ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ

КОЛЬЦЕВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА

В.В. Котляр, А.А. Ковалев
Институт систем обработки изображений РАН,
Самарский государственный аэрокосмический университет

Аннотация

Рассмотрено интегральное преобразование, названное кольцевым преобразованием Радона (КПР) и являющееся обобщением преобразования Радона на случай, когда интегрирование происходит не по прямой линии, а по окружности определенного радиуса. Радиус окружности является параметром преобразования. Получены выражения для КПР некоторых конкретных функций. Выведены соотношения для получения образа объекта при его сдвиге и масштабировании. Приведена оптическая схема для выполнения КПР.

Введение

Преобразование Радона (иногда его называют преобразованием Хоу (Hough)) широко используется в обработке изображений, геодезии, медицине, компьютерной томографии [1-4]. Двумерное преобразование Радона (ПР) определяется следующим образом:

$$R[f](c,\varphi)=\iint_{R^2} f(x,y)\partial(c-x\cos\varphi-y\sin\varphi)\,dxdy\,,\qquad(1)$$

где ρ,φ – полярные координаты, описывающие прямую: ρ – расстояние от начала координат до прямой, φ – угол наклона прямой к оси Ox.

Обратное преобразование Радона можно получить в виде:

$$f(x,y)=\frac{1}{2p^2}\int_0^{2p}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{\partial}{\partial c}R[f](c,\varphi)\,dc\,d\varphi}{x\cos\varphi+y\sin\varphi-c}\,.\qquad(2)$$

Преобразование Радона во многом аналогично преобразованию Фурье (ПФ). Если ПФ раскладывает комплексную амплитуду света (двумерную функцию) по плоским волнам (по Фурье-гармоникам), то ПР «раскладывает» функцию по прямым линиям. Оба преобразования не являются сверткой и выполняются с помощью сферической линзы (для ПФ) и сферической линзы и фазового пространственного фильтра (для ПР) [5-7]. Поэтому для ПФ и ПР выполняется теорема Парсеваля, физически означающая выполнение закона сохранения световой энергии при распространении через сферическую линзу и фазовый фильтр. Как ПФ преобразует плоскую волну в фокальную точку, так и ПР преобразует прямую линию на изображении в точку. Но есть и отличия, например, ПФ переводит точку в плоскую волну, но ПР переводит точку в один период синусоиды [5].

В скалярной оптике наряду с ПФ известны и другие интегральные преобразования – преобразования Кирхгофа и Френеля. Их физический смысл заключается в разложении функции комплексной амплитуды, описывающей распространение света, по сферическим (преобразование Кирхгофа) и параболическим (преобразования Френеля) волнам. Можно по аналогии между ПФ и ПР определить кольцевое преобразование Радона (КПР), которое будет свертывать изображение с окружностями определенного радиуса и параболическое преобразование Радона (ППР), которое свертывает изображение с параболами. Эти преобразования КПР и ППР, как и преобразование Кирхгофа (ПК) и преобразование Френеля (ПФР), должны быть интегралами свертки. При стремлении радиуса окружности КПР к нулю, преобразование стремится к тождественному, а при стремлении радиуса окружности к бесконечности КПР переходит в обычное ПР.

Преобразование свертки можно оптически выполнить с помощью Фурье-коррелятора с пространственным фильтром, функция пропускания которого равна Фурье-образу от функции ядра свертки. Для случая КПР функцией ядра свертки является функция, описывающая окружность или бесконечно узкое кольцо (поэтому и преобразование называется кольцевым). Фурье-образ функции кольца – это функция Бесселя нулевого порядка. Поэтому функция пропускания пространственного фильтра Фурье-коррелятора для выполнения КПР должна быть пропорциональна функции Бесселя нулевого порядка. Так как функция пропускания фильтра – амплитудная, то закон сохранения энергии для проходящего света не выполняется.

В данной работе рассмотрены основные свойства КПР; получены выражения для КПР некоторых простых функций; приводятся результаты численного моделирования обработки изображений с помощью КПР.

Так как КПР от функции точечного источника есть функция бесконечно узкого кольца, то можно считать, что КПР описывает оптическую систему с кольцевым импульсным откликом. Это обстоятельство указывает на тесную связь между КПР и мезооптикой, так как мезооптический объектив – это объектив с кольцевым импульсным откликом [8]. Отличие состоит в том, что в мезооптике в Фурье-корреляторе в качестве пространственного фильтра используется конический аксикон.

1. Основные свойства КПР

1.1. Определение

Введем в рассмотрение линейное интегральное преобразование комплексной двумерной функции, являющейся сверткой с обобщенной δ-функцией Дирака:

$$R_г(о,з) = \iint_{R^2} f(x,y)\,\partial\left(г - \sqrt{(x-о)^2 + (y-з)^2}\right) dxdy\ , \qquad (3)$$

где γ – радиус окружности.

