$ и $\tilde{\mathbf{i}}$. В частности, из выражений (2), (13) и (19) получим, что составляющие орта $\tilde{\mathbf{k}}$ можно записать как

$$\left. \begin{aligned} \tilde{k}_x &= \tilde{k}_x^{(1)} + \tilde{k}_x^{(3)} + \tilde{k}_x^{(5)} + \dots \\ \tilde{k}_y &= \tilde{k}_y^{(1)} + \tilde{k}_y^{(3)} + \tilde{k}_y^{(5)} + \dots \\ \tilde{k}_z &= 1 + \tilde{k}_z^{(2)} + \tilde{k}_z^{(4)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где

$$\tilde{k}_x^{(1)} = -cx^{(1)}, \quad \tilde{k}_x^{(3)} = -cx^{(3)}, \quad \tilde{k}_x^{(5)} = -cx^{(5)}; \quad (27)$$

$$\tilde{k}_y^{(1)} = -cy^{(1)}, \quad \tilde{k}_y^{(3)} = -cy^{(3)}, \quad \tilde{k}_y^{(5)} = -cy^{(5)}; \quad (28)$$

$$\tilde{k}_z^{(2)} = -cz^{(2)}, \quad \tilde{k}_z^{(4)} = -cz^{(4)}. \quad (29)$$

Аналогично, раскладывая в степенные ряды уравнения (4)-(6) и используя соотношения (26), представим составляющие ортов $\tilde{\mathbf{j}}$ и $\tilde{\mathbf{i}}$ в виде

$$\left. \begin{aligned} \tilde{j}_x &= 0 \\ \tilde{j}_y &= \tilde{j}_y^{(2)} + \tilde{j}_y^{(4)} + \dots \\ \tilde{j}_z &= \tilde{j}_z^{(1)} + \tilde{j}_z^{(3)} + \tilde{j}_z^{(5)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \tilde{i}_x &= 1 + \tilde{i}_x^{(2)} + \tilde{i}_x^{(4)} + \dots \\ \tilde{i}_y &= \tilde{i}_y^{(2)} + \tilde{i}_y^{(4)} + \dots \\ \tilde{i}_z &= \tilde{i}_z^{(1)} + \tilde{i}_z^{(3)} + \tilde{i}_z^{(5)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Затем с помощью матрицы (7) находим составляющие различных порядков малости направляющих косинусов падающего луча и нормалей к фронтам записи. В частности, составляющие направляющих косинусов падающего на поверхность ДЛ луча в \tilde{K} -системе можно записать как

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\alpha}_x &= \tilde{\alpha}_x^{(1)} + \tilde{\alpha}_x^{(3)} + \tilde{\alpha}_x^{(5)} + \dots \\ \tilde{\alpha}_y &= \tilde{\alpha}_y^{(1)} + \tilde{\alpha}_y^{(3)} + \tilde{\alpha}_y^{(5)} + \dots \\ \tilde{\alpha}_z &= 1 + \tilde{\alpha}_z^{(2)} + \tilde{\alpha}_z^{(4)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

и аналогично для направляющих косинусов нормалей фронтов записи

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\alpha}_{px} &= \tilde{\alpha}_{px}^{(1)} + \tilde{\alpha}_{px}^{(3)} + \tilde{\alpha}_{px}^{(5)} + \dots \\ \tilde{\alpha}_{py} &= \tilde{\alpha}_{py}^{(1)} + \tilde{\alpha}_{py}^{(3)} + \tilde{\alpha}_{py}^{(5)} + \dots \\ \tilde{\alpha}_{pz} &= 1 + \tilde{\alpha}_{pz}^{(2)} + \tilde{\alpha}_{pz}^{(4)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (p=1-2). \quad (33)$$

Подставляя соотношения (32) и (33) в (9) получаем в виде сумм величин различных порядков малости составляющие дифрагировавшего луча в \tilde{K} -системе

