МЕТОДЫ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИОННОЙ ОПТИКИ

С.Г. Волотовский, Н.Л. Казанский, С.И. Харитонов

Институт систем обработки изображений РАН

Аннотация

В данной работе предложен метод решения системы уравнений Максвелла для случая дифракции плоской электромагнитной волны на дифракционном оптическом элементе, представляющем тонкую пластинку с нанесенным на нее микрорельефом. Расчет проводился в рамках строгой электромагнитной теории. Метод основан на приведении исходной системы уравнений Максвелла к системе интегродифференциальных уравнений.

Введение

В последнее время большое внимание уделяется методам расчета дифракционных оптических элементов в рамках электромагнитной теории. Применение различных разностных схем к решению системы уравнений Максвелла требует значительных вычислительных ресурсов.

В данной работе предложен метод решения системы уравнений Максвелла для случая дифракции плоской электромагнитной волны на дифракционном оптическом элементе, представляющем собой тонкую пластинку с нанесенным на нее микрорельефом. Расчет проводится в рамках строгой электромагнитной теории. Метод основан на приведении исходной системы уравнений Максвелла к системе интегродифференциальных уравнений.

Рассмотрим прямую задачу дифракции.

Пусть освещающий пучок с заданными значениями векторов электрического и магнитного поля падает на дифракционный оптический элемент.

Анализируя оптическую схему, расположенную на рис. 1, можно выделить несколько областей:

1. между источником и дифракционным оптическим элементом,
2. подложки,
3. модуляции,
4. между областью модуляции и регистратором.

Необходимо найти значение векторов электрического и магнитного поля в области регистратора.

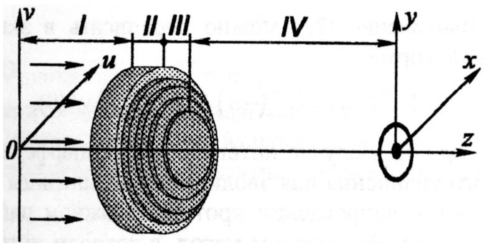


Рис. 1. Оптическая схема.

1. Формальная теория рассеяния для бивекторного электромагнитного поля

В данном разделе изложен основы формального математического аппарата, который в дальнейшем будет использован для описания процессов дифракции света на дифракционных оптических элементах. Приводимый математический аппарат частично заимствован из квантовой механики [1] и теории взаимодействующих классических полей.

Уравнения Максвелла для бивекторного поля имеют вид:

$$\frac{i}{k}\frac{\partial W}{\partial z} = HW, \tag{1}$$

$$W = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix},$$

где H - матричный дифференциальный оператор, называемый также оператором Гамильтона, E_i, H_i - компоненты электрического и магнитного поля вдоль координатных осей x^i.

В дальнейшем четырехкомпонентный вектор W будем называть бивектором, а соответствующее поле бивекторным электромагнитным полем. Выражение (1) можно рассматривать как операторную запись в абстрактном гильбертовом пространстве бивекторов. В этом случае система уравнений Максвелла приобретает стандартный вид эволюционного уравнения.

В координатном представлении оператор Гамильтона имеет следующий вид:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$A = \frac{-1}{k^2}\begin{bmatrix} \partial_{x^1} & 0 \\ 0 & \partial_{x^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\partial_{x^2} & \partial_{x^1} \\ -\partial_{x^2} & \partial_{x^1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \frac{1}{k^2}\begin{bmatrix} \partial_{x^1} & 0 \\ 0 & \partial_{x^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\partial_{x^2} & \partial_{x^1} \\ -\partial_{x^2} & \partial_{x^1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

где x^i - декартовые координаты, ε - диэлектрическая проницаемость среды.

Операторное уравнение (1) можно формально проинтегрировать:

$$\begin{aligned} W(t) &= U_1(t,t_0)W(t_0) = \\ &= \exp\left(-i(t-t_0)H\right)W(t_0), \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned} U_I(t,t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_{t_{n-1}}^{t} d\xi_{n-1}\int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} d\xi_{n-2} \times \\ \times \int_{t_1}^{t_2} d\xi_1 \int_{t_0}^{t_1} d\xi_0 \left[H(\xi_{n-1})H(\xi_{n-2})...H(\xi_1)H(\xi_0)\right], \end{aligned} \tag{4}$$

где $t = kz$.

Здесь приведена запись уравнений в абстрактном операторном представлении. Для решения конкретных физических задач нужно все векторы и операторы записать в конкретном представлении.

Произвольную функцию из рассматриваемого линейного гильбертова пространства представим в виде линейной комбинации:

$$W = \sum_n f^n(z) F_n(x_1, x_2). \tag{5}$$

Набор функций $f^n(z)$, будем называть волновой функцией бивекторного электромагнитного поля в f-представлении. Каждому абстрактному оператору в данном базисе можно сопоставить матрицу H_n^m

$$HF_n = \sum_m H_n^m(f) F_m(x^1, x^2). \tag{6}$$

Система уравнений Максвелла в F-представлении записывается в виде:

$$\frac{i}{k}\frac{\partial f^m}{\partial z} = \sum_n H_n^m(z) f_n(z).$$

В общем случае система базисных функций не является счетной. В этом случае суммирование заменяется интегрированием.

Базисные векторы в координатном представлении имеют вид:

$$X_{y_1 y_2 m}(x_1, x_2) = \delta(x_1 - y_1)\delta(x_2 - y_2)\begin{bmatrix}\delta_{m1}\\ \delta_{m2}\\ \delta_{m3}\\ \delta_{m4}\end{bmatrix}, \tag{7}$$

где $\delta(x)$ - функция Дирака.