В полярных координатах вместо (3) можно записать:

$$R_г(c,u) = \int_0^{\infty}\int_0^{2p} \partial(г - r)\times \times f(r\cos\varphi + c\cos u, r\sin\varphi + c\sin u)\cdot rdrd\varphi \qquad (4)$$

$$R_г(c,u) = г\int_0^{2p} f(г\cos\varphi + c\cos u, г\sin\varphi + c\sin u)\,d\varphi\ . \qquad (5)$$

1.2. Вычисление КПР через БПФ

Так как КПР является сверткой, то его можно выразить через преобразования Фурье и вычислять с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Выразим преобразуемую функцию через ее Фурье-образ:

$$f(x,y) = \frac{1}{(2p)^2}\iint_{R^2} F(о,з)\exp(i(xо + yз))\ dо\ dз\ , \qquad (6)$$

где $F(\xi,\eta)$ – Фурье-образ функции $f(x,y)$.

Фурье-образ радиальной δ-функции из уравнения (3) пропорционален функции Бесселя нулевого порядка:

$$D(о,з) = \iint_{R^2} \partial\left(г - \sqrt{x^2+y^2}\right)\exp\left[-i(xо + yз)\right] dоdз =$$

$$= \int_0^{2p}\int_0^{\infty} \partial(г - r)\exp\left[-irc\cos(\varphi - u)\right] rdrd\varphi =$$

$$= г\int_0^{2p} \exp\left[-iгc\cos(\varphi - u)\right] d\varphi\ = 2pгJ_0(гc), \qquad (7)$$

где J_0 – функция Бесселя.

Из уравнения (7) следует, что преобразование Фурье-Бесселя (или преобразование Ханкеля нулевого порядка) от функции Бесселя нулевого порядка пропорционально радиальной δ-функции:

$$\partial(г - c) = г\int_0^{\infty} J_0(гc) J_0(rc) cdc\ . \qquad (8)$$

Тогда из уравнения (3) с учетом (6) и (7) получим представление КПР в виде обратного преобразования Фурье:

$$R(о,з) = \frac{1}{(2p)^2}\iint_{R^2} F(x,y)\times \times 2pгJ_0\left(г\sqrt{x^2+y^2}\right)\exp\left[i(xо + yз)\right] dxdy\ . \qquad (9)$$

Чтобы вычислить КПР через БПФ по формуле (9) требуется вычислить Фурье-образ $F(x,y)$ исходной функции $f(\xi,\eta)$, умножить его на функцию Бесселя $J_0\left(\gamma\sqrt{x^2+y^2}\right)$ и вычислить обратное ПФ.

В полярных координатах уравнение (9) имеет вид:

$$R(c,u) = \frac{г}{2p}\iint_{R^2} F(r,\varphi)\times \times J_0(гr)\exp\left[irc\cos(\varphi - u)\right] rdrd\varphi\ . \qquad (10)$$

Если исходная функция радиально-симметричная, т.е. $f(\xi,\eta) = f(\rho)$, то уравнение (10) примет вид:

$$R(c) = г\int_0^{\infty} F(r) J_0(гr) J_0(rc) rdr\ . \qquad (11)$$

Из уравнения (11) следует, что КПР-образ радиальной функции – радиальная функция.

1.3. Обратное кольцевое преобразование Радона

Из уравнения (9) можно получить обратное преобразование КПР.

Обозначим Фурье-образ от двумерной функции кольцевого преобразования Радона:

$$\tilde{R}(x,y) = \iint_{R^2} R(о,з)\times \times\exp\left[-i(xо + yз)\right]\ dо\ dз\ . \qquad (12)$$

Тогда из уравнения (9) следует связь Фурье-образов исходной функции и КПР

$$F(x,y) = \frac{\tilde{R}(x,y)}{2pгJ_0\left(г\sqrt{x^2+y^2}\right)}\ . \qquad (13)$$

Из уравнения (13) получается обратное КПР:

$$f(x,y) = \frac{1}{(2p)^2}\iint_{R^2} \frac{\tilde{R}(о,з)\,exp\left[i(xо + yз)\right]}{2pгJ_0\left(г\sqrt{о^2+з^2}\right)} dоdз\ . \qquad (14)$$

Из уравнения (14) следует, что обратное преобразование КПР есть преобразование Фурье от сингулярной функции, которая обращается в бесконечность в нулях функции Бесселя. Для корректного вычисления интеграла в уравнении (14) следует применять метод регуляризации Тихонова.

1.4. Смещение объекта

Пусть $R_\gamma(\xi,\eta)$ – КПР-образ функции $f(x,y)$. Тогда КПР-образ от той же функции, но сдвинутой на вектор с координатами (*a*, *b*), будет иметь вид

$$\tilde{R}_г(о,з) = \iint_{R^2} f(x-a, y-b)\times$$

$$\times\partial\left(г - \sqrt{(x-о)^2 + (y-з)^2}\right) dxdy = \iint_{R^2} f(б,в)\times$$

$$\times\partial\left(г - \sqrt{\left[б-(о-a)\right]^2 + \left[в-(з-b)\right]^2}\right)\ dб\ \ dв =$$

$$= R_г(о-a, з-b). \qquad (15)$$

Из (15) следует, что смещение функции приводит к аналогичному смещению КПР-образа.