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\alpha}'_x &= \tilde{\alpha}'_x^{(1)} + \tilde{\alpha}'_x^{(3)} + \tilde{\alpha}'_x^{(5)} + \dots \\ \tilde{\alpha}'_y &= \tilde{\alpha}'_y^{(1)} + \tilde{\alpha}'_y^{(3)} + \tilde{\alpha}'_y^{(5)} + \dots \\ \tilde{\alpha}'_z &= 1 + \tilde{\alpha}'_z^{(2)} + \tilde{\alpha}'_z^{(4)} + \dots \end{aligned} \right\}, \quad (34)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\alpha}'_x^{(q)} &= \tilde{\alpha}_x^{(q)} - \tilde{\alpha}_{1x}^{(q)} + \tilde{\alpha}_{2x}^{(q)} + \dots \\ \tilde{\alpha}'_y^{(q)} &= \tilde{\alpha}_y^{(q)} - \tilde{\alpha}_{1y}^{(q)} + \tilde{\alpha}_{2y}^{(q)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (q=1, 3, 5); \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\alpha}'_z^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[(\tilde{\alpha}_x^{(1)})^2 + (\tilde{\alpha}_y^{(1)})^2 \right] \\ \tilde{\alpha}'_z^{(4)} &= -\frac{1}{2} (\tilde{\alpha}'_z^{(2)})^2 - \tilde{\alpha}_x^{(1)} \tilde{\alpha}_x^{(3)} - \tilde{\alpha}_y^{(1)} \tilde{\alpha}_y^{(3)} \end{aligned} \right\}. \quad (36)$$

Далее, используя транспонированную матрицу A' , находим в виде сумм величин различных порядков малости направляющие косинусы дифрагировавшего луча в K -системе. Наконец на последнем этапе с помощью соотношений, аналогичных уравнениям (12), переходим от направляющих косинусов к направляющим тангенсам дифрагировавшего луча и тем самым находим в виде сумм составляющих различных порядков малости искомым вектор \mathbf{T}' , определяющий наклон луча, дифрагировавшего на структуре ДЛ, размещенной на сферической поверхности.

Литература

1. Степанов С.А., Грейсух Г.И. Расчет хода псевдолучей через оптические системы, включающие градиентные и дифракционные линзы // Опт. и спектр. - 1996. - Т.81, № 4. - С.698-701.
2. Степанов С.А., Грейсух Г.И. Компьютерный расчет оптических систем, в области аберраций высших порядков // Компьютерная оптика. - М.: МЦНТИ, 1996. - Вып.16. - С.9-12.
3. Greisukh G.I., Bobrov S.T., Stepanov S.A. Optics of Diffractive and Gradient-Index Elements and Systems. - Bellingham, WA: SPIE Press, 1997. - 414 p.
4. Welford W.T. A Vector raytracing equation for hologram lenses of arbitrary shape // Optic Communication. - 1975. Vol.14, № 3. - P.322-323.
5. Бобров С. Т., Грейсух Г. И., Туркевич Ю. Г. Оптика дифракционных элементов и систем. - Л.: Машиностроение, 1986. - 223 с.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1977. - 832 с.

Calculation of pseudo-ray paths through diffraction structures on a spherical surface

E.G. Ezhov¹, S.A. Stepanov²

¹*Penza State Academy of Architecture and Construction*

²*Image Processing Systems Institute of RAS*

Abstract

The paper presents a mathematical method for calculating the paths of rays in the approximation of a preassigned order of infinitesimals through rotation-symmetric optical systems with diffractive lenses, the structure of which is located on a spherical surface.

Citation: Ezhov EG, Stepanov SA. Calculation of pseudo-ray paths through diffraction structures on a spherical surface. *Computer Optics* 2000; 20: 25 - 28.

References

- [1] Stepanov SA, Greisukh GI. Calculation of the pseudoray path through optical systems including graded-index and diffraction lenses. *Optika i Spektroskopiya*; 1996; 81(4): 698-701.
- [2] Stepanov SA, Greisukh GI. Computer-aided design of optical systems in the zone of higher-order aberrations. *Computer Optics* 1996; 16: 9-12.
- [3] Greisukh G.I., Bobrov S.T., Stepanov S.A. *Optics of Diffractive and Gradient-Index Elements and Systems*. - Bellingham, WA: SPIE Press, 1997. - 414 p.
- [4] Welford W.T. A Vector raytracing equation for hologram lenses of arbitrary shape // *Optic Communication*. – 1975. Vol.14, № 3. - P.322-323.
- [5] Bobrov ST, Greisukh GI, Turkevich YG. *Optics of diffractive elements and systems*. Leningrad: Mashinostroenie Publisher; 1986: 223.
- [6] Korn G, Korn T. *Reference book in mathematics*; Moscow: Nauka Publisher; 1977: 832.