М.А. Голуб

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ В ЭТАЛОННЫХ МОДОВЫХ ЭЛЕМЕНТАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ ОПТИКИ

Свойства модовых оптических элементов компьютерной оптики [1-3] в определенной степени определяются операцией дискретизации их функции пропускания или отражения. Первые оценки погрешностей дискретизации в задаче анализа поперечно-модового состава когерентного излучения получены в работах [1, 2].

В данной работе изучается структура световых пучков, восстановленных с дискретизированных модовых оптических элементов, выполнены оценки энергетической эффективности и точности формирования поперечно-модового состава при наличии дискретизации.

1. Преобразование светового пучка при наличии дискретизации функции пропускания

Эталонный световой пучок с комплексной амплитудой

$$\xi(\vec{x}) = \sum_{(p,l)\in I_L} \xi_{pl}\psi_{pl}(\vec{x}), \quad \vec{x}\in G, \tag{1}$$

$$\xi_{pl} = \sqrt{\mu_{pl}}\,\exp(ib_{pl}) \tag{2}$$

селективно содержащий $L \geq 1$ поперечных мод $\psi_{pl}(\vec{x})$ с номерами $(p, l) \in I_L$ мощностями μ_{pl} и фазами b_{pl} может быть получен из освещающего пучка $E(\vec{x})$ с помощью комплексного пространственного фильтра с функцией пропускания

$$W(\vec{x}) = \frac{\xi(\vec{x})}{E(\vec{x})}, \tag{3}$$

где I_L - множество, содержащее L двойных индексов (p, l); $\vec{x} = (x,y)$ - декартовы координаты в плоскости сечения G пучка. В компьютерной оптике рассматривают функцию комплексного пропускания

$$\Gamma(\vec{x}) = f\left(\frac{W(\vec{x})}{W_{max}}, \vec{\nu}\right), \tag{4}$$

$$W_{max} = \max_{\vec{x}\in G} |W(\vec{x})|, \tag{5}$$

удовлетворяющую условию $|\Gamma(\vec{x})| \leq 1$ и получающуюся путем кодирования способом f функции (3). Способ кодирования подбирается таким образом, чтобы в первом дифракционном порядке, идущем под наклоном, соответствующем пространственной частоте $\vec{\nu}$, восстанавливалось поле $\gamma^{(1)}$, пропорциональное $\xi(\vec{x})$

$$\gamma^{(1)}(\vec{x}) = c\xi(\vec{x})\exp(i2\pi\vec{\nu}\vec{x}), \quad c=\text{const}. \tag{6}$$

Для этого компонента $\Gamma^{(1)}$ функция пропускания $\Gamma(\vec{x})$, соответствующая первому порядку, должна удовлетворять соотношению

$$\Gamma^{(1)}(\vec{x}) = a\,\frac{W(\vec{x})}{W_{max}}\exp(i2\pi\vec{\nu}\vec{x}), \tag{7}$$

где

$$a = cW_{max}. \tag{8}$$

При $\vec{\nu} = 0$ первый дифракционный порядок переходит в нулевой. Заметим, что коэффициент a определяется только способом кодирования f.

Например, для амплитудных и фазовых модовых оптических элементов с несущей можно показать, что имеют место те же формулы, что и для амплитудных и фазовых дифракционных решеток соответственно

$$a = \beta \frac{\Delta A}{4} \tag{9}$$

$$a = I_1 \left(\frac{\psi_{max}}{2} \beta\right), \tag{10}$$

где $\Delta A \in [0,1]$ и $\varphi_{max} \in [0,\pi]$ - диапазоны амплитудного пропускания и фазового сдвига соответственно регистрирующей среды; $\beta \in [0,1]$ - глубина модуляции; обычно $\varphi_{max} = \pi$.