1.5. Масштабирование объекта

Пусть $R_\gamma(\xi,\eta)$ – КПР-образ функции $f(x,y)$. Тогда КПР-образ от той же функции, но масштабно измененной с коэффициентом α, будет иметь вид

$$\widetilde{R}_г(о,з)=\iint_{R^2} f(бx,бy)\partial\left(г-\sqrt{(x-о)^2+(y-з)^2}\right)dxdy=$$

$$=\iint_{R^2} f(A,B)\partial\left(г-\frac{\sqrt{(A-бо)^2+(B-бз)^2}}{б}\right)\frac{dAdB}{б^2}=$$

$$=\iint_{R^2} f(A,B)\partial\left(бг-\sqrt{(A-бо)^2+(B-бз)^2}\right)\frac{dAdB}{б}=$$

$$=\frac{1}{б}R_{бг}(бо,бз) \qquad (16)$$

Из уравнения (16) следует, что изменение масштаба объекта (сжатие или расширение) приводит к аналогичному изменению масштаба и параметра γ КПР-образа.

2. КПР некоторых функций

2.1. Преобразование точки

Пусть исходная функция представляет собой точечный импульс в начале координат, описывающий точечный источник света, $f(x,y)=\delta(x)\delta(y)$. Тогда из уравнения (3) следует, что КПР-образ этой функции есть бесконечно узкое кольцо:

$$R(о,з)=\iint_{R^2}\partial(x)\partial(y)\partial\left(г-\sqrt{(x-о)^2+(y-з)^2}\right)dxdy=$$

$$=\partial\left(г-\sqrt{о^2+з^2}\right). \qquad (17)$$

На рис. 1 показана оптическая схема для выполнения КПР. Показан Фурье-коррелятор, состоящий из двух сферических линз и амплитудного пространственного фильтра, функция пропускания которого есть функция Бесселя нулевого порядка, расстояния от плоскости объекта до линзы, от линзы до фильтра, от фильтра до второй линзы и от второй линзы до плоскости КПР-образа равны фокусному расстоянию обеих линз.

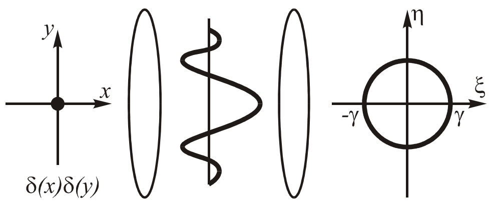


Рис. 1. КПР-образ точки есть кольцо

2.2. Преобразование линии

Пусть исходная функция описывает прямую линию, совпадающую с осью *x*, то есть $f(x,y)=\delta(y)$, тогда ее Фурье-образ также будет прямой линией, совпадающей с осью η: $F(\xi,\eta)=\delta(\xi)$. Далее с учетом уравнения (9) получим:

$$R(x,y)=\frac{г}{2р}\iint_{R^2}\partial(о)J_0\left(г\sqrt{о^2+з^2}\right)\exp\left[i(x\xi+y\eta)\right]dодз=$$

$$=\frac{г}{2р}\int_{-\infty}^{+\infty}J_0(г|з|)\exp(iy\eta)dз\overset{т.к. J_0-четная}{=}$$

$$\frac{г}{2р}\int_{-\infty}^{+\infty}J_0(гз)\exp(iy\eta)dз=$$

$$=\frac{\gamma}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\exp\left[-i\gamma\eta\cos\phi\right]\exp(iy\eta)\,d\phi d\eta=$$

$$=\frac{\gamma}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\delta(\gamma\cos\phi-y)\,d\phi=$$

$$=\frac{2г}{2р}\int_0^{р}\partial(г\cos\varphi-y)\,d\varphi\overset{\cos\varphi=t}{=}\frac{г}{р}\int_{-1}^{1}\frac{\partial(гt-y)dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=\frac{1}{р}\int_{-1}^{1}\frac{\partial\left(t-\frac{y}{г}\right)dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{р}\frac{1}{\sqrt{г^2-y^2}},\ \gamma>y. \qquad (18)$$

Если $\gamma<y$, то интеграл равен нулю.

Из уравнения (18) следует, что

$$\frac{г}{2р}\iint_{R^2}\partial(о)J_0\left(г\sqrt{о^2+з^2}\right)\exp\left[i(xо+yз)\right]dодз= \\ =\frac{1}{р}\frac{1}{\sqrt{г^2-y^2}}. \qquad (19)$$

Из уравнения (19) следует, что прямая линия переходит в две параллельные линии, параллельные также исходной линии, лежащей на оси *x* (рис. 2).

