НОВЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА МНОЖЕСТВ ТОЧЕК МНОГОМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА С МАЛЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ

А.Н. Калугин[1], Н.А. Калугин[2]
[1]Учреждение Российской академии наук Институт систем обработки изображений РАН,
[2]Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева

Аннотация

Современные подходы к решению задач фотореалистического синтеза изображений основаны на использовании методов квази-Монте Карло. Эффективность этих методов зависит от свойств множества точек многомерного пространства. Существующие методы синтеза множеств точек многомерного пространства с малым отклонением позволяют генерировать множества, величина звездного отклонения которых увеличивается с ростом размерности генерируемого множества. В работе предлагается новый метод синтеза множеств точек многомерного пространства, основанный на использовании канонических систем счисления. Показывается, что предложенный метод позволяет в определенном смысле преодолеть так называемое «проклятие размерности».

Ключевые слова: множества с малым отклонением, канонические системы счисления, звёздные отклонения.

Введение

В задачах фотореалистического синтеза изображений методы квази-Монте Карло [1], [2], [3], [4], [5], [6], получившие значительное развитие в последнее время, представляют собой вычислительно эффективную альтернативу классическим методам Монте Карло.

В отличие от последних, использующих множества псевдослучайных или случайных точек, методы квази-Монте Карло основаны на использовании детерминированных конечных множеств узлов с малым отклонением.

В одномерном случае одним из ярких примеров последовательности чисел с малым отклонением является последовательность Ван-дер-Корпута и ее обобщения Ван-дер-Корпута-Фора, последовательности Ван-дер-Корпута в бета-расширениях. В многомерном случае, примерами множеств с малым отклонением служат множества Хаммерсли, Холтона, Соболя, Нидеррайтера-Ксинга. В настоящий момент наиболее общими и часто используемыми множествами точек с малым отклонением являются (t,m,k) - сети (конечные множества). Известной проблемой в построении многомерных множеств с малым отклонением является так называемое «проклятие размерности» (см. [6], [9], [10], [11], [12], [13]).

В основе практически всех известных в настоящий момент методов построения множеств с малым отклонением лежит использование представления чисел в позиционных системах счисления. В данной работе предлагается новый метод синтеза многомерных множеств с малым отклонением (названных авторами каноническими (t,m,k) - сетями), основанный на теории канонических систем счисления в многомерных решетках. Доказывается, что канонические (t,m,k) - сети позволяют в некотором смысле преодолеть «проклятие размерности» классических методов квази-Монте Карло.

Первый раздел работы не содержит новых сведений. В нем приводятся определения и формулировки основных утверждений из теории множеств с малым отклонением и канонических систем счисления, необходимые для удобства ссылок.

Во втором разделе работы изложена основная идея канонической (t,m,k) – сети и приводится ее формальное определение.

В третьем разделе работы исследуются свойства синтезированного множества.

В заключении дается оценка полученных результатов.

1. Предварительные сведения

1.1. Множества с малым отклонением, (t, m, k)-сети

Пусть I^k — k-мерный единичный гиперкуб: $I^k = [0,1)^k$.

Пусть далее множество точек P — подмножество единичного k-мерного гиперкуба:

$$P = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_N\},\ P \subset I^k = [0,1)^k .$$

Мы всегда будем интерпретировать «множество точек» как комбинаторное понятие «мультимножества», т.е. множества, в котором количество вхождений каждого элемента имеет значение.

Пусть B — произвольное подмножество $B \subset I^k$. Определим величину

$$A(B;P) = \sum_{n=1}^{N} c_B(\vec{x}_n), \qquad (1.1)$$

где c_B — характеристическая функция множества B. Таким образом, $A(B;P)$ — функция-счетчик, которая равна количеству индексов n, $1 \le n \le N$ таких, что $\vec{x}_n \in B$.

Пусть B — непустое семейство измеримых по Лебегу подмножеств единичного гиперкуба I^{κ}.

Определение 1.1. [6] Отклонением (*discrepancy*) множества точек P относительно семейства B называется величина, определенная соотношением

$$D_N(\mathrm{B}, P) = \sup_{B \in \mathrm{B}} \left| \frac{A(B;P)}{Card(P)} - \lambda_k(B) \right|, \qquad (1.2)$$

где $Card(P)$ обозначает мощность множества P, λ_k - k-мерная мера Лебега.

Заметим, что всегда $0 \le D_N(\mathrm{B};P) \le 1$.

Двум различным семействам B соответствуют два наиболее важных определения отклонения [12], [13], [6].

Определение 1.2. «Звездное» отклонение *(star-discrepancy)* $D_N^*(P) = D_N^*(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_N)$ для множества точек P определяется соотношением

$$D_N^*(P) = D_N(\mathrm{J}^*; P), \qquad (1.3)$$

где J^* — семейство всех подинтервалов единичного гиперкуба I^k вида

$$\mathrm{J}^* = \prod_{i=1}^{k} [0; u_i).$$

Определение 1.3. Экстремальное отклонение *(extremal discrepancy)* $D_N(P) = D_N(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_N)$ множества точек P определяется соотношением $D_N(P) = D_N(\mathrm{J}; P)$, где J — семейство всех подинтервалов единичного гиперкуба I^k вида $\mathrm{J} = \prod_{i=1}^{k} [u_i; v_i)$.

Приведем формальное определение (t,m,k)-сети. Введем понятие элементарного интервала.

Определение 1.4. Пусть $q \ge 2$ — основание позиционной системы счисления в поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Подмножество $E \subseteq I^k$ вида

$$E = \prod_{i=1}^{k} [a_i q^{-d_i}, (a_i + 1) q^{-d_i}), \qquad (1.4)$$

где $a_i, d_i \in \mathbb{Z}$, $d_i \ge 0$, $0 \le a_i < q^{d_i}$ для $1 \le i \le k$ называется элементарным интервалом по основанию q.

Определение 1.5. Пусть $0 \le t \le m$ — целые, тогда (t,m,k) - сетью по основанию q называется подмножество P единичного гиперкуба I^k, состоящее из q^m точек, такое, что $A(E,P) = q^t$ для любого элементарного интервала E по основанию q с $\lambda_k(E) = q^{t-m}$.

Схема 1.1. Общая схема построения (t, m, k)-сети.

Шаг 1. Задаются целые числа $m \ge 1$, $k \ge 1$.

Шаг 2. Выбирается основание системы счисления q и множество $\mathbb{Z}_q = \{0, 1, ..., q-1\}$.

Шаг 3. Выбирается R — коммутативное кольцо с единицей и $card(R) = q$.

Шаг 4. Задаются биекции

$$\psi_r : \mathbb{Z}_q \to R, \text{ где } 0 \le r \le m-1. \qquad (1.5)$$

Шаг 5. Задаются биекции

$$\eta_{ij} : R \to \mathbb{Z}_q, \text{ где } 1 \le i \le k \text{ и } 1 \le j \le m. \qquad (1.6)$$

Шаг 6. Задаются элементы кольца R

$$c_{jr}^{(i)} \in R,\ 1 \le i \le k,\ 1 \le j \le m, \text{ и } 0 \le r \le m-1. \qquad (1.7)$$

Шаг 7. Для $n = 0, 1, ..., q^m - 1$ определяются векторы $\vec{a}(n) = (a_0(n), ..., a_{m-1}(n))$, удовлетворяющие соотношению

$$n = \sum_{r=0}^{m-1} a_r(n) q^r, \qquad (1.8)$$

$\vec{a}(n)$ — представление числа n в традиционной системе счисления по основанию q.