Бивекторное поле имеет вид:

$$W(x^1, x^2) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{m=4} W^{y^1 y^2 m} X_{y^1 y^2 m}(x^1, x^2) dy^1 dy^2 . \tag{8}$$

В дальнейшем для записи выражений будем использовать правило Эйнштейна, согласно которому по повторяющимся индексам производится суммирование или интегрирование.

Если в пространстве существуют два базиса, связанные соотношением

$$V_m = S_m^n(v \to f) F_n , \tag{9}$$

тогда волновые функции бивекторных полей и матричные элементы операторов в различных представлениях связаны соотношением

$$f_n = S_m^n(v \to f) v^m , \tag{10}$$

$$H_l^q(f) = S_l^m(f \to v) H_m^p(g) S_p^q(v \to f), \tag{11}$$

где $H(g)_l^q$, $H(f)_l^q$ - матричные элементы в G- и F-представлении.

Пусть бивекторное поле имеет следующий вид:

в области 1

$$W(x^1, x^2, z) = q^n(z) Q_n(x^1, x^2), \tag{12}$$

в области модуляции

$$W(x^1, x^2, z) = f^n(z) F_n(x^1, x^2), \tag{13}$$

в области 4

$$W(x^1, x^2, z) = v^n(z) V_n(x^1, x^2). \tag{14}$$

Пусть связь между базисными векторами в F-, G- и Q-представлениях имеет вид

$$V_m = (x^1, x^2) = S_m^n(v \to f) F_n(x^1, x^2), \tag{15}$$

$$F_m = (x_1, x_2) = S_m^n(f \to q) QF_n(x_1, x_2). \tag{16}$$

На границе области модуляции и области 4 волновая функция бивекторного поля в G-представлении имеет вид $v^m(0)$. Запишем ее в F-представлении:

$$f^n(0) = S_m^n(v \to f) v^m(0). \tag{17}$$

Поле в произвольной точке в области модуляции имеет вид:

$$f^n(z) = U_m^n(z) f^m(0), \tag{18}$$

где эволюционная матрица удовлетворяет уравнению

$$\frac{i}{k}\frac{\partial U_m^n(z)}{\partial z} = H_l^n(z) U_m^l(z) \tag{19}$$

с начальными условиями $U_m^n(0) = \delta_m^n$.

Бивекторное поле в F-представлении на границе области модуляции и области 1 имеет вид:

$$f^n(-a) = U_m^n(-a) f^m(0). \tag{20}$$

То же самое в Q-представлении:

$$q^n(-a) = S_m^n(f \to q) f^m(-a). \tag{21}$$

Подставляя выражение в (20) и (21), получаем

$$q^n(-a) = S_m^n(f \to q) \times U_i^m(-a) S_j^i(f \to q) v^j(0). \tag{22}$$

Полученное выражение можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $q^n(-a)$ и $v^k(0)$.

Выражение (22) можно переписать в эквивалентной форме

$$S_n^p(q \to f) q^n(-a) = U_i^p(-a) S_j^i(q \to f) v^j(0). \tag{23}$$

В данном случае интегрирование дифференциального уравнения для эволюционной матрицы проводилось в направлении противоположном направлению оси z. Рассмотрим метод, в котором интегрирование эволюционного уравнения проводится в направлении оси z.

Пусть $q^n(-a)$ - волновая функция бивекторного поля в Q-представлении на границе области модуляции и области 1. Запишем ее в F-представлении $f^n(-a) = S_m^n(q \to f) q^m(-a)$. Поле в произвольной точке в области модуляции имеет вид

$$f^n(z) = U_m^n(z) f^m(-a), \tag{24}$$

где эволюционная матрица удовлетворяет уравнению

$$\frac{i}{k}\frac{\partial U_m^n(z)}{\partial z} = H_l^n(z)U_m^l(z)$$

с начальными условиями $U_m^n(-a) = \delta_m^n$.

Бивекторное поле в *F*-представлении на границе области модуляции и области 1 имеет вид:

$$f^n(0) = U_j^n(z)\, S_m^j\left(q \to f\right)q^m(-a). \tag{25}$$

То же самое в *V*-представлении

$$v^n(0) = S_m^n\left(f \to v\right)f^m(0). \tag{26}$$

Подставляя выражение (25) в (26), получаем

$$v^n(0) = S_m^n\left(f \to v\right)U_j^m(0)\,S_k^j\left(q \to f\right)q^k(-a). \tag{27}$$

Полученное выражение можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $q^n(-a)$ и $v^k(0)$.

Выражение (27) можно переписать в следующем виде

$$S_n^p(v \to f)\,v^n(0) = U_j^p(0)\,S_k^j\left(q \to f\right)q^k(-a). \tag{28}$$

Вышеизложенный метод применим для решения широкого класса задач дифракции, как в свободном пространстве, так и в среде (например, в волокне). Выбор представления зависит от конкретной задачи. В качестве базисных функций удобно использовать собственные функции оператора Гамильтона. В этом представлении система уравнений Максвелла имеют наиболее простой вид.

2. Ковариантная запись системы уравнений Максвелла в криволинейных координатах.

В предыдущем разделе исследовалась система уравнений Максвелла в декартовых координатах. В данном разделе получим систему уравнений Максвелла в параболической форме в ковариантном виде. Ковариантная запись позволяет легко записывать выражения в произвольной системе координат.