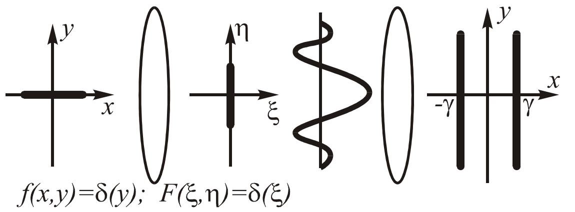


Рис. 2. КПР-образ линии есть две параллельные линии

2.3. Преобразование наклонной плоской волны.

Пусть исходной функцией является плоская волна (или Фурье-гармоника):

$$f(x,y)=\exp(i\alpha x), \qquad (20)$$

которая наклонена только к одной оси *x*.

Тогда КПР-образ такой функции будет иметь вид:

$$R(с,и)=г\int_0^{2р}f(г\cos\varphi+с\cos и)\,d\varphi=$$

$$=\gamma\int_0^{2\pi}\exp(i\alpha\gamma\cos\varphi)\exp(i\alpha\rho\cos\theta)\,d\varphi=$$

$$=2рг\exp(iбс\cos и)J_0(бг)=2ргJ_0(бг)\exp(i\alpha\xi). \qquad (21)$$

Из уравнения (21) следует, что плоская волна $e^{i\alpha x}$ переходит в плоскую волну $\left(2\pi\gamma J_0(\alpha\gamma)\right)\exp(i\alpha\xi)$, также наклоненную только к одной оси ξ, которая параллельна оси *x*, то есть КПР сохраняет величину и направление наклона плоской волны, изменяя только амплитуду. Если $\alpha\gamma$ – корень функции Бесселя, то плоская волна не проходит через оптическую систему на рис. 1, так как ее амплитуда на выходе равна нулю.

2.4. Преобразование периодической функции

Пусть на входе в оптическую систему на рис.1 имеется световое поле, комплексная амплитуда которого есть периодическая функция:

$$f\left(x,y\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left[i\left(б_n x+в_n y\right)\right], \tag{22}$$

тогда на выходе оптической системы на рис. 1 появится световое поле, комплексная амплитуда которого есть КПР-образ от функции (22):

$$R\left(c,u\right)=г\int_0^{2p} f\left(г\cos\varphi+c\cos u, г\sin\varphi+c\sin u\right)d\varphi=$$

$$=г\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_0^{2p}\exp\left[iб_n\left(г\cos\varphi+c\cos u\right)\right]\times =$$

$$\times\exp\left[iв_n\left(г\sin\varphi+c\sin u\right)\right]d\varphi$$

$$=г\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\exp\left[i\left(б_n c\cos u+в_n c\sin u\right)\right]\times$$

$$\times\int_0^{2p}\exp\left[i\left(б_n г\cos\varphi+в_n г\sin\varphi\right)\right]d\varphi=$$

$$=2pг\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n J_0\left(г\sqrt{б_n^2+в_n^2}\right)\exp\left[i\left(б_n о+в_n з\right)\right]=$$

$$=2pг\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\tilde{c}_n\exp\left[i\left(б_n о+в_n з\right)\right]. \tag{23}$$

Из уравнения (23) следует, что КПР переводит периодическую функцию в другую периодическую функцию с тем же периодом.

В частности, КПР сохраняет косинус (или синус):

$$f\left(x\right)=\cos щx=\frac{\exp\left(i\omega x\right)+\exp\left(-i\omega x\right)}{2}, \tag{24}$$

$$R\left(о,з\right)=2pгJ_0\left(гщ\right)\frac{\exp\left(i\omega\xi\right)+\exp\left(-i\omega\xi\right)}{2}=$$

$$=2pгJ_0\left(гщ\right)\cos що. \tag{25}$$

Заметим, что если $\gamma\omega$ – корень функции Бесселя, то $R\equiv 0$.

2.5. Преобразование окружности

Пусть исходной функцией является бесконечно узкое кольцо или окружность:

$$f\left(x,y\right)=\partial\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right), \tag{26}$$

R – радиус кольца.

Фурье-образ функции (26) есть функция Бесселя:

$$F\left(c\right)=2p\int_0^{\infty}\partial\left(R-r\right)J_0\left(rc\right)rdr=2pRJ_0\left(Rc\right), \tag{27}$$

а КПР-образ радиальной функции можно вычислить с помощью уравнения (11):

$$R\left(c\right)=\frac{г}{2p}2pR\int_0^{\infty}J_0\left(Rr\right)J_0\left(гr\right)J_0\left(rc\right)rdr \tag{28}$$

Интеграл (28) можно найти в справочнике [9]:

$$\int_0^{\infty}J_0\left(ax\right)J_0\left(bx\right)J_0\left(cx\right)xdx=\begin{cases}0, c<\left|a-b\right|,\\ 0, c>a+b,\\ \dfrac{1}{pab}\left(1-r^2\right)^{-1/2}, \left|a-b\right|<c<a+b;\end{cases} \tag{29}$$

где $r=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

В нашем случае из формулы (29) следует:

$$R\left(c\right)=\begin{cases}0, c<\left|г-R\right|,\\ 0, c>г+R,\\ \dfrac{2}{p\sqrt{4R^2г^2-\left(R^2+г^2-c^2\right)}}, \left|г-R\right|<c<г+R;\end{cases} \tag{30}$$