Шаг 8. Определяются величины $x_n^{(i)}$:

$$x_n^{(i)} = \sum_{j=1}^{m} y_{nj}^{(i)} q^{-j}, \text{ для } 0 \le n < q^m \text{ и } 1 \le i \le k, \qquad (1.9)$$

где

$$y_{nj}^{(i)} = \eta_{ij}\left(\sum_{r=0}^{m-1} c_{jr}^{(i)} \psi_r\left(a_r(n)\right) \right) \in \mathbb{Z}_q, 0 \le n < q^m,$$
$$1 \le i \le k,\ 1 \le j \le m.$$

Шаг 9. Определяется множество точек $\{\vec{x}_n\}$

$$\vec{x}_n = \left(x_n^{(1)}, ..., x_n^{(s)}\right) \in I^k \text{ при } n = 0, 1, ..., q^m - 1. \qquad (1.10)$$

Для множества точек (1.10) справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. Пусть заданы целые числа t и m, $0 \le t \le m$. Предположим, что для целых чисел $d_1, d_2, ..., d_k \ge 0$, удовлетворяющих соотношению

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = m - t,$$

и любых элементов $f_j^{(i)}$ кольца R

$$f_j^{(i)} \in R,\ 1 \le j \le d_i,\ 1 \le i \le k,$$

система $m-t$ линейных уравнений над кольцом R:

$$\sum_{r=0}^{m-1} c_{jr}^{(i)} z_r = f_j^{(i)},\ 1 \le j \le d_i,\ 1 \le i \le k, \qquad (1.11)$$

относительно неизвестных $z_0, z_1, ..., z_{m-1}$ имеет ровно q^t решений.

Тогда множество точек (1.10) является (t,m,k)-сетью по основанию q.

Теорема 1.2. Звездное отклонение (t,m,k) - сети P по основанию q и $m>0$ удовлетворяет неравенству

$$ND_N^*(P) \le B(k,q)q^t(\ln N)^{k-1} + O\left(q^t(\ln N)^{k-2}\right), \qquad (1.12)$$

где, если $k=2$, $q=2$, или при $k=3,4$ и $q \ge 2$

$$B(k,q) = \left(\frac{q-1}{2\ln q}\right)^{k-1},$$

а иначе

$$B(k,q) = \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{[q/2]}{\ln q}\right)^{k-1}.$$

Доказательство теоремы приведено в [6], теорема 4.10.

Из соотношения (1.12) следует, что звездное отклонение для (t,m,k) - сетей удовлетворяет асимптотическому соотношению $D_N^*(P) = O\left(\frac{(\ln N)^{k-1}}{N}\right)$. Таким образом, с ростом размерности пространства свойства звездного отклонения (t,m,k) - сетей ухудшаются.

1.2. Канонические системы счисления

Ключевой идеей в схеме построения (t,m,k) – сети является использование представления данных в одномерных позиционных системах счисления. Канонические системы счисления представляют обобщение традиционных позиционных систем счисления с кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ для кольца целых алгебраических чисел в алгебраических расширениях поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Теория канонических систем счисления была предложена венгерскими математиками в 70-е годы 20 века [14] и получила дальнейшее развитие в исследованиях многих авторов [15], [16], [17], [18], [19], [20].

В данном подразделе приведены основные определения из теории канонических систем счисления.

Пусть Λ – решетка в $\mathbb{R}^\eta$, $\eta \in \mathbb{N}$, $M:\Lambda \to \Lambda$ — линейное отображение, такое, что $\det(M) \ne 0$ и D — конечное подмножество Λ, содержащее 0 ($D \subset \Lambda$, $card(D) < \infty$, $0 \in D$) и образующее полную систему вычетов $(\operatorname{mod} M)$.

Определение 1.6. Тройка (Λ, M, D) называется *системой счисления,* если любой элемент $\vec{x} \in \Lambda$ может быть единственным образом представлен в виде

$$\vec{x} = \sum\nolimits_{i=0}^{l} M^i \vec{d}_i, \qquad (1.13)$$

где $\vec{d}_i \in D$, $l \in \mathbb{N}$.

Оператор M при этом называется основанием системы счисления, а множество D — множеством цифр.

Далее будем рассматривать решетку $\Lambda = \mathbb{Z}^\eta$ и *каноническое* множество цифр $\tilde{D}$, заданное соотношением

$$\tilde{D} = \{a\vec{e} \mid \vec{e} = (1,0,0,\ldots,0) \in \mathbb{Z}^\eta,$$
$$a = 0,1,\ldots,|\det M|-1\}. \qquad (1.14)$$

Определение 1.7. Если множество цифр $\tilde{D}$ определено соотношением (1.14), система счисления $(\Lambda, M, \tilde{D})$ называется канонической системой счисления (КСС).

В случае, если $\Lambda = \mathbb{Z}^\eta$, элементы решетки Λ могут быть отождествлены с η-мерными векторами (с целочисленными координатами) и отображение M может быть отождествлено с матрицей $\mathbf{M}$ отображения в каноническом базисе решетки $\mathbb{Z}^\eta$.

Определение 1.8. Пусть тройка $(\mathbb{Z}^\eta, \mathbf{M}, \tilde{D})$ является системой счисления. Назовем вектор

$$\langle \vec{x} \rangle = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{l(x)})$$

КСС-кодом элемента $\vec{x} \in \mathbb{Z}^\eta$, если $\vec{x}$ может быть представлен в виде

$$\vec{x} = \sum\nolimits_{i=0}^{l} \xi_i \mathbf{M}^i \vec{e}\ . \qquad (1.15)$$

Для практического использования канонических систем счисления необходимо для матрицы $\mathbf{M}_f$ определить достаточные условия того, чтобы она могла являться основанием некоторой системы счисления $(\mathbb{Z}^\eta, \mathbf{M}, \tilde{D})$.

Справедлива следующая лемма, конструктивно описывающая основания канонических систем счисления в решетках различной размерности η.

Лемма 1.1 (Классы Ковача). Для множеств цифр $\tilde{D}$ вида (1.15) и различных η тройки $(\mathbb{Z}^\eta, \mathbf{M}_f, \tilde{D})$ являются системами счисления для следующих классов многочленов $f \in \mathbb{Z}[x]$:

$f_1 = x^\eta + c_1 x + q$, если и только если

$$-1 \le c_1 \le q-2,\ q \ge 2,\ q = p; \qquad (1.16)$$

$$f_2 = x^\eta + px^{\eta-1} + px^{\eta-2} + \ldots + px + p,\ 2 \le p \in \mathbb{N},$$
$$q = p; \qquad (1.17)$$

$$f_3 = x^\eta + x^{\eta-1} + x^{\eta-2} + \ldots + x + p,\ 2 \le p \in \mathbb{N},$$
$$q = p; \qquad (1.18)$$

$$f_4 = x^\eta + px^{\eta-1} + p^2 x^{\eta-2} + \ldots + p^{\eta-1}x + p^\eta,$$
$$2 \le p \in \mathbb{N},\ q = p^\eta. \qquad (1.19)$$

Доказательство леммы приведено в работе [16], утверждение 1.