Для записи уравнения Максвелла в криволинейной системе координат введем тензоры

$$E_n, D^n, H_n, B^n,$$

где

$$D^n = \varepsilon g^{nm}E_m,\ \ B^n = g^{nm}H_m, \tag{29}$$

ε - диэлектрическая проницаемость среды.

Система уравнений Максвелла в криволинейных координатах в ковариантной форме имеет вид

$$\left(rot\, H\right)^n = -ikD^n, \tag{30}$$

$$\left(rot\, E\right)^n = -ikB^n, \tag{31}$$

где оператор $\left(rot\, F\right)^n$

представляется в виде

$$\left(rot\, F\right)^n = \frac{\varepsilon^{ijn}}{2\sqrt{g}}\left(\frac{\partial F_j}{\partial x^i} - \frac{\partial F_i}{\partial x^j}\right),\ g = \det\left(g_{ij}\right),$$

g_{ij} - компоненты метрического тензора в криволинейной системе координат.

Рассмотрим криволинейную систему координат, в которой метрический тензор имеет вид

$$g_{13} = g_{23} = 0, \tag{32}$$

$$g_{33} = 1, \tag{33}$$

$$\varepsilon^{ij}\partial_3 E_j = -ik\left(\sqrt{g}\right)g^{ij}H_j + \varepsilon^{ij}\partial_j E_3, \tag{34}$$

$$\varepsilon^{ij}\partial_3 H_j = -ik\left(\sqrt{g}\right)g^{ij}E_j + \varepsilon^{ij}\partial_j H_3,$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{nm3}\left(\partial_n E_m - \partial_m E_n\right) = ikH^3\sqrt{g}, \tag{35}$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{nm3}\left(\partial_n H_m - \partial_m H_n\right) = ikE^3\sqrt{g}. \tag{36}$$

Выражаем E^3, H^3 из последних двух выражений, и, подставляя в первую пару уравнений, получаем:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{ij}\partial_3 E_j &= -ik\left(\sqrt{g}\right)g^{ij}H_j - \\ &- \varepsilon^{ij}\partial_j\left(\frac{\varepsilon^{nm3}\left(\partial_n H_m - \partial_m H_n\right)}{2ik\sqrt{g}}\right),\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^{ij}\partial_3 H_j &= -ik\left(\sqrt{g}\right)g^{ij}E_j - \\ &- \varepsilon^{ij}\partial_j\left(\frac{\varepsilon^{nm3}\left(\partial_n E_m - \partial_m E_n\right)}{2ik\sqrt{g}}\right).\end{aligned} \tag{38}$$

Рассмотрим случай ортогональных криволинейных координат. В этом случае система уравнений Максвелла относительно четырех компонентных бивекторов имеет вид:

$$\frac{i}{k}\partial_z W = HW, \tag{39}$$

где

$$W = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}, \tag{40}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}, \tag{41}$$

где

$$\begin{aligned}A = \frac{-1}{k^2}&\begin{pmatrix} \partial_{y1} & 0 \\ 0 & \partial_{y2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\varepsilon\sqrt{g}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & \left(\varepsilon\sqrt{g}\right)^{-1} \end{pmatrix}\times \\ &\times\begin{pmatrix} -\partial_{y2} & \partial_{y1} \\ -\partial_{y2} & \partial_{y1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & g^{22}\sqrt{g} \\ -g^{22}\sqrt{g} & 0 \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}B = \frac{1}{k^2}&\begin{pmatrix} \partial_{y1} & 0 \\ 0 & \partial_{y2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\sqrt{g}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{g}\right)^{-1} \end{pmatrix}\times \\ &\times\begin{pmatrix} -\partial_{y2} & \partial_{y1} \\ -\partial_{y2} & \partial_{y1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & g^{22}\sqrt{g} \\ -g^{22}\sqrt{g} & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{43}$$

Отметим, что при переходе от одной системы криволинейных координат к другой компоненты четырехкомпонентного бивектора - верхняя и нижняя половины бивектора - преобразуются как двумерные векторы.

3. Пространственно-частотное представление системы уравнений Максвелла

Многие задачи дифракционной оптики значительно упрощаются при переходе к пространственно-частотному представлению.

Базисные функции F-пространственно-частотного представления имеют вид:

$$F_{\alpha_1\alpha_2,i}\left(x^1,x^2\right)=\begin{bmatrix}\delta_{1i}\exp\left(ik\left(\alpha_1x^1+\alpha_2x^2\right)\right)\\ \delta_{2i}\exp\left(ik\left(\alpha_1x^1+\alpha_2x^2\right)\right)\\ \delta_{3i}\exp\left(ik\left(\alpha_1x^1+\alpha_2x^2\right)\right)\\ \delta_{4i}\exp\left(ik\left(\alpha_1x^1+\alpha_2x^2\right)\right)\end{bmatrix}, \qquad (44)$$

где δ_{ik} - символ Кронекера.