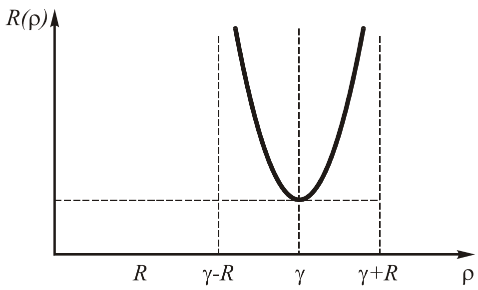


Рис. 3. График КПР-образа узкого кольца (формулы (30)

Из уравнения (30) следует, что при $\rho=\lambda+R$ и $\rho=\lambda-R$ КПР-образ стремится к бесконечности $R\left(\rho\right)=+\infty$, а при $\rho=\gamma$ КПР-образ имеет минимум $R\left(\gamma\right)=\dfrac{2}{\pi R\sqrt{4\gamma^2-R^2}}$. При $\gamma>>R$ из уравнения (30) следует, что КПР-образ бесконечно узкого кольца радиусом R есть два близких кольца с радиусами R-γ и R+γ.

2.6. Преобразование круга

Если исходной функцией является функция, описывающая круг радиуса R:

$$f\left(x,y\right)=circl\left(\frac{r}{R}\right), \tag{31}$$

Фурье-образ которой пропорционален функции Эйри:

$$F\left(c\right)=2p\frac{RJ_1\left(Rc\right)}{c}, \tag{32}$$

то КПР-образ радиальной функции можно вычислить по формуле (11):

$$R\left(c,u\right)=\frac{г}{2p}2pR\int_0^{\infty}\frac{J_1\left(Rr\right)}{r}J_0\left(гr\right)J_0\left(rc\right)rdr. \tag{33}$$

Интеграл (33) вычисляется с помощью справочного интеграла [9]:

$$\int_0^{\infty} J_0(ax)J_0(bx)J_1(cx)xdx =$$

$$= \begin{cases} 0, c < |a-b|, \\ \dfrac{1}{c}, c > a+b, \\ \dfrac{1}{рc}\arccos\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}, |a-b| < c < a+b; \end{cases} \qquad (34)$$

С учетом (34) КПР-образ (33) имеет вид

$$R(c) = \begin{cases} 0, |c-г| > R, \\ г, R > c+г, \\ \dfrac{г}{р}\arccos\dfrac{c^2+г^2-R^2}{2cг}, |c-г| < R < c+г; \end{cases} \qquad (35)$$

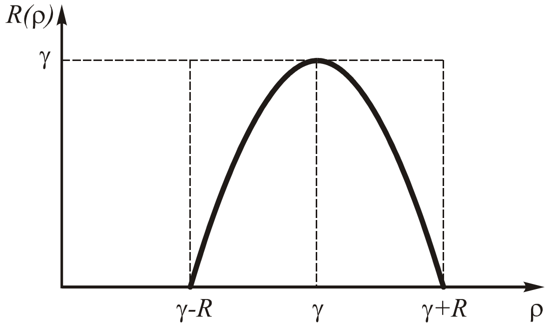


Рис. 4. График КПР-образа круга (формулы (35)

Из уравнения (35) следует, что КПР-образ функции круга есть кольцо с радиусом γ и шириной $2R$ ($R<\gamma$) (рис. 4). При других соотношениях параметров γ и R КПР-образ имеет другой вид.

КПР – образ функции широкого кольца можно получить с помощью уравнения (35), примененного к функции

$$f(r) = circl\,\frac{r}{R_1} - circl\,\frac{r}{R_2}. \qquad (36)$$

2.7. Преобразование прямоугольника

Пусть исходной функцией является функция прямоугольника со сторонами a и b:

$$f(x,y) = rect\left(\frac{x}{a}\right)rect\left(\frac{y}{b}\right), \qquad (37)$$

Фурье-образ которой пропорционален произведению sinc-функций:

$$F(о,з) = 4ab\cdot\sin c(aо)\cdot\sin c(bз). \qquad (38)$$

Тогда КПР-образ функции (37) можно вычислить с помощью уравнения (9):

$$R(x,y) = \frac{г}{2р}4\iint_{R^2}\frac{\sin(aо)}{о}\frac{\sin(bз)}{з}\times$$
$$\times J_0\left(г\sqrt{о^2+з^2}\right)\exp\left[i(xо+yз)\right]dоdз. \qquad (39)$$

Так как

$$4\sin(aо)\sin(bз) = -\left[exp(ia\xi)-exp(-ia\xi)\right]\bullet\left[exp(ib\eta)-exp(-ib\eta)\right],$$