Существование классов Ковача обуславливает возможность практического применения канонических систем счисления в решетках произвольной размерности.

Введем понятие фундаментальной области канонической системы счисления, аналога полуотрезка $[0,1)$ для традиционных позиционных систем счисления.

Пусть задана q-значная (q - простое) η-мерная каноническая система счисления $(\mathbb{Z}^\eta, \mathbf{M}, D)$. Предположим, что задано некоторое натуральное число Q, которое будем называть *разрешением*.

Рассмотрим множество $\Lambda \subset \mathbb{R}^\eta$, элементы которого $\vec{z} \in \Lambda$ единственным образом могут быть представлены в виде

$$\vec{z} = \vec{\rho} + \vec{\sigma}; \tag{1.20}$$

$$\vec{\rho} = \sum_{j=0}^{h(z)} a_j \mathbf{M}^j \vec{e};$$

$$\vec{\sigma} = \sum_{j=1}^{\eta Q} a_{-j} \mathbf{M}^{-j} \vec{e},$$

$$a_j \vec{e} \in \tilde{D}, \; j = (-\eta Q), (-\eta Q + 1), ..., l(\vec{z}).$$

В силу свойств канонической системы счисления $(\mathbb{Z}^\eta, \mathbf{M}, \tilde{D})$, множество Λ удовлетворяет равенству

$$\Lambda = \mathbf{M}^{-\eta Q} \mathbb{Z}^\eta. \tag{1.21}$$

Определение 1.9. Слагаемое $\vec{\rho}$ в сумме (1.20) назовем *регулярной* частью $\vec{z}$, слагаемое $\vec{\sigma}$ – *сингулярной*.

Определение 1.10. Множество всех точек

$$F_Q = \left[\sum_{j=1}^{\eta Q} a_j (\mathbf{M}^{-j} \vec{e}) \mid a_j \in \{0, 1, ..., q-1\} \right] \subseteq \mathbb{R}^\eta \tag{1.22}$$

будем называть фундаментальной областью канонической системы счисления с разрешением Q.

Замечание 1.1. Для любого $Q \geq 1$ справедливо включение

$$F_{Q+1} \subset F_Q.$$

Замечание 1.2. Если вместо канонической системы счисления использовать традиционную позиционную систему счисления, то фундаментальная область F_Q канонической системы счисления, определенная с помощью соотношения (1.27), будет являться множеством рациональных чисел из отрезка $[0,1)$ со знаменателем q^Q.

2. Канонические (t, m, k)-сети

2.1. Основная идея

Центральное место в определении (t, m, k) – сетей занимает понятие элементарного интервала. Попробуем дать определение этому понятию с иной точки зрения. Множество E (определение 1.4) может быть задано следующим образом.

Рассмотрим точки полуотрезка $[0,1)$. В позиционной системе счисления по основанию q они могут быть представлены в виде

$$w = \sum_{j=0}^{\infty} w_j q^{-j-1}, \; w_j \in \{0, 1, ..., q-1\}.$$

Пусть далее задано k чисел $a^{(i)}$, $0 \leq i \leq k$, $0 \leq a^{(i)} < q^{d_i}$. Будем считать, что для чисел $a^{(i)}$ известно их представление в q-значной системе счисления:

$$a^{(i)} = \sum_{j=0}^{d_i} a_j^{(i)} q^j.$$

Тогда числа, принадлежащие одномерному i-му элементарному интервалу (1.4) $[a^{(i)} q^{-d_i}, (a^{(i)}+1) q^{-d_i})$, могут быть представлены в виде

$$w = \sum_{j=0}^{d_i - 1} a_j^{(i)} q^{d_i - 1 - j} + \sum_{j=d_i}^{\infty} w_j q^{j-1}.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение, которое приведем без формального доказательства.

Лемма 1.2. Множество E, заданное соотношением

$$E = \prod_{i=1}^{k} W(a^{(i)}, d_i), \tag{2.1}$$

где

$$W(a^{(i)}, d_i) = \left\{ w \mid w = \sum_{j=0}^{d_i - 1} a_j^{(i)} q^{d_i - 1 - j} + \sum_{j=d_i}^{\infty} w_j q^{j-1} \right\}, \tag{2.2}$$

$1 \leq i \leq k$,

$a^{(i)}, d_i \in \mathbb{Z}$, $d_i \geq 0$, $0 \leq a^{(i)} < q^{d_i}$, $\prod$ - обозначает декартово произведение множеств, является элементарным интервалом по основанию q (определение 1.4).

Заметим, что, согласно новому определению элементарного интервала, данное множество полностью определяется наборами цифр в представлениях целых чисел $a^{(i)}$ в q-значной системе счисления (формальными *цифровыми кодами* для чисел $a^{(i)}$).

Определение 2.1. Будем называть *q – кодом числа* a (и писать $\langle a \rangle_q$) цифровой вектор его разложения в традиционной q-значной системе счисления:

$$\langle a \rangle_q = (a_0, a_1, ..., a_{d-1}).$$

Использование теории q-значных канонических систем счисления позволяет обобщить понятие элементарного интервала для подмножества фундаментальной области канонической системы счисления.

Определение 2.2. Будем называть элементарным цилиндрическим множеством множество $W(a, d)$, удовлетворяющее соотношению

$$W(a, d) = \left\{ \vec{w} \mid \vec{w} = \sum_{j=1}^{d} a_{j-1} (\mathbf{M}^{-j} \vec{e}) + \sum_{j=d+1}^{Q} w_j (\mathbf{M}^{-j} \vec{e}) \right\}, \tag{2.3}$$

где $w_j \in \{0,1,...,q-1\}$, цифры $a_0, a_1, ..., a_{d-1}$ фиксированы.

Конечное объединение элементарно-цилиндрических множеств назовем *цилиндрическим множеством*.

Замечание 2.1. Любое подмножество $C \subset F_Q$ является цилиндрическим множеством.

Определение 2.3. *Обобщенным элементарным интервалом* назовем подмножество $E_{CNS} \subset F_Q^k$, определенное соотношением

$$E_{CNS} = \prod_{i=1}^{k} W\left(a^{(i)}, d_i\right),$$

где $W(a^{(i)}, d_i)$ — элементарное цилиндрическое множество (2.3) в F_Q, $a^{(i)}, d_i \in \mathbb{Z}$, $d_i \geq 0$, $0 \leq a^{(i)} < q^{d_i}$, $1 \leq i \leq k$.