Связь между базисными функциями координатного и F-пространственно-частотного представления имеет вид

$$F_{\alpha_1\alpha_2,i}\left(x^1,x^2\right)=\sum_{k=1}^{k=4}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{\alpha_1\alpha_2,i}^{y^1y^2k}\left(f\to x\right)\times \times X_{y^1y^2,k}\left(x^1,x^2\right)dy^1\,dy^2\,. \qquad (45)$$

Связь между волновыми функциями координатного и F-пространственно-частотного представления имеет вид

$$W^{y^1y^2k}=\sum_{k=1}^{k=4}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{\alpha_1\alpha_2,i}^{y^1y^2k}\left(f\to x\right)\times \times f^{\alpha_1\alpha_2 i}d\alpha_1\,d\alpha_2\,, \qquad (46)$$

где

$$X_{y^1y^2,m}\left(x^1,x^2\right)= =\delta\left(x^1-y^1\right)\delta\left(x^2-y^2\right)\begin{bmatrix}\delta_{m1}\\ \delta_{m2}\\ \delta_{m3}\\ \delta_{m4}\end{bmatrix}. \qquad (47)$$

Матрица преобразования имеет вид

$$S_{\alpha_1\alpha_2,i}^{x^1x^2,k}\left(f\to x\right)=\exp\left(ik\left(\alpha_1x^1+\alpha_2x^2\right)\right)\delta_i^k\,. \qquad (48)$$

Матрица обратного преобразования имеет вид

$$S^{\alpha_1\alpha_2,i}_{x^1x^2,k}\left(x\to f\right)= =\frac{k^2}{4\pi}\exp\left(-ik\left(\alpha_1x^1+\alpha_2x^2\right)\right)\delta_k^i\,. \qquad (48)$$

Гамильтониан в пространственно-частотном представлении имеет вид

$$H^{\alpha_1\alpha_2}_{\omega_1\omega_2}=\begin{bmatrix}0 & A^{\alpha_1\alpha_2}_{\omega_1\omega_2}\\ B^{\alpha_1\alpha_2}_{\omega_1\omega_2} & 0\end{bmatrix}, \qquad (50)$$

$$A^{\alpha_1\alpha_2}_{\omega_1\omega_2}=-\begin{bmatrix}i\alpha_1 & 0\\ 0 & i\alpha_2\end{bmatrix}\varepsilon^{-1}\left(\alpha_1-\omega_1,\alpha_2-\omega_2\right)\times \times\begin{bmatrix}-i\omega_2 & i\omega_1\\ -i\omega_2 & i\omega_1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\delta^{\alpha_1}_{\omega_1}\delta^{\alpha_1}_{\omega_1}\,,$$

$$B^{\alpha_1\alpha_2}_{\omega_1\omega_2}=-\begin{bmatrix}i\alpha_1 & 0\\ 0 & i\alpha_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-i\omega_2 & i\omega_1\\ -i\omega_2 & i\omega_1\end{bmatrix}\delta^{\alpha_1}_{\omega_1}\delta^{\alpha_1}_{\omega_1}- -\varepsilon^{-1}\left(\alpha_1-\omega_1,\alpha_2-\omega_2\right)\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},$$

$\delta^{\alpha}_{\omega}=\delta\left(\alpha-\omega\right)$ - дельта-функция Дирака.

Уравнения Максвелла в пространственно-частотном представлении приобретают вид:

$$\frac{i}{k}\frac{\partial f^{\alpha_1\alpha_2 i}}{\partial z}=H^{\alpha_1\alpha_2 i}_{\omega_1\omega_2 k}\,f^{\omega_1\omega_2 k}\,. \qquad (51)$$

Для вакуума уравнения приобретают вид:

$$\frac{i}{k}\frac{\partial f^{\alpha_1\alpha_2 i}}{\partial z}=H^{\alpha_1\alpha_2 i}_{\alpha_1\alpha_2 k}\,f^{\alpha_1\alpha_2 k}\,. \qquad (52)$$

$$H^{\alpha_1\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_2}=\begin{bmatrix}0 & A^{\alpha_1\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_2}\\ B^{\alpha_1\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_2} & 0\end{bmatrix},$$

$$A^{\alpha_1\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_2}=-\begin{bmatrix}i\alpha_1 & 0\\ 0 & i\alpha_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-i\alpha_2 & i\alpha_1\\ -i\alpha_2 & i\alpha_1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},$$

$$B^{\alpha_1\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_2}=-\begin{bmatrix}i\alpha_1 & 0\\ 0 & i\alpha_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-i\alpha_2 & i\alpha_1\\ -i\alpha_2 & i\alpha_1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}.$$

Отметим, что в формуле (52) нет суммирования или интегрирования по повторяющимся индексам и система уравнений распадается на множество систем из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений. Уравнения (52) имеют чтыре линейно независимых решения следующего вида:

$$f^{\alpha_1\alpha_2}_{\pm e}=\begin{bmatrix}f^{\alpha_1\alpha_2,1}_{\pm e}\\ f^{\alpha_1\alpha_2,2}_{\pm e}\\ f^{\alpha_1\alpha_2,3}_{\pm e}\\ f^{\alpha_1\alpha_2,4}_{\pm e}\end{bmatrix}=\left\|W\right\|^{-1}\begin{bmatrix}\mp\left(\sqrt{1-\alpha_1^2-\alpha_2^2}\right)\alpha_1\\ \mp\left(\sqrt{1-\alpha_1^2-\alpha_2^2}\right)\alpha_2\\ \alpha_2\\ -\alpha_1\end{bmatrix}\times \times\exp\left(\pm ik\left(\sqrt{1-\alpha_1^2-\alpha_2^2}\right)z\right), \qquad (53)$$

$$f^{\alpha_1\alpha_2}_{\pm h}=\begin{bmatrix}f^{\alpha_1\alpha_2,1}_{\pm e}\\ f^{\alpha_1\alpha_2,2}_{\pm e}\\ f^{\alpha_1\alpha_2,3}_{\pm e}\\ f^{\alpha_1\alpha_2,4}_{\pm e}\end{bmatrix}=\left\|W\right\|^{-1}\begin{bmatrix}-\alpha_2\\ \alpha_1\\ \mp\left(\sqrt{1-\alpha_1^2-\alpha_2^2}\right)\alpha_1\\ \mp\left(\sqrt{1-\alpha_1^2-\alpha_2^2}\right)\alpha_2\end{bmatrix}\times \times\exp\left(\pm ik\left(\sqrt{1-\alpha_1^2-\alpha_2^2}\right)z\right), \qquad (54)$$

$$\| W \| = \sqrt{\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right)\left(1 + \sqrt{\left|1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2\right|}\right)}.$$