то достаточно рассмотреть только одно слагаемое из четырех в уравнении (39):

$$I_1 = -\frac{г}{2р}\iint_{R^2}\frac{J_0\left(г\sqrt{о^2+з^2}\right)}{оз}\times$$
$$\times\exp\left\{i\left[о(x+a)+з(y+b)\right]\right\}dоdз. \qquad (40)$$

Интеграл (40) нельзя вычислить с помощью аналитических функций, но вторая смешанная производная от интеграла (40) может быть выражена с помощью δ-функции:

$$\frac{\partial^2 I_1}{\partial x\partial y} = \frac{г}{2р}\iint_{R^2}J_0\left(г\sqrt{о^2+з^2}\right)\exp\left\{i\left[о(x+a)+з(y+b)\right]\right\}dоdз =$$

$$= \frac{г}{2р}\iint_{R^2}J_0(гr)\exp\left[irc\cos(\varphi-u)\right]rdrd\varphi =$$

$$= г\iint_{R^2}J_0(гr)J_0(rc)rdr =$$

$$= \partial(г-c) = \partial\left(г-\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2}\right). \qquad (41)$$

С учетом уравнения (41) и четырех слагаемых в уравнении (39) получим, что

$$\frac{\partial^2 R(x,y)}{\partial x\partial y} = \partial\left(г-\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2}\right)-$$
$$-\partial\left(г-\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2}\right)-$$
$$-\partial\left(г-\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2}\right)+ \qquad (42)$$
$$+\partial\left(г-\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right).$$

Из уравнения (42) следует, что КПР-образ функции прямоугольника имеет такой вид, что его контурами являются окружности радиуса γ с центрами в точках с координатами ($-a$, $-b$), ($-a$, b), (a, $-b$) и (a, b) .

2.8. Преобразование функции Гаусса

Пусть на входе в оптическую систему на рис.1 имеется световое поле, комплексная амплитуда которого описывается функцией Гаусса:

$$f(r) = exp\left(-\frac{r^2}{щ^2}\right), \qquad (43)$$

Фурье-образом которой также является гауссовая функция:

$$F(c) = рщ^2\exp\left(-\frac{c^2щ^2}{4}\right). \qquad (44)$$

Тогда КПР-образ функции (43), вычисленный с помощью формулы (5), имеет вид:

$$R(c,u) = г\int_0^{2р} f(г\cos\varphi + c\cos u, г\sin\varphi + c\sin u)d\varphi =$$

$$\overset{т.к. f - радиально-симметрична}{=} г\int_0^{2р} f\left(г^2+c^2-2гc\cos\varphi\right)d\varphi =$$

$$= г\int_0^{2р} \exp\left(-\frac{г^2}{щ^2}\right)\exp\left(-\frac{с^2}{щ^2}\right)\exp\left(\frac{2гс}{щ^2}\cos\varphi\right)d\varphi =$$

$$= г\exp\left(-\frac{г^2+с^2}{щ^2}\right)\int_0^{2р}\exp\left(\frac{2гс}{щ^2}\cos\varphi\right)d\varphi =$$

$$г\exp\left(-\frac{г^2+с^2}{щ^2}\right)\int_0^{2р}\exp\left[-i\frac{2(iгс)}{щ^2}\cos\varphi\right]d\varphi =$$

$$= 2рг\exp\left(-\frac{г^2+с^2}{щ^2}\right)J_0\left(\frac{2iгс}{щ^2}\right) =$$

$$= 2рг\exp\left(-\frac{г^2}{щ^2}\right)\exp\left(-\frac{с^2}{щ^2}\right)I_0\left(\frac{2гс}{щ^2}\right), \qquad (45)$$

где $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя.

Из уравнения (45) следует, что КПР сохраняет функцию Гаусса, но умножает ее на модифицированную функцию Бесселя нулевого порядка:

$$I_m(x) = (-i)^m J_m(ix)$$

и на постоянную величину.

2.9. Преобразование моды Бесселя n–го порядка

Пусть исходной функцией является функция Бесселя произвольного порядка, умноженная на угловую гармонику:

$$f(x,y) = f(r,\varphi) = J_n(бr)\exp(in\varphi). \qquad (46)$$

Фурье-образом функции (46) является функция бесконечно узкого кольца:

$$F(о,з) = \iint_{R^2} J_n(бr)\exp(in\varphi)\exp\left[-irс\cos(\varphi-u)\right]rdrd\varphi =$$

$$= \exp(in\theta)\int_0^{\infty} J_n(бr)\int_0^{2р}\exp\left[in(\varphi-u)\right]\exp\left[-irс\cos(\varphi-u)\right]d\varphi\cdot rdr =$$

$$= 2р(-i)^n\exp(in\theta)\int_0^{\infty} J_n(бr)J_n(rс)rdr =$$

$$2р(-i)^n\exp(in\theta)\frac{\partial(б-с)}{б} = F(с,u), \qquad 47)$$

а КПР-образ можно вычислить с помощью уравнения (10):

$$R(r,\varphi) = \frac{г}{2р}\iint_{R^2} F(с,u)\cdot J_0(гс)\exp\left[irс\cos(\varphi-u)\right]сdсdu =$$