Определим на фундаментальной области F_Q канонической системы счисления функцию множества μ следующим образом: положим значение μ на элементарно-цилиндрическом множестве $W(a,d) \subseteq F_Q$ равным

$$\mu(W(a;d)) = q^{-d}.$$

Для цилиндрического множества определим значение функции μ как сумму значений функции μ, вычисленных для непересекающихся элементарно-цилиндрических множеств, его составляющих:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{l} W(a^{(i)}, d_i)\right) = \sum_{i=1}^{l} q^{-d_i}, \tag{2.4}$$

$$i_1 \neq i_2 \Rightarrow W(a^{(i_1)}, d_{i_1}) \cap W(a^{(i_2)}, d_{i_2}) = \varnothing,$$

$$\mu(F_Q) = 1. \tag{2.5}$$

Пусть определена q-значная η-мерная каноническая система счисления $(\mathbb{Z}^\eta, \mathbf{M}, D)$, задано разрешение $Q > 0$ и определено множество F_Q^k соотношением

$$F_Q^k = \prod_{i=1}^{k} F_Q. \tag{2.6}$$

Множество F_Q^k является аналогом k-мерного единичного гиперкуба.

Определим на множестве F_Q^k функцию множеств μ_k, для чего рассмотрим подмножество $C \subset F_Q^k$ вида

$$C = \prod_{i=1}^{k} C^{(i)},$$

где $C^{(i)}$ (замечание 2.1) является цилиндрическим множеством, и положим значение функции $\mu_k(C)$ равным

$$\mu_k(C) = \mu_k\left(\prod_{i=1}^{k} C^{(i)}\right) = \prod_{i=1}^{k} \mu(C^{(i)}). \tag{2.7}$$

Здесь μ - функция, определенная соотношением (2.4).

В силу конечности множества F_Q^k, произвольное множество $\bar{C} \subset F_Q^k$ может быть представлено в виде конечного объединения непересекающихся прямоугольных множеств $\bar{C} = \bigcup_i C_i$, $\mu_k(\bar{C}) = \sum_i \mu_k(C_i)$.

Справедливо следующее соотношение:

$$\mu_k(F_Q^k) = 1. \tag{2.8}$$

Введенная функция множеств μ_k и понятие обобщенного элементарного интервала позволяют ввести определение канонической (t,m,k) - сети.

<u>2.2. Формальное определение</u>

Пусть заданы целые числа $t, m \in \mathbb{Z}$ и выполняются неравенства $0 \leq t \leq m \leq Q$.

Определение 2.4. Назовем *канонической* (t,m,k) *- сетью по основанию* $q = \det \mathbf{M}$ подмножество P множества F_Q^k, $P \subseteq F_Q^k$, состоящее из q^m точек, такое что $A(E_{CNS}, P) = q^t$ для любого обобщенного элементарного интервала E_{CNS} меры $\mu_k(E_{CNS}) = q^{t-m}$.

Справедлива схема построения канонической (t,m,k) - сети, аналогичная схеме 1.1 с заменой на шаге №8 соотношения (1.9) соотношением (2.10).

Пусть, аналогично схеме 1.1, заданы целое число $m \geq 1$, размерность $k \geq 1$ и основание системы счисления $q = |\det \mathbf{M}| \geq 2$. Пусть далее $\mathbb{Z}_q$, R, ψ_r ($0 \leq r \leq m-1$), η_{ij} ($1 \leq i \leq k$ и $1 \leq j \leq m$), $c_{jr}^{(i)} \in R$ ($1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq m$, и $0 \leq r \leq m-1$) заданы в соответствии с определением 1.17.

Пусть для всех $n = 0,1,...,q^m - 1$ определены элементы $a_r(n)$ разложения числа n:

$$n = \sum_{r=0}^{m-1} a_r(n) q^{m-1-r}, \tag{2.9}$$

$\langle n \rangle_q = (a_0(n), a_1(n), ..., a_{m-1}(n))$ в традиционной $q-$значной позиционной системе счисления.

Определим множество точек $P = \{\vec{x}_n\}$, $\vec{x}_n = \left(x_n^{(1)}, ..., x_n^{(k)}\right) \in I^{\kappa k}$, $n = 0,1,...,q^m - 1$ соотношениями

$$\vec{x}_n^{(i)} = \sum_{j=1}^{m} y_{nj}^{(i)} \mathbf{M}^{-j} \vec{e}, \; 0 \leq n < q^m \text{ и } 1 \leq i \leq k, \tag{2.10}$$

где

$$y_{nj}^{(i)} = \eta_{ij}\left(\sum_{r=0}^{m-1} c_{jr}^{(i)}\psi_r\left(a_r(n)\right)\right) \in \mathbb{Z}_q,\ 0 \le n < q^m,$$

$$1 \le i \le k,\ 1 \le j \le m. \qquad (2.11)$$

Теорема 2.1. Пусть заданы целые числа t, m, $0 \le t \le m$, и для целых чисел $d_1, d_2, ..., d_k \ge 0$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = m - t,$$

и любых элементов $f_j^{(i)}$ кольца R

$$f_j^{(i)} \in R,\ 1 \le j \le d_i,\ 1 \le i \le k$$

система $m-t$ линейных уравнений над областью целостности R

$$\sum_{r=0}^{m-1} c_{jr}^{(i)} z_r = f_j^{(i)},\ 1 \le j \le d_i,\ 1 \le i \le k$$

относительно неизвестных $z_0, z_1, ..., z_{m-1}$ имеет ровно q^t решений.

Тогда множество точек (2.10) является канонической (t, m, k) - сетью по основанию q в канонической q-значной системе счисления $(\mathbb{Z}^\eta, \mathbf{M}, D)$.

Доказательство. Пусть заданы $a^{(i)}, d_i \in \mathbb{Z}$, $d_i \ge 0$, $0 \le a^{(i)} < q^{d_i}$, $1 \le i \le k$, $\sum_{i=1}^{k} d_i = m - t$. Пусть далее заданы элементы $q-$кодов чисел $a^{(i)}$.

$$\left\langle a^{(i)} \right\rangle_q = (a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, ..., a_{d_i-1}^{(i)}),\ 1 \le i \le k,\ 0 \le j \le d_i - 1.$$

Рассмотрим обобщенный элементарный интервал $E_{CNS} \subseteq F_Q^k$.

$$E_{CNS} = \prod_{i=1}^{k} W(a^{(i)}, d_i),$$

где

$$W(a^{(i)}, d_i) =$$
$$= \left\{ w \mid w = \sum_{j=0}^{d_i-1} a_j^{(i)}\left(\mathbf{M}^{-d_i-1-j}\vec{e}\right) + \sum_{j=d_i}^{\kappa Q-1} w_j\left(\mathbf{M}^{-j-1}\vec{e}\right) \right\}.$$

Для точек (2.10) будем иметь $\vec{x}_n \in E_{CNS}$ тогда и только тогда, когда

$$y_{nj}^{(i)} = a_j^{(i)}, \qquad 1 \le j \le d_i,\ 1 \le i \le k,$$

что, в силу (2.11), эквивалентно системе равенств

$$\sum_{r=0}^{m-1} c_{jr}^{(i)}\psi_r(a_r(n)) = \eta_{ij}^{-1}(a_j^{(i)}) \text{ для } 1 \le j \le d_i,\ 1 \le i \le k. \quad (2.12)$$

Система (2.12) может быть интерпретирована как система уравнений над кольцом R относительно неизвестных $\psi_r(a_r(n))$, $0 \le r \le m-1$. Согласно предположению теоремы, данная система имеет ровно q^t решений.