Введем V-пространственно-частотное представление (V-представление). В качестве базисных функций V-представления выберем собственные функции оператора Гамильтона для бивекторного поля, распространяющегося в вакууме. Базисные функции V-пространственно-частотного представления связаны с базисными функциями F-представления

$$V_{\omega_1\omega_2 n}\left(x^1, x^2\right) = \\ = S^{\alpha_1\alpha_2 n}_{\omega_1\omega_2 n}\left(v \to f\right) F_{\alpha_1\alpha_2 n}\left(x^1, x^2\right)\Big), \tag{55}$$

$$S^{\omega_1\omega_2 n}_{\alpha_1\alpha_2 n}\left(v \to f\right) = \delta^{\omega 1}_{\alpha 2}\, \delta^{\omega 1}_{\alpha 1}\, S^n_m\left(v \to f\right), \tag{56}$$

$$S^n_m\left(v \to f\right) = \begin{cases} f^{\omega_1\omega n}_{+e} & m = 1 \\ f^{\omega_1\omega n}_{+h} & m = 2 \\ f^{\omega_1\omega n}_{-e} & m = 3 \\ f^{\omega_1\omega n}_{-h} & m = 4 \end{cases}.$$

Тензор обратного преобразования выглядит следующим образом

$$S^{\omega_1\omega_2 p}_{\alpha_1\alpha_2 m}\left(f \to v\right) = \delta^{\omega_1}_{\alpha_2}\, \delta^{\omega_1}_{\alpha_1} \left(M^{-1}\right)^p_n P^n_m, \tag{57}$$

где матрица P^n_m есть матрица эрмитово-сопряженная по отношению к матрице $S^n_m\left(v \to f\right)$, а матрица $M^n_m = P^n_k\, S^k_m\left(v \to f\right)$. Здесь верхний индекс означает номер строки в матрице, а нижний индекс - номер столбца.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W\pm & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W\pm \\ W\pm & 0 & 1 & 0 \\ 0 & W\pm & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{58}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -W\pm & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -W\pm \\ -W\pm & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -W\pm & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{1 - \left|W\pm\right|^2}. \tag{59}$$

Волновые функции бивекторных полей в этих двух различных представлениях связаны следующим образом

$$f^{\alpha_1\alpha_2 n} = S^{\alpha_1\alpha_2 n}_{\omega_1\omega_2 n}\left(v \to f\right) v^{\omega_1\omega_2 n}, \tag{60}$$

$$v^{\alpha_1\alpha_2 n} = S^{\alpha_1\alpha_2 n}_{\omega_1\omega_2 n}\left(f \to v\right) f^{\omega_1\omega_2 n}.$$

4. Распространение бивекторного электромагнитного поля в вакууме

В настоящем разделе рассмотрим задачу распространения бивекторного электромагнитного поля в свободном пространстве.

Пусть в плоскости z=0 бивекторное поле имеет вид:

$$W = W_0\left(x^1, x^2\right) = W^{x^1x^2k}(0). \tag{61}$$

Для вычисления поля в произвольной плоскости перейдем от координатного представления к пространственно-частотному представлению

$$f^{\alpha_1\alpha_2, i}(0) = S^{\alpha_1\alpha_2, i}_{x_1x_2, k}\left(x \to f\right) W^{x^1x^2k}(0). \tag{62}$$

$$v^{\alpha_1\alpha_2, i}(0) = S^{\alpha_1\alpha_2 n}_{\omega_1\omega_2 n}\left(f \to v\right) f^{\omega_1\omega_2 n}(0). \tag{63}$$

Матричные элементы гамильтониана в вакууме в V-представлении $H^{\alpha_1\alpha_2 i}_{\omega_1\omega_2 k}$ есть элементы следующей матрицы:

$$H^{\alpha_1\alpha_2}_{\omega_1\omega_2}(v) = -ik\; \delta^{\alpha_1}_{\omega_1}\, \delta^{\alpha_1}_{\omega_1} \times \\ \times \sqrt{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{64}$$

Решая систему уравнений Максвелла в V-представлении для произвольной плоскости, получим

$$\begin{bmatrix} v^{\alpha_1\alpha_2 1}(z) \\ v^{\alpha_1\alpha_2 2}(z) \\ v^{\alpha_1\alpha_2 3}(z) \\ v^{\alpha_1\alpha_2 4}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^{\alpha_1\alpha_2 1}(0) \exp\left(ik\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}\, z \right) \\ v^{\alpha_1\alpha_2 2}(0) \exp\left(ik\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}\, z \right) \\ v^{\alpha_1\alpha_2 3}(0) \exp\left(-ik\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}\, z \right) \\ v^{\alpha_1\alpha_2 4}(0) \exp\left(-ik\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}\, z \right) \end{bmatrix}. \tag{65}$$

Далее перейдем от V-представления к координатному представлению

$$f^{\alpha_1\alpha_2 n}(z) = S^{\alpha_1\alpha_2 n}_{\omega_1\omega_2 n}\left(v \to f\right) v^{\omega_1\omega_2 n}(z), \tag{66}$$

$$W^{x^1x^2, k}(z) = S^{x^1x^2, k}_{\alpha_1\alpha_2, i}\left(f \to x\right) f^{\alpha_1\alpha_2 i}(z). \tag{67}$$

Выражение описывает бивекторное электромагнитное поле в плоскости регистратора.