В технологии компьютерной оптики функцию пропускания $\Gamma(\vec{x})$ реализуют с помощью дискретного фотошаблона. Будем считать, что фотошаблон вычерчивается на фотопостроителе с дискретным позиционированием и строчной разверткой, обеспечивающим $N_1 \times N_2$ отсчетов с равномерно засвечиваемыми ячейками разрешения размера $\delta \times \delta$ каждая. Область G представляет таким образом прямоугольник $d_1 \times d_2$, где

$$d_1 = N_1\delta; \; d_2 = N_2\delta.$$

Соответствующая дискретизированная функция пропускания имеет кусочно-постоянный характер и описывается соотношением [4]

$$\tilde{\Gamma}(\vec{x}) = \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_2} \Gamma(\vec{x}_{nm}) \chi_{nm}(\vec{x}), \tag{11}$$

где $\vec{x}_{nm} = (x_n, y_m)$ - центр ячейки разрешения G_{nm} номер (n, m),

$$\chi_{nm}(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in G_{nm} \\ 0, & \vec{x} \bar{\in} G_{nm} \end{cases} \tag{12}$$

Из (7), (11) соответственно получаем

$$\tilde{f}^{(1)}(\vec{x}) = a \frac{\tilde{W}(\vec{x})}{W_{max}} \exp i2\pi\vec{\nu}\vec{x}), \tag{13}$$

где

$$\tilde{W}(\vec{x}) = \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_2} W(\vec{x}_{nm}) \chi_{nm}(\vec{x}) \exp[-i2\pi\vec{\nu}(\vec{x} - \vec{x}_{nm})]. \tag{14}$$

В силу соотношений (7), (13) функция $\tilde{W}(\vec{x})$ аппроксимирует функцию комплексного пропускания $W(\vec{x})$ (3).

Формируемое модовым оптическим элементом компьютерной оптики поле в первом порядке может быть представлено в виде

$$\tilde{\gamma}^{(1)}(\vec{x}) = E(\vec{x}) \tilde{\Gamma}^{(1)}(\vec{x}) = c\eta(\vec{x}) \exp(i2\pi\vec{\nu}\vec{x}). \tag{15}$$

Функция

$$\eta(\vec{x}) = \sum_{(p,l) \in I_L} \xi_{pl} \varphi_{pl}(\vec{x}) \tag{16}$$

согласно (1), (14) представляется в виде

$$\tilde{\eta}(\vec{x}) = \sum_{(p,l) \in I_L} \xi_{pl} \varphi_{pl}(\vec{x}) \tag{17}$$

и отличается от эталонного пучка $\xi(\vec{x})$ заменой ортонормированных модовых функций $\psi_{pl}(\vec{x})$, $(p,l) \in I_L$ на "возмущение" модовые функции

$$\varphi_{pl}(\vec{x}) = E(\vec{x}) \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_2} \frac{\psi_{pl}(\vec{x}_{nm})}{E(\vec{x}_{nm})} \times$$

$$\chi_{nm}(\vec{x}) \exp[-i2\pi\vec{\nu}(\vec{x} - \vec{x}_{nm})]; \quad (p,l) \in I_L. \tag{18}$$

2. Возмущения модовых функций при дискретизации

Будем интерпретировать [5] функции $\varphi_{pl}(\vec{x})$ $(p,l) \in I_L$ как результат воздействия возмущений

$$h_{pl}(\vec{x}) = \varphi_{pl}(\vec{x}) - \psi_{pl}(\vec{x}), \quad p,l \in I_L \tag{19}$$

на ортонормированные модовые функции $\psi_{pl}(\vec{x})$, $(p,l) \in I_L$. Возмущения обусловлены дискретизацией и зависят от способа кодирования модовых элементов компьютерной оптики. Для исследования структуры модового пучка при наличии дискретизации введем матричные элементы

$$H_{pl\,p'l'} = \int_G h^*_{pl}(\vec{x})\psi_{p'l'}(\vec{x})d^2\vec{x} \tag{20}$$

($*$ - символ комплексного сопряжения).
Возмущенные модовые функции представляются через ортонормированные по формуле

$$\varphi_{pl}(\vec{x}) = \psi_{pl}(\vec{x}) + \sum_{p',l'} H^*_{pl\,p'l'}\, \psi_{p'l'}(\vec{x}), \tag{21}$$

где суммирование производится по всем $p' = 0,1,2...;$ $l' = 0,1,2...$. Соответственно поле $\eta(\vec{x})$ (17) может быть представлено в виде

$$\eta(\vec{x}) = \sum_{p,l} \eta_{pl}\, \psi_{pl}(\vec{x}), \tag{22}$$

где

$$\eta_{pl} = \begin{cases} \xi_{pl} + \sum\limits_{(p',l') \in I_L} H^*_{p'l'pl}\, \xi_{p'l'} & \text{при } (p,l) \in I_L \\ \sum\limits_{(p',l') \in I_L} H^*_{p'l'pl}\, \xi_{p'l'} & \text{при } (p,l) \bar{\in} I_L. \end{cases} \tag{23}$$