Каждое i-ое решение системы (2.12) соответствует единственному цифровому q - вектору

$$\left\langle n^{(i)} \right\rangle = (a_0(n^{(i)}), ..., a_{m-1}(n^{(i)})),\ i = 0, 1, .., q^t - 1. \qquad (2.13)$$

С другой стороны, по определению канонической системы счисления, каждому цифровому $q-$вектору соответствует единственный элемент $\vec{x}_{n^{(i)}} \in P \subseteq F_Q$.

Таким образом, $A(E_{CNS}, P) = q^t$. Теорема доказана.

Определение 2.5. Пусть $E_{CNS} = \prod_{i=1}^{k} W(a^{(i)}, d_i)$. Назовем каноническим аффинным преобразованием биекцию $T : E_{CNS} \to F_Q^k$, удовлетворяющую соотношениям

$$T\left(\prod_{i=1}^{k} W(a^{(i)}, d_i)\right) = \prod_{i=1}^{k} T^{(i)}\left(W(a^{(i)}, d_i)\right), \qquad (2.14)$$

$$T^{(i)}\left(\left\{\sum_{j=0}^{d_i-1} a_j^{(i)}\left(\mathbf{M}^{d-1-j}\vec{e}\right) + \sum_{j=d_i+1}^{kQ} w_j\left(\mathbf{M}^{-j}\vec{e}\right)\right\}\right) =$$
$$= \left\{\sum_{j=1}^{kQ-d_i} w_{j+d_1}\left(\mathbf{M}^{-j}\vec{e}\right)\right\}. \qquad (2.15)$$

Замечание 2.2. Очевидно, что для преобразования T, заданного равенствами (2.14) и (2.15), однозначно определено обратное преобразование $T^{-1} : F_{Q'}^k \to E_{CNS}$, где $Q' = \min_i(Q - d_i)$.

Лемма 2.2. Пусть P — каноническая (t, m, k) - сеть в F_Q^k по основанию q. Пусть далее $E_{CNS} \subseteq F_Q^k$ — обобщенный элементарный интервал меры $\mu_k(E_{CNS}) = q^{-u}$, где $0 \le u \le m - t$, и пусть T — каноническое аффинное преобразование $T : E_{CNS} \to F_Q^k$. Тогда точки множества P, принадлежащие интервалу E_{CNS}, в результате преобразования T образуют каноническую $(t, m-u, k)$ - сеть в F_Q^k по основанию q.

Доказательство. По определению канонической (t, m, k) - сети, для $E_{CNS} \subset F_Q^k$ меры $\mu_k(E_{CNS}) = q^{-u}$ справедливо равенство

$$A(E, P) = q^{m-u}.$$

Если применить к точкам множества P, принадлежащим интервалу E_{CNS}, преобразование T, определенное соотношениями (2.14) – (2.15), то получим множество P', содержащее q^{m-u} точек F_Q^k.

Рассмотрим обобщенный элементарный интервал $E_{CNS}' \subset F_Q^k$ со значением функции μ_k

$$\mu_k(E_{CNS}') = q^{t-m+u}.$$

Заметим, что если $\vec{x} \in E_{CNS}$, то $T(\vec{x}) \in E^{'}_{CNS}$ тогда и только тогда, когда $\vec{x} \in T^{-1}(E^{'}_{CNS})$. Далее заметим, что по построению $T^{-1}(E')$ является элементарным обобщенным интервалом, причем $\mu_k(T^{-1}(E^{'}_{CNS})) = q^{t-m}$.

Поэтому так как $A(T^{-1}(E^{'}_{CNS}), P) = q^t$, то $A(E^{'}_{CNS}, P) = q^t$. Лемма доказана.

2.3. Понятие КСС-отклонения

В силу свойств канонической системы счисления $(\mathbb{Z}^\eta, \mathbf{M}, \tilde{D})$, множество Λ удовлетворяет равенству

$$\Lambda = \mathbf{M}^{-\eta Q}\mathbb{Z}^\eta . \tag{2.16}$$

Сложная конфигурация множества F_Q^k (см. [21]) не позволяет использовать его подмножества в реальных вычислительных задачах. Следующая лемма, описывающая его свойства, обуславливает возможности его практического использования.

Лемма 2.3. Пусть задано разрешение $Q \in \mathbb{N}$ и выбрана каноническая система счисления $(\mathbb{Z}^\eta, \mathbf{M}, D)$, порожденная одним из трех классов многочленов (p - простое):

— многочленами (1.22)

$$f_2 = x^\eta + px^{\eta-1} + px^{\eta-2} + ... + px + p,\ 2 \le p \in \mathbb{N};$$
$$(q = p),\ Q \in \mathbb{N},$$

— многочленами (1.21) при $c_1 = 0$

$$f_1 = x^\eta + p,\ p \ge 2;\ (q = p),\ Q \in \mathbb{N},$$

— многочленами (1.24)

$$f_2 = x^\eta + px^{\eta-1} + p^2x^{\eta-2} + ... + p^{\eta-1}x + p^\eta,$$
$$2 \le p \in \mathbb{N},\ (q = p^k),$$
$$Q = n \cdot \text{НОК}(\eta, \eta+1)/\eta,\ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда множество $\Lambda = \mathbf{M}^{-\eta Q}\mathbb{Z}^\eta$ удовлетворяет соотношению

$$\Lambda = q^{-Q}\mathbb{Z}^\eta . \tag{2.17}$$

Доказательство данной леммы можно найти в работе [22].

Предположим, что выполнены условия леммы 2.4. Тогда, если рассматривать фундаментальную область F_Q как подмножество тора $\frac{1}{q^Q}\mathbb{Z}^\eta / \mathbb{Z}^\eta$ и в качестве элементов соответствующих классов эквивалентности взять наименьшие неотрицательные элементы, то справедливо соотношение

$$F_Q^k = \left(\frac{1}{q^Q}\mathbb{Z}^\eta \cap [0,1)^\eta\right)^k \simeq \frac{1}{q^Q}\mathbb{Z}^{k\eta} \cap [0,1)^{k\eta} .$$

Таким образом, множество F_Q^k может быть интерпретировано как аналог ηk -мерного единичного гиперкуба $[0,1)^{\eta k}$.

Исследование подмножеств множества F_Q^k в терминах отклонений D или D^* является весьма сложной задачей, поэтому для исследования свойств канонических (t, m, k) - сетей определим *КСС-отклонение* $D_N^{CNS}(P)$, аналог звездного отклонения, ассоциированный с фундаментальной областью канонической системы счисления.