5. Дифракция на пропускающих дифракционных оптических элементах

Рассмотрим дифракцию света на пропускающих дифракционных оптических элементах

Пусть $v^{\alpha_1\alpha_2 n}(-a)$ - волновая функция бивекторного поля в V-пространственно-частотном представлении на границе области модуляции и области 1. Запишем ее в F-пространственно-частотном представлении

$$f^{\alpha_1\alpha_2 n}(-a) = S^n_m\left(v \to f\right) v^{\omega_1\omega_2 m}(-a). \tag{68}$$

Поле в произвольной точке в области модуляции имеет вид:

$$f^{\omega_1\omega_2 n}(z) = U^{\omega_1\omega_2 n}_{\alpha_1\alpha_2 m}\left(z\right) f^{\alpha_1\alpha_2 m}(-a), \tag{69}$$

где эволюционная матрица $U^n_m(z)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{i}{k}\frac{\partial U^{\omega_1\omega_2 n}_{\alpha_1\alpha_2 m}}{\partial z} = H^{\omega_1\omega_2 n}_{\beta_1\beta_2 l}(z)\, U^{\beta_1\beta_2 l}_{\alpha_1\alpha_2 m}(z) \quad (70)$$

с начальными условиями

$$U^{\omega_1\omega_2 n}_{\alpha_1\alpha_2 m}(-a) = \delta^{\omega_2}_{\alpha_2}\,\delta^{\omega_1}_{\alpha_1}\,\delta^{n}_{m}. \quad (71)$$

Полученное выражение представляет собой интегро-дифференциальное уравнение.

Бивекторное поле в F-представлении на границе области модуляции и области 4 имеет вид:

$$\begin{aligned} &f^{\omega_1\omega_2 n}(0) = \\ &= U^{\omega_1\omega_2 n}_{\alpha_1\alpha_2 j}(0)\, S^{\alpha_1\alpha_2 j}_{\beta_1\beta_2 m}(v \to f)\, v^{\beta_1\beta_2 m}(-a). \end{aligned} \quad (72)$$

То же самое в V-представлении

$$v^{\alpha_1\alpha_2 n}(0) = S^{\alpha_1\alpha_2 j}_{\beta_1\beta_2 m}(f \to v)\, f^{\beta_1\beta_2 m}(0). \quad (73)$$

Подставляя выражение (72) в (73), получаем:

$$\begin{aligned} &v^{\alpha_1\alpha_2 n}(0) = S^{\alpha_1\alpha_2 n}_{\beta_1\beta_2 m}(f \to v)\, U^{\beta_1\beta_2 m}_{\omega_1\omega_2 j}(0) \times \\ &\times S^{\omega_1\omega_2 j}_{\eta_1\eta_2 k}(v \to f)\, v^{\eta_1\eta_2 k}(-a). \end{aligned} \quad (74)$$

Полученное выражение (74) представляет собой связь между полями $v^{\alpha_1\alpha_2 n}(-a)$ и $v^{\alpha_1\alpha_2 k}(0)$ на границах области модуляции. Выражение (74) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &S^{\omega_1\omega_2 p}_{\alpha_1\alpha_2 n}(v \to f)\, v^{\alpha_1\alpha_2 n}(0) = \\ &= U^{\omega_1\omega_2 p}_{\beta_1\beta_2 j}(0)\, S^{\beta_1\beta_2 j}_{\eta_1\eta_2 k}(v \to f)\, v^{\eta_1\eta_2 k}(-a). \end{aligned} \quad (75)$$

На практике поле удовлетворяет следующим условиям.

Условие 1. Поле прошедшее через оптический элемент не содержит волн, распространяющихся против оси z:

$$v^{\eta_1\eta_2 3}(0) = v^{\eta_1\eta_2 4}(0) = 0. \quad (76)$$

Условие 2. Компоненты определяются из условия задачи. Они описывают бивекторное поле в отсутствии ДОЭ. На практике при решении задач дифракции падающее и прошедшее поле удобно задавать в координатном представлении. В этом случае необходимо в выражении для падающего поля перейти от координатного представления к V-представлению, используя формулы

$$f^{\alpha_1\alpha_2, i}(-a) = S^{\alpha_1\alpha_2, i}_{x^1x^2, k}(x \to f)\, W^{x^1x^2, k}(-a), \quad (77)$$

$$v^{\alpha_1\alpha_2 n}(-a) = S^{\alpha_1\alpha_2 n}_{\omega_1\omega_2 n}(f \to v)\, f^{\omega_1\omega_2 n}(-a). \quad (78)$$

Решая систему интегральных уравнений (75) и используя результаты, полученные в предыдущем пункте, определяем прошедшее бивекторное поле в области 4.