$$= \frac{г}{б}(-i)^n\iint_{R^2}\partial(б-с)\cdot J_0(гс)\exp(in\theta)\exp\left[irс\cos(\varphi-u)\right]сdсdu =$$

$$= \frac{г}{б}(-i)^n\int_0^{\infty}\partial(б-с)J_0(гс)\exp(in\varphi)\cdot 2рi^n J_n(rс)\,сdс =$$

$$= \frac{2рг}{б}J_0(бг)J_n(бr)\exp(in\varphi). \qquad (48)$$

При получении выражения (48) было использовано интегральное представление функции Бесселя:

$$J_n(x) = \frac{(-i)^n}{2р}\int_0^{2р}\exp(ix\cos t)\exp(\mathrm{int})\,dt. \qquad (49)$$

Из уравнения (48) следует, что КПР сохраняет функцию Бесселя n–го порядка, умноженную на угловую гармонику, домножая ее на константу. Если $бг$ – корень функции Бесселя нулевого порядка $J_0(\alpha\gamma)$=0, то функция Бесселя n-го порядка не пропускается через оптическую систему на рис. 1.

3. Численное моделирование

Моделирование кольцевого преобразования Радона осуществлялось с помощью вычисления двух дискретных преобразований Фурье (прямого и обратного) и умножения на функцию Бесселя:

$$F(x',y') = \Im^{-1}\left[J\cdot\Im\left[f(x,y)\right]\right] \qquad (50)$$

$\Im$ и $\Im^{-1}$ – символ прямого и обратного преобразования Фурье, H – функция Бесселя. В дискретном варианте преобразование Фурье вычисляется в виде двойной суммы:

$$F_{mn} = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} f_{kl}\exp\left[-i\frac{2р}{N}(mk+nl)\right], \qquad (51)$$

а функцию пропускания выберем в виде:

$$J_{mn} = J_0\left(нг\left(m-N/2\right)^2+\left(n-N/2\right)^2\right), \qquad (52)$$

где $н$ – разрешение в частотной плоскости.

В таблице 1 приведены исходные изображения на входе Фурье-коррелятора $\left|f(x,y)\right|^2$ (первый и второй столбец): точка, квадрат, круг, а также изображения на выходе Фурье-коррелятора $\left|F(x',y')\right|^2$ (столбцы 3-5) для соответствующих значений параметра y (радиуса окружности).

Из таблицы 1 видно, что с ростом параметра γ происходят следующие преобразования. Когда γ существенно меньше размеров объекта, объект изменяется незначительно, происходит лишь размытие контура. Когда γ сопоставимо с размером объекта, происходит существенное размытие. Когда же γ становится больше размеров объекта, по центру объекта возникает пустота, а интенсивность появляется по краям объекта.

Очевидно, что КПР-образ в некоторой точке максимален, если на исходном изображении на кольце радиуса y с центром в этой точке интенсивность также максимальна. Поэтому предположим, что КПР-преобразование можно использовать для обнаружения колец на изображении.

Для примера рассмотрим изображение с цифрами (рис. 5).

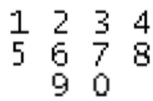


Рис. 5. Арабские цифры

Цифры состоят из отрезков прямых линий и дуг окружностей. Окружности могут быть разных диаметров. В цифрах встречаются дуги окружностей с диаметром, равным приближенно половине высоты всей цифры (такие дуги характерны для цифр «2», «3», «5», «6», «8», «9» и «0», рис. 6*a*) и с диаметром, равным приближенно высоте всей цифры (такие дуги характерны для цифр «3», «6», «8», «9» и «0», рис. 6*b*).

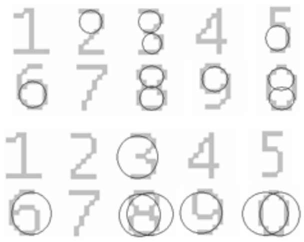
а)
б)


Рис. 6. Приближение арабских цифр дугами окружностей:
а) дуги окружностей с диаметром, равным приближенно половине высоты всей цифры,
b) дуги окружностей с диаметром, равным приближенно высоте всей цифры

При проведении эксперимента изображение с цифрами (рис. 5) подавалось на вход КПР-преобразования, однако наибольший контраст наблюдались при нескольких значениях параметра γ (рис. 7).

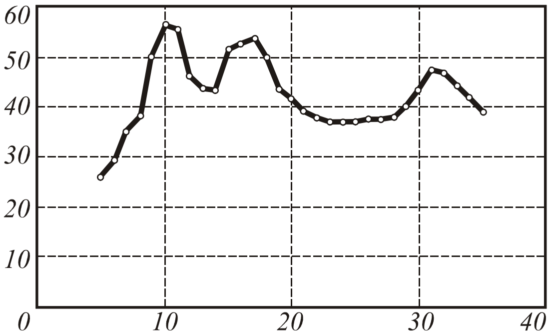


Рис. 7. Зависимость контраста от параметра г для изображения цифр

КПР-образы при γ, соответствующих максимальному контрасту, показаны на рис. 8.