Нужные для построения эталона $\xi(\vec{x})$ (1) моды $\psi_{pl}(\vec{x})$, $(p,l) \in I_L$ составляют лишь компоненту

$$\eta_L(\vec{x}) = \hat{P}_L\, \eta(\vec{x}) = \sum_{(p,l) \in I_L} \eta_{pl}\, \psi_{pl}(\vec{x}) \tag{24}$$

поля $\eta(\vec{x})$ ($\hat{P}_L$ - оператор проектор на базисные функции ψ_{pl}, $(p,l) \in I_L$). Для удобства дальнейших выкладок удобно ввести L-мерные векторы

$$\Xi_L = (\xi_{pl} : (p,l) \in I_L); \quad \mathcal{H}_L = (\eta_{pl} : (p,l) \in I_L),$$

а также матрицы $L \times L$

$$E_L = [\delta_{pp'} \cdot \delta_{ll'} : (p,l) \in I_L;\ (p',l') \in I_L],$$

$$H_L = [H_{plp'l'} : (p,l) \in I_L,\ (p',l') \in I_L],$$

$$\Phi_L = E_L + H_L, \tag{25}$$

где $\delta_{pp'}$ - символ Кронекера.
В векторных обозначениях формула (23) дает

$$\mathcal{H}_L = \Phi^*_L \Xi_L = (E_L + H^*_L)\Xi_L, \tag{26}$$

где $*$ - символ Эрмитова сопряжения матрицы. Ниже будем употреблять обозначения $(\cdot\ ,\ \cdot)$ и $|\cdot|$ для евклидова скалярного произведения и нормы векторов.

3. Энергетическая эффективность при наличии дискретизации

При освещении модового оптического элемента пучком со световым потоком

$$\varepsilon_{\text{пад}} = \int_G |E(\vec{x})|^2 d^2\vec{x} \tag{27}$$

в первом дифракционном порядке формируется пучок $\tilde{\gamma}^{(1)}(\vec{x})$, содержащий как требуемые моды

$$\gamma_L^{(1)}(\vec{x}) = \hat{P}_L\tilde{\gamma}^{(1)}(\vec{x}) = c\eta_L(\vec{x})\exp(i2\pi\vec{\nu}\vec{x}), \tag{28}$$

так и "паразитные" моды других порядков. Световой поток $\varepsilon_{1\text{д}}$, идущий на формирование требуемых мод ψ_{pl}, $(p,l)\in I_L$ определяется по формуле

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1\text{д}} &= \int_G |\gamma_L^{(1)}(\vec{x})|^2 d^2\vec{x} = c^2\int_G |\eta_L(\vec{x})|^2 d^2\vec{x} = \\ &= c^2(H_L, H_L) = c^2(E_L - R_L)\Xi_L, \Xi_L),\end{aligned} \tag{29}$$

где

$$-R_L = \Phi_L\Phi_L^* - E_L = H_L + H_L^* + H_LH_L^*. \tag{30}$$

Энергетическую эффективность $\frac{\varepsilon_{1\text{д}}}{\varepsilon_{\text{пад}}}$ модовых оптических элементов будем оценивать по отношению к световому потоку освещающего пучка (29)

$$\frac{\varepsilon_{1\text{д}}}{\varepsilon_{\text{пад}}} = \frac{c^2}{\varepsilon_{\text{пад}}}((E_L - R_L(\Xi_L,\Xi_L) \tag{31}$$

В случае L=1, когда эталон ξ содержит лишь одну поперечную моду $\xi_{pl}\psi_{pl}(\vec{x})$, соотношение (31) принимает вид

$$\frac{\varepsilon_{1\text{д}}}{\varepsilon_{\text{пад}}} = \frac{|c_{pl}|^2|\xi_{pl}|^2}{\varepsilon_{\text{пад}}}|1 + H_{plpl}|^2, \tag{32}$$