Сначала определим на множестве элементов фундаментальной области F_Q *лексикографический порядок.*

Определение 2.6. Пусть $\vec{h}, \vec{z} \in F_Q$,

$$\vec{z} = \sum_{j=1}^{\eta Q} z_j(\mathbf{M}^{-j}\vec{e}), \quad \vec{h} = \sum_{j=1}^{\eta Q} h_j(\mathbf{M}^{-j}\vec{e}) .$$

Будем говорить, что элемент $\vec{h}$ *предшествует* элементу $\vec{z}$ и обозначать

$$\vec{h} \prec \vec{z} ,$$

если существует такое целое $1 \le n \le \eta Q$, что выполняются соотношения:

$$h_1 = z_1, ..., h_{n-1} = z_{n-1};\quad h_{n-1} \le z_{n-1} .$$

Определение 2.7. Обобщая понятие угла для двумерных решеток, введенное впервые в работе [22], множество всех предшественников элемента $\vec{z} \in F_Q$ будем называть *углом* $\Gamma(\vec{z})$, а элемент $\vec{z}$ - *вершиной угла*. Таким образом,

$$\Gamma(\vec{z}) = \{\vec{h} \mid \vec{h} \in F_Q, \vec{h} \prec \vec{z}\} .$$

Для угла $\Gamma(\vec{z})$ с вершиной $\vec{z}$ через $\Gamma^{(n)}(\vec{z})$, $n \le Q$, будем обозначать угол с вершиной $\vec{z}^{(n)}$, такой, что выполняются соотношения $z_j = z_j^{(n)}$, для всех $1 \le j \le n$, $n \le Q$.

$$\vec{z}^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{M} z_j \vec{e} .$$

Определение 2.8. Для множества $P \subseteq F_Q$, $Card(P) = N$ определим КСС-отклонение следующим образом:

$$D_N^{CNS}(P) = \max_{\Gamma \in I_Q^{CNS}} \left| \frac{A(\Gamma; P)}{N} - \mu(\Gamma) \right| , \tag{2.18}$$

где I_Q^{CNS} - множество всех углов $\Gamma(\vec{z})$, $\vec{z} \in F_Q$, отвечающих рассматриваемой фундаментальной области F_Q канонической системе счисления, $A(\Gamma; P)$ — количество элементов множества P, принадлежащих углу Γ.

Теперь обобщим понятие *КСС*-отклонения на многомерный случай.

Определение 2.9. Назовем k-мерным полиуглом множество $J \subset F_Q^k$ вида

$$J = \prod_{i=1}^{k} \Gamma(\vec{z}^{(i)}), \qquad (2.19)$$

где $\Gamma(\vec{z}^{(i)})$ — угол в F_Q, $z^{(i)} \in F_Q$, $i = 1, 2, ..., k$.

Определение 2.10. Пусть задано множество $P \subset F_Q^k$, $Card(P) = N$. Назовем $k-$мерным КСС-отклонением множества P величину, определенную соотношением

$$D_N^{CNS}(P) = \max_{J \in I_{Q,k}^{CNS}} \left| \frac{A(J;P)}{N} - \mu_k(J) \right|, \qquad (2.20)$$

где $I_{Q,k}^{CNS}$ — множество всех k-мерных полиуглов $J \subseteq F_Q^k$.

3. Свойства бинарных канонических (t,m,k)-сетей

Докажем теорему, устанавливающую соотношение для КСС-отклонения канонической (t, m, k) - сети в наиболее важном для практики случае бинарной канонической (t, m, k) - сети.

Теорема 2.2. k-мерное *КСС*-отклонение канонической (t, m, k) - сети P в F_Q^k по основанию $q = 2$ удовлетворяет соотношению

$$ND_N^{CNS}(P) \le 2^t \sum_{i=0}^{k-1} \binom{m-t}{i}. \qquad (3.1)$$

Здесь $\binom{r}{n} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ – биномиальный коэффициент.

Доказательство. Пусть J — произвольный полиугол в F_Q^k. Определим величину $D(J, P)$ соотношением

$$D(J;P) = A(J;P) - N\mu_k(J), \; N = Card(P). \qquad (3.2)$$

Предположим, что правая часть выражения (3.1) имеет вид

$$\Delta_2(t, m, k) = 2^t H(m, k). \qquad (3.3)$$

Зависимостью $H(m,k)$ от t в (3.3) намеренно пренебрегаем.

Для доказательства теоремы используем двойную математическую индукцию по $k \ge 1$ и $m \ge t$. Докажем выполнение неравенства (3.1) при $k = 1$ и $m \ge t$.

При $k = 1$ полиугол J вырождается в угол $\Gamma(\vec{z})$, $\vec{z} \in F_Q$. Разобьем угол $\Gamma(\vec{z})$ на n непересекающихся обобщенных интервалов W_h, $h = 0, 1, ..., n$:

$$\Gamma(\vec{z}) = \bigcup_{h=0}^{n} W_h,$$

$$h_1 \ne h_2 \Rightarrow W_{h_1} \cap W_{h_2} = \varnothing.$$

При разбиении используем следующее правило:

$$W_h = W(h, m-t), \; h = 0, 1, ..., n-1,$$

$$W_n = \{\vec{w} \mid \vec{w} \in W(n, m-t) \cap \Gamma(\vec{z})\}.$$

Здесь $W(a; d)$ — обобщенный элементарный одномерный интервал, $n-$минимальное целое число, такое, что $W(n, m-t) \not\subset \Gamma(\vec{z})$.

Таким образом, по определению обобщенной $(t, m, 1)$ - сети, для $(t, m, 1)$ - сети P справедливы равенства

$$D(W_h; P) = 0, \; h = 0, 1, ..., n-1,$$

$$D(\Gamma(\vec{z}); P) = D(W_n; P).$$

Далее, так как

$$0 \le A(W_n; P) \le 2^t,$$

и

$$0 \le 2^m \mu(W_n) \le 2^t,$$

то

$$|D(\Gamma(\vec{z}); P)| \le 2^t.$$

Отсюда следует, что

$$ND_N^{CNS}(P) \le 2^t. \qquad (3.4)$$

Так как $\Delta_2(t, m, 1) = 2^t$, из (3.4) следует неравенство

$$ND_N^{CNS}(P) \le \Delta_2(t, m, 1).$$

Таким образом, проверено выполнение соотношения (3.1) для $k = 1$.

Пусть $k \ge 2$. Предположим, что неравенство (3.1) выполняется для размерности $k-1$ и для всех $m \ge t$. Индукцией по $m \ge t$ докажем, что соотношение (3.1) выполняется для размерности k.

Проверим выполнение соотношения при $m = t$. Тривиально получаем

$$ND_N^{CNS}(P) \le N = 2^t = \Delta_2(t, t, k).$$

Пусть соотношение (3.1) справедливо для некоторого $m \ge t$. Рассмотрим каноническую $(t, m+1, k)$ - сеть по основанию 2. Необходимо показать, что

$$|D(J; P)| \le \Delta_2(t, m+1, k).$$

Рассмотрим произвольный полиугол

$$J = \prod_{i=1}^{k} \Gamma(\vec{z}^{(i)}) \subseteq F_Q^k$$

и возможные значения элемента $\vec{z}^{(k)}$.

Случай А. Пусть $\Gamma(\vec{z}^{(k)}) = F_Q$, то есть $\forall \vec{w} \in F_Q$, $\vec{w} \prec \vec{z}^{(k)}$.

Тогда рассмотрим отображение

$T: F_Q^k \to F_Q^{k-1}$, $T(v_1,...,v_k)=(v_1,...,v_{k-1})$ для $(v_1,v_2,...,v_k)\in F_Q^k$.