6. Дискретное пространственно-частотное представление

Для решения задач дифракции на периодических структурах используется дискретное пространственно-частотное представление. Связь между волновыми функциями в координатном и дискретном пространственно-частотном представлениях имеет следующий вид:

$$f^{nm,i}(0) = S^{nm,i}_{x1x2,k}(x \to f)\, W^{x^1x^2,k}(0), \quad (79)$$

$$S^{nm,i}_{x^1x^2,k}(x \to f) = \frac{1}{d_1 d_2}\exp\left(ik\left(\alpha^m_1 x^1 + \alpha^m_2 x^2\right)\right)\delta^i_k, \quad (80)$$

$d_1 d_2$ - размеры дифракционного оптического элемента или периоды периодической двумерной структуры.

Тензор обратного преобразования имеет вид:

$$S^{x_1x_2,k}_{nm,i}(f \to x) = \exp\left(ik\left(\alpha^m_1 x^1 + \alpha^m_2 x^2\right)\right)\delta^k_i. \quad (81)$$

Гамильтониан в дискретном пространственно-частотном представлении имеет вид

$$H^{np}_{mq} = \begin{bmatrix} 0 & A^{np}_{mq} \\ B^{np}_{mq} & 0 \end{bmatrix}, \quad (82)$$

$$A^{np}_{mq} = -\begin{bmatrix} i\alpha^n_1 & 0 \\ 0 & i\alpha^p_2 \end{bmatrix}\varepsilon^{-1}_{n-m,\,p-q}\begin{bmatrix} -i\alpha^m_2 & i\alpha^q_1 \\ -i\alpha^m_2 & i\alpha^q_1 \end{bmatrix} - \\ -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\delta^n_m\,\delta^p_q,$$

$$A^{np}_{mq} = -\begin{bmatrix} i\alpha^n_1 & 0 \\ 0 & i\alpha^p_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -i\alpha^m_2 & i\alpha^q_1 \\ -i\alpha^m_2 & i\alpha^q_1 \end{bmatrix}\delta^n_m\,\delta^p_q - \\ -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\varepsilon^{-1}_{n-m,\,p-q}.$$

Формулы (75) в дискретном пространственно-частотном представлении имеют вид:

$$\begin{aligned} &S^{nip}_{mjq}(v \to f)\, v^{mjq}(0) = \\ &= U^{nip}_{mjq}(0)\, S^{mjq}_{slr}(v \to f)\, v^{slr}(-a). \end{aligned} \quad (83)$$

Отметим, что в отличие от обычного пространственно-частотного представления, в дискретном случае интегральное уравнение превращается в систему линейных алгебраических уравнений. Матрицы перехода от F-представления к V-представлению и обратно имеют вид:

$$S^{ipn}_{kqm}(v \to f) = \delta^i_k\,\delta^p_q\,S^n_m(v \to f), \quad (84)$$

$$S^{ipn}_{jqm}(f \to v) = \delta^i_j\,\delta^p_q\left(M^{-1}\right)^n_k P^k_m. \quad (85)$$

Интегро-дифференциальное уравнение для эволюционной матрицы в дискретном пространственно-частотном представлении превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{i}{k}\frac{\partial U^{nik}_{mjp}(z)}{\partial z} = H^{nik}_{slr}(z)\, U^{slr}_{mjp}(z) \quad (86)$$

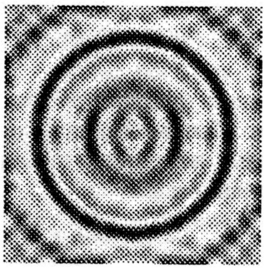
с начальными условиями

$$U^{nik}_{mjp}(-a) = \delta^n_m\,\delta^i_j\,\delta^k_p. \quad (87)$$

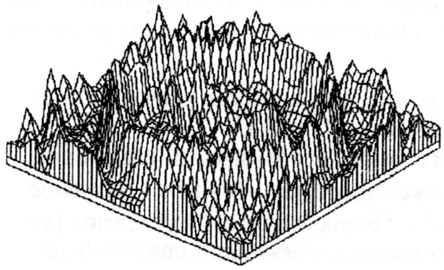
Формулы (84), (85), (86) могут быть получены из формул (56), (57), (70)< если заменить интегралы на интегральные суммы.

7. Реализация вычислений

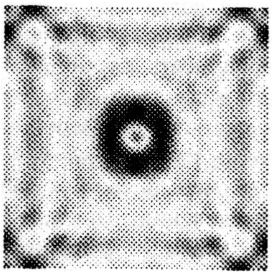
Для того чтобы получить систему линейных алгебраических уравнений (83), необходимо многократное уравнение для эволюционной матрицы (86). Решение эволюционного уравнения сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений с различными начальными условиями. Это позволяет использовать технику параллельных вычислений. В данном случае был использован подход, состоящий в том, чтобы система уравнений для различных начальных условий решалась на различных компьютерах. Приводимые ниже результаты были получены с использованием кластера, состоящего из четырех двухпроцессорных компьютеров PENTIUN-II с частотой 450 МГц. Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений использовались методы матричной экспоненты и Рунге-Кутта.