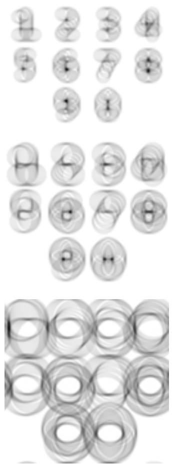
а)
б)
в)


Рис. 8. КПР-образы изображения цифр при значениях параметра г, для которых контраст максимален:
а) КПР-образ изображения цифр при $\gamma = 10$;
б) КПР-образ изображения цифр при $\gamma = 17$;
в) КПР-образ изображения цифр при $\gamma = 31$

На них видно, что при $\gamma = 10$ наибольшую интенсивность на КПР-образе имеют отсчеты, соответствующие центрам окружностей с диаметром, равным приближенно половине высоты всей цифры. При $\gamma = 17$, наибольшую интенсивность на КПР-образе имеют отсчеты, соответствующие центрам окружностей с диаметром, равным приближенно высоте всей цифры. При $\gamma = 31$ КПР-преобразование дало размытие всех цифр, не позволяющее выделить центры окружностей, из дуг которых эти цифры состоят.

На реальном изображении также происходит размытие контуров (рис. 9).

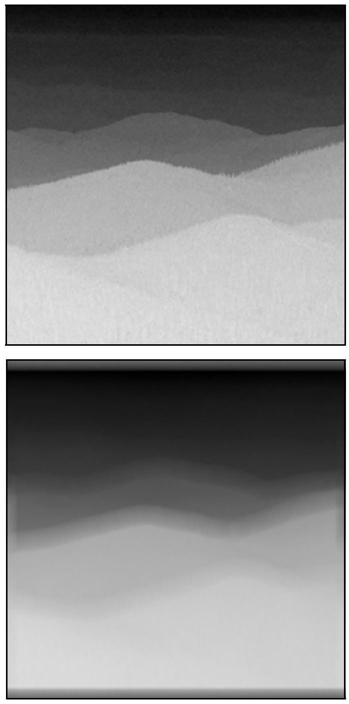
а)
б)


Рис. 9. Результат КПР-преобразования на реальном изображении при г $= 10$:
а) входное изображение;
b) выходное изображение

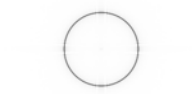
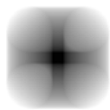
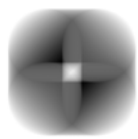
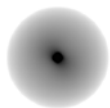
Заключение

В работе получены следующие результаты.

- Введено в рассмотрение некоторое обобщение двумерного интегрального преобразования Радона, названное кольцевым преобразованием Радона (КПР), которое отличается от обычного преобразования Радона тем, что свертывает функцию не с прямой линией, а с окружностью.
- Получены основные свойства линейного интегрального КПР: связь с преобразованием Фурье; обратное кольцевое преобразование Радона; смещение КПР-образа при смещении функции; масштабирование КПР-образа при масштабировании функции.
- Вычислены КПР-образы от некоторых функций: точки, круга, кольца, синусоиды, прямоугольника, Гаусса, Бесселя n-го порядка.

С помощью численного моделирования показана возможность использования Фурье-коррелятора, моделирующего КПР, для обнаружения дуг окружностей на изображении, например, частей цифр или букв.

Таблица 1. Результаты прохождения изображений некоторых геометрических объектов через Фурье-коррелятор, моделирующий КПР, при различных параметрах γ

Входное изображение	**Выходное изображение**		
	$\gamma = 10$	$\gamma = 30$	$\gamma = 50$
Точка			
Квадрат (120x120) 			
Круг (*R*=60 px) 			

Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № НШ-1007.2003.01, а также российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» («BRHE»).

Литература

1. Helgason S. The Radon Transform // Boston, MA: Birkhauser, 1980.
2. Deans S.R. The Radon Transform and some of its Application // New York, Willey, 1982.
3. Anger B., Portenier C. Radon Integrals // Boston, MA: Birkhauser, 1992.
4. Rann A.G., Katsevich A.I. The Radon Transform and Local Tomography // Boca Raton, CRC Press, 1996.
5. Ambs P., Lee S.H., Tain Q., Fainmann Y. Optical implementation of the Hough transform by a matrix of holograms // Appl. Opt., 1986. V. 25, N. 22. P. 4035-4045.
6. Woodford P., Casasent D. High accuracy and fast new format optical Hough-transform // Opt. Mem. and Neur. Net., 1997. V. 1. P. 1-16.
7. Сойфер В.А., Котляр В.В., Скиданов Р.В. Оптическое выполнение преобразования Хоу-Радона // Компьютерная оптика, 1997. Вып. 17. С. 143-144.
8. Soroko L.M. Mesooptics**.** Foundations and Applications, World Scientific, Singapore, 1996.
9. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции // М.: Наука, 1983.