Это отображение преобразует сеть P в каноническую $(t,m+1,k-1)$ - сеть P_1 по основанию 2. Так как для неё величина (3.2) удовлетворяет соотношению

$$D(J,P) = D(T(J);P_1),$$

то, по предположению индукции, имеем

$$|D(J,P)|=|D(T(J),P_1)|\le \Delta_2(t,m+1,k-1).$$

Так как $\Delta_2(t,m+1,k-1)\le \Delta_2(t,m+1,k)$, то для *случая А* неравенство (3.1) доказано.

Случай Б. Пусть $\Gamma(\vec{z}^{(k)})\subset F_Q$, то есть существует $\vec{z}\in F_Q$ такой, что $\vec{z}\notin \Gamma(\vec{z}^{(k)})$.

Случай Б.1. Предположим, что

$$W(0,1)\not\subset \Gamma(\vec{z}^{(k)}).$$

Тогда положим

$$J_n=\prod_{i=1}^{k-1}\Gamma(z^{(i)})\times\Gamma(\vec{z}^{(k)}),\ n=0.$$

Случай Б.2. Если

$$W(0,1)\subset \Gamma(\vec{z}^{(k)}),$$

то положим

$$J_h=\prod_{i=1}^{k-1}\Gamma(z^{(i)})\times W(0,1),\ h=0,$$

$$J_n=\prod_{i=1}^{k-1}\Gamma(\vec{z}^{(i)})\times\left\{\vec{w}|\ \vec{w}\in \Gamma(\vec{z}^{(k)})\setminus W(0,1)\right\},\ n=1.$$

Для *случаев Б.1 и Б.2* справедливо соотношение

$$D(J;P)=\sum_{h=0}^{n}D(J_h;P). \tag{3.5}$$

Рассмотрим множества $E_n = F_Q^{k-1}\times E(n,1)$. Пусть T_n — каноническое аффинное преобразование E_n в F_Q^k. Согласно лемме 2.2., преобразование T_n преобразует точки сети P, принадлежащие множеству E_n, в $(t,m,k-1)$ - сеть P_2 по основанию 2. Далее, так как $D(J_n;P)=D(T_n(J_n);P_2)$, то, по предположению индукции, имеем

$$|D(J_n;P)|\le \Delta_2(t,m,k). \tag{3.6}$$

В случае $n>0$, для $0\le h<n$, проекция $T: F_Q^k \to F_Q^{k-1}$ преобразует точки сети P, принадлежащие $E_h = F_Q^{k-1}\times E(h,1)$, в $(t,m,k-1)$ - сеть $P_3^{(h)}$ по основанию 2. Далее, так как $D(J_h;P)=D(T(J_h);P_3^{(h)})$, то по гипотезе индукции получаем неравенство

$$|D(J_h;P)|\le \Delta_2(t,m,k-1)\ \text{для}\ 0\le h<n. \tag{3.7}$$

Из соотношений (3.5), (3.6) и (3.7) получим оценку $D(J,P)$ сверху, соответствующую $n>0$:

$$|D(J;P)|\le \Delta_2(t,m,k)+\Delta_2(t,m,k-1).$$

Рассмотрим правую часть последнего соотношения.

$$\begin{aligned}
&\Delta_2(t,m,k)+\Delta_2(t,m,k-1)=\\
&=2^t\left(H(m,k)+H(m,k-1)\right)\le\\
&\le 2^t\left(\sum_{i=0}^{k-1}\binom{m-t}{i}^i+\sum_{i=0}^{k-1}\binom{m-t}{i-1}^i\right)=\\
&=2^t\sum_{i=0}^{k-1}\binom{m+1-t}{i}=\\
&=2^t H(m+1,k)=\\
&=\Delta_2(t,m+1,k).
\end{aligned}$$

Так как *случаи А и Б* являются исчерпывающими, то, в соответствии с принципом математической индукции, приходим к утверждению теоремы.

Выразим правую часть соотношения (3.1) в виде суммы по степеням $(m-t)$, $m>t$. Тогда соотношение (3.1) примет вид:

$$ND_N^{CNS}(P)\le \frac{2^t}{(k-1)!}(m-t)^{k-1}+O(2^t(m-t)^{k-2})$$

или

$$\begin{aligned}
&ND_N^{CNS}(P)\le \frac{2^t}{(k-1)!}\left(\frac{1}{\ln 2}\right)^{k-1}\times\\
&\times\left(\ln N\right)^{k-1}+O(2^t(\ln N)^{k-2}).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Заметим, что каноническая (t,m,k) - сеть соответствует множеству точек единичного куба в пространстве размерности ηk, где η - произвольное натуральное число. Сравнивая соотношение (1.12) с соотношением (3.8), мы видим, что *КСС*-отклонение для канонической (t,m,k) - сети не зависит от размерности канонической системы счисления η. Таким образом, для заданного k можно построить каноническую (t,m,k) - сеть в пространстве размерности ηk, КСС-отклонение которой зависит только от k и не изменяется с ростом размерности.

Заключение

В работе предложен новый метод синтеза многомерных множеств точек с низким отклонением. Предложенное понятие канонических (t,m,k) - сетей позволяет синтезировать такие множества произвольной размерности. Значения КСС-отклонения для канонических (t,m,k) - сетей, подмножества точек единичного гиперкуба размерности ηk не зависят от размерности η используемой канонической системы счисления.

Предложенный метод может быть использован и для обобщения других методов синтеза множеств с низким отклонением, основанных на использовании представления чисел в позиционных системах счисления.

Исследование соответствия КСС-отклонения и классического звездного отклонения является предметом дальнейших исследований.