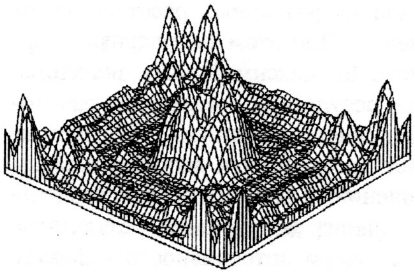
а



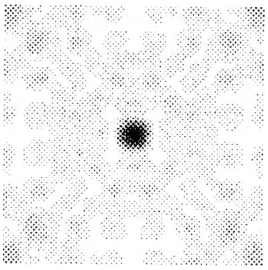
б



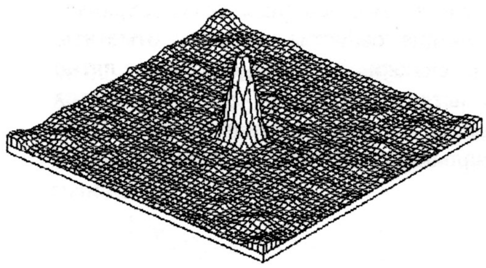
в



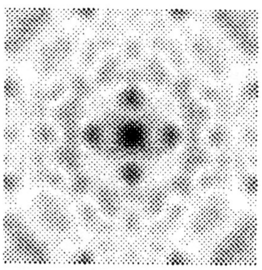
г



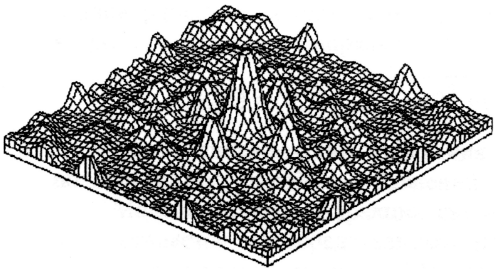
д



е

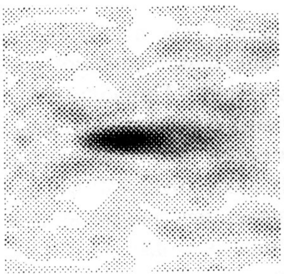


ж

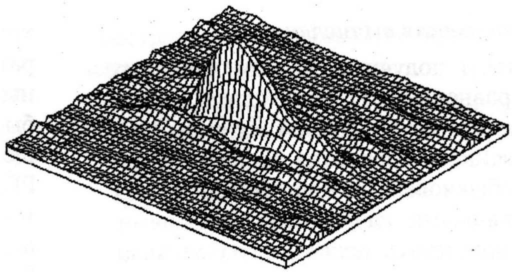


з

Рис. 2. Результаты расчета проекции вектора Умова-Пойтинга на оптическую ось для дифракции плоской электромагнитной волны на радиально-симметричной бинарной линзе в плоскости z=0 (а, б), в плоскости z=f/2 (в, г), в плоскости z=f (д, е), z=3f/2 (ж, з).



а



б

Рис. 3. Результаты расчета проекции вектора Умова-Пойтинга на оптическую ось для дифракции плоской электромагнитной волны на радиально-симметричной бинарной линзе в плоскости zx.

В качестве примера был выбран расчет поля от бинарной цилиндрической линзы.

При расчете были использованы следующие параметры: радиус апертуры R=4,82λ, фокусное расстояние f=4,82λ. На рисунках 2, 3 приведены результаты расчета проекции вектора Умова–Пойтинга на оптическую ось для дифракции плоской электромагнитной волны на бинарной радиально-симметричной линзе на различных расстояниях от оптического элемента. При этом на рисунках черный цвет соответствует максимальному значению. Приведенные выше результаты показывают работоспособность приведенного алгоритма. Разработанный метод снижает требования к вычислительным ресурсам, по сравнению с многомерными разностными методами. Анализ полученных результатов показывает, что максимум интенсивности в фокусе линзы примерно в четыре раза меньше значения, рассчитанного в скалярном приближении Кирхгофа. Однако, несмотря на это, бинарная линза сохраняет свои фокусирующие свойства. Следует отметить, что в отличие от скалярной теории, фокальное пятно имеет слегка вытянутую форму. Это объясняется тем, что в рамках электромагнитной теории не существует радиально-симметричных решений даже в случае дифракции плоской волны на радиально-симметричном объекте. Радиальная симметрия нарушается за счет наличия поляризации у падающей электромагнитной волны.

Заключение

В работе предложен компактный математический аппарат для решения задач дифракции плоской электромагнитной волны на дифракционном оптическом элементе. Математический аппарат позволяет однообразно описать различные задачи дифракционной оптики и свести многие задачи к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений с различными начальными условиями. Это позволяет в свою очередь использовать технику параллельных вычислений. Предложенные в работе методы апробированы на решении задачи дифракции плоской электромагнитной волны на бинарной линзе Френеля.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика // М., Наука. Т. 3. 1973. 504 с.
2. Методы компьютерной оптики // М., Физматлит. 2000. 688 с.

Scattering theory methods for solving the problems of diffraction optics

S.G. Volotovsky, N.L. Kazanskiy, S.I. Kharitonov
Image Processing Systems Institute of RAS, Samara

Abstract

The paper proposes a method for solving the system of Maxwell's equations for the case of diffraction of a plane electromagnetic wave by a diffractive optical element shaped as a thin plate with a microrelief. The calculation was performed within the framework of the rigorous electromagnetic theory. The method is based on reducing the original system of Maxwell's equations to a system of integro-differential equations.

Citation: Volotovsky SG, Kazanskiy NL, Kharitonov SI. Scattering theory methods for solving the problems of diffraction optics. Computer Optics 2001; 21: 23-30.

References

[1] Landau LD, Lifshits EM. Course of theoretical physics. Vol 3: Quantum mechanics, non-relativistic theory. 3rd ed. Pergamon Press; 1981.
[2] Soifer VA, ed. Methods of computer optics [In Russian]. Moscow: "Fizmatlit" Publisher; 2000.