Литература

1. **Ермаков, С. М.** Метод Монте-Карло и смежные вопросы / С.М. Ермаков. - М., 1971.
2. **Соболь, И. М.** Численные методы Монте-Карло / И.М. Соболь - М., 1973.
3. **Metropolis, N., Ulam, S.** The Monte Carlo Method, J. Amer. statistical assoc. 1949 44 № 247 335—341.
4. **Кнут, Д.** Получисленные алгоритмы / Д. Кнут. - Искусство программирования. Том 2. Получисленные методы = The Art of Computer Programming, vol.2. Seminumerical Algorithms. — 3-е изд. — М.: «Вильямс», 2007. – С. 832.
5. **Rubinstein, R.Y.** Simulation and the Monte Carlo Method (second edition) / R. Y. Rubinstein, D.P. Kroese. - New York: John Wiley & Sons, 2007.
6. **Niederreiter, H.** Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods / H. Niederreiter. - SIAM, Philadelphia, 1992.
7. **Tezuka, Sh.** Financial Applications of Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo methods / Shu Tezuka // Random and Quasi-Random Point Sets, P. Hellekalek, G. Larcher, Eds, Lecture notes in statistics, 138. - Springer, 1998.
8. **Keller, A.** Myths of Computer Graphics / A. Keller // H. Niederreiter and D. Talay, eds. Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2004, pp. 217-243. - Springer, 2006.
9. **Drmota, D.** Sequences, Discrepancies and Applications / D. Drmota, R. F. Tichy // Lecture Notes in Mathematics, vol 1651. - Berlin: Springer, 1998.
10. **Faure, H.** Discrepancy and diaphony of digital (0,1)-sequences in prime base/ H. Faure // Acta Arith, 117, pp. 125–148, 2005.
11. **Ninomiya, S.** Constructing a new class of low-discrepancy sequences by using the β-adic transformation/ S. Ninomiya // Mathematics and Computers in Simulation, Vol. 47, 2, pp. 403 – 418. – Elsevier, 1998.
12. **Кейперс, Л.** Равномерное распределение последовательностей: / Л. Кейперс, Г. Нидеррейтер пер. с англ., под ред. С.М. Ермакова. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1985 – 408 с.
13. Random and Quasi-Random Point Sets / P. Hellekalek, G. Larcher, Eds // Lecture notes in statistics, 138. - Springer, 1998.
14. **Kátai, I.** Canonical number systems in imaginary quadratic fields / I. Kátai, B. Kovács // Acta Mathematica Academiae Scientarium Hungaricae. 37 (1-3), 1981, pp. 159-164.
15. **Kátai, I.** Generalized Number Systems in Euclidean Spaces / **I. Kátai //** Mathematical and Computer Modeling, 38, 2003, pp. 883-892.
16. **Kovács, A.** Generalized binary number systems / A. Kovács // Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. 20, 2001, pp. 195-206.
17. **Kovács, A.** On number expansions in lattices / A. Kovács // Proc. 5th Internation Conference on Applied Informatics. - Eger, Hungary, 2001.
18. **Kovács, B.** Canonical number systems in algebraic number fields / B. Kovács // Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 37 (1981), pp. 405-407.
19. **Akiyama, S.** New criteria for canonical number systems / S. Akiyama, H. Rao// Acta Arithm., 111 (2004), pp. 5—25.
20. **Kovács, B.** Canonical number systems in algebraic number fields / B. Kovács // Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 37 (1981), 405-407.
21. **Калугин А.Н.**, Генератор LSFR-CNS: аналитическое исследование равномерности распределения / А.Н. Калугин // Компьютерная оптика. В. 31. – Самара, Институт систем обработки изображений РАН, 2007.
22. **Калугин, А.Н.** Разработка и исследование многомерных генераторов равномерно распределенных псевдослучайных векторов, основанных на представлении данных в алгебраических полях / А.Н. Калугин. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Рукопись.
23. **Chernov, V.M.** Fast uniform distribution of sequences for fractal sets / V. M. Chernov // Proceedings of International Conference on Computer Vision and Graphics, 2004, September 22-24, 2004, Warsaw, Poland, Computational IMAGING AND VISION SERIES. - Kluwer Academic Press.

В редакцию поступила 04.03.2009г.

ALTERNATIVE METHOD FOR SYNTHESIS OF MULTIDIMENSIONAL LOW-DISCREPANCY POINT SETS

A.N. Kalouguine[1] (Ph.D, researcher, alexklg@nm.ru*),*
N.A. Kalugin[2] (Ph.D., assistant professor, nick.kalugin@gmail.com*),*
[1]Image Processing Systems Institute of RAS
[2]Samara State Aerospace University

Abstracts

Modern approaches to solving the problems of the photorealistic image synthesis are based on use of the quasi-Monte Carlo methods. Effectiveness of these methods is based on the properties of the multidimensional point sets. The existing synthesis methods generate the low-discrepancy multidimensional point sets with the discrepancy growing as the number of dimensions of the used space grows. In the paper the authors suggest an alternative synthesis method that is based on use of canonical number systems. It is shown, that the suggested approach allows in certain sense to get over the 'curse of dimensionality'.

Key words: photorealistic image synthesis, low-discrepancy point sets, canonical number systems.

Citation: Kalouguine AN, Kalugin NA. Alternative method for synthesis of multidimensional low-discrepancy point sets. Computer Optics 2009; 33(1): 91-100.

References

[1] Ermakov SM. The Monte-Carlo method and associated issues [In Russian]. Moscow; 1971.
[2] Sobol IM. Numerical Monte-Carlo methods [In Russian]. Moscow; 1973.
[3] Metropolis N, Ulam S. The Monte Carlo Method. J Amer statistical assoc 1949; 44(247): 335-41.
[4] Knut D. Semi-numerical algorithms. The Art of Computer Programming. Vol. 2. 3rd ed. Moscow: Williams Publishing; 2007: 832.
[5] Rubinstein RY, Kroese DP. Simulation and the Monte Carlo Method. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons; 2007.
[6] Niederreiter H. Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods. Philadelphia: SIAM; 1992.
[7] Tezuka Sh. Financial Applications of Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo methods. Random and Quasi-Random Point Sets. In: Hellekalek P, Larcher G, editors. Lecture notes in statistics (Pt 138). Springer; 1998.
[8] Keller A. Myths of Computer Graphics. In: Niederreiter H, Talay D, editors. Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2004. Springer; 2006: 217-43.
[9] Drmota D, Tichy RF. Sequences, Discrepancies and Applications. Lecture Notes in Mathematics (Pt 1651). Berlin: Springer; 1998.
[10] Faure H. Discrepancy and diaphony of digital (0,1)-sequences in prime base. Acta Arith 2005; 117: 125-48.
[11] Ninomiya S. Constructing a new class of low-discrepancy sequences by using the β-adic transformation. Mathematics and Computers in Simulation 1998; 47(2): 403-18.
[12] Kuipers L, Niederreiter H. Uniform Distribution of Sequences. Translated from English. Moscow: Nauka Publishers, Fizmatlit, 1985.
[13] Hellekalek P, Larcher G, editors. Random and Quasi-Random Point Sets. In: Lecture notes in statistics (Pt 138). Springer; 1998.
[14] Kátai I, Kovács B. Canonical number systems in imaginary quadratic fields. Acta Mathematica Academiae Scientarium Hungaricae 1981; 37(1-3): 159-64.
[15] Kátai I. Generalized Number Systems in Euclidean Spaces. Mathematical and Computer Modeling 2003; 38: 883-92.
[16] Kovács A. Generalized binary number systems. Annales Univ Sci Budapest, Sect Comp 2001; 20: 195-206.
[17] Kovács A. On number expansions in lattices. In: Proc 5th Internation Conference on Applied Informatics. Eger, Hungary: 2001.
[18] Kovács B. Canonical number systems in algebraic number fields. Acta Math Acad Sci Hungar 1981; 37: 405-7.
[19] Akiyama S, Rao H. New criteria for canonical number systems. Acta Arithm 2004; 111: 5-25.
[20] Kovács B. Canonical number systems in algebraic number fields. Acta Math Acad Sci Hungar 1981; 37: 405-7.
[21] Kalugin AN. An LSFR-CNS generator: analytic study of distribution uniformity [in Russian]. Computer Optics 2007; 31(1): 58-62.
[22] Kalugin AN. Development and study of multidimensional pseudorandom vector generators using data representation in algebraic field [in Russian]. Thesis for Candidate Degree in Physics and Mathematics.
[23] Chernov VM. Fast uniform distribution of sequences for fractal sets. In: Proceedings of International Conference on Computer Vision and Graphics. Computational IMAGING AND VISION SERIES; 2004, September 22-24, 2004. Warsaw, Poland: Kluwer Academic Press.