где индексом 'pl' помечаются ранее введенные величины, относящиеся к одномодовому пучку. Наоборот, в случае, когда рассматривается класс всевозможных эталонов ξ (1), содержащих ровно L мод, можно пользуясь теорией квадратичных форм [6] получить оценку

$$\frac{c^2}{\varepsilon_{\text{пад}}}\Big[1 - \lambda_{max}(R_L)\Big]\Big|\Xi_L\Big|^2 \le \frac{\varepsilon_{1\text{д}}}{\varepsilon_{\text{пад}}} \le \frac{c^2}{\varepsilon_{\text{пад}}}\Big[1 - \lambda_{min}(R_L)\Big]\Big|\Xi_L\Big|^2, \tag{33}$$

где $\lambda_{min}(R_L)$ и $\lambda_{max}(R_L)$ - минимальное и максимальное собственные числа самосопряженной матрицы R_L. Заметим, что при варьировании Ξ_L границы оценки (33) будут достигаться.

В отсутствие дискретизации $H_L = R_L = 0$, формула (32) принимает вид

$$\frac{\varepsilon_{1pl}}{\varepsilon_{\text{пад}}} = \frac{c^2}{\varepsilon_{\text{пад}}}\Big|\xi_{pl}\Big|^2, \tag{34}$$

а неравенство (33) превращается в равенство

$$\frac{\varepsilon_{1pl}}{\varepsilon_{\text{пад}}} = \frac{c^2}{\varepsilon_{\text{пад}}}\Big|\Xi_L\Big|^2. \tag{35}$$

Таким образом, при наличии дискретизации модовых оптических элементов энергетическая эффективность снижается в $\Big[1 - \lambda_{min}(R_L)\Big]^{-1} \div \Big[1 - \lambda_{max}(R_L)\Big]^{-1}$ раз за счет дифракционного рассеяния светового потока в высшие дифракционные порядки, в том числе в $(1 + 2\mathrm{Re}H_{plpl} + |H_{plpl}|^2)^{-1}$ раз при L=1.

Через моды высших порядков, входящих в пучок $\tilde{\gamma}^1$, уходит световой поток

$$\varepsilon_{1\text{высш}} = \int_G \Big|\tilde{\gamma}^{(1)}(\vec{x}) - \gamma_L^{(1)}(\vec{x})\Big|^2 d^2\vec{x} = \int_G \Big|\gamma^{(1)}(\vec{x})\Big|^2 d^2\vec{x} - \varepsilon_{1\text{д}}.$$

В силу формул (15), (17), (29) получаем

$$\varepsilon_{1\text{высш}} = c^2 \int_G \left|\eta(\vec{x})\right|^2 d^2\vec{x} - \varepsilon_{1\text{д}} = c^2((R_L - Q_L)\Xi_L \Xi_L), \tag{36}$$

где

$$Q_L = Q_{plp'l'} : (p,l) \in I_L ; (p'l') \in I_L],$$

$$Q_{plp'l'} = -\int_G \varphi^*_{pl}(\vec{x})\varphi_{p'l'}(\vec{x}) d^2\vec{x} + \delta_{pp'}\delta_{ll'}. \tag{37}$$

4. Влияние дискретизации на поперечно-модовый состав

Дискретный модовый оптический элемент, синтезируемый методами компьютерной оптики, несколько изменяет распределение мощности между формируемыми модами $\psi_{pl}(\vec{x})$, $(p,l) \in I_L$, а также фазы мод в пучке $\gamma_L^{(1)}(\vec{x})$ по сравнению с требуемым пучком $\gamma^{(1)}(\vec{x})$ (6). В силу снижения энергетической эффективности при дискретизации, сравнению по модовому составу подлежит пучок $\gamma_L^{(1)}(\vec{x})$ с пучком $\Theta\gamma^{(1)}(\vec{x})$, где $0 < \Theta < 1$.

Представим виртуальный интерферометр, выведенный на нулевую полосу, в плечи которого подаются пучки $\Theta\gamma^{(1)}(\vec{x})$ и $-\gamma_L^{(1)}(\vec{x})$. Тогда интенсивность в интерферограмме будет описываться формулой

$$|\Theta\gamma^{(1)}(\vec{x}) - \gamma_L^{(1)}(\vec{x})|^2,$$

а световой поток разностной интерферограммы

$$\Delta^2 = \int_G \left|\Theta\gamma^{(1)}(\vec{x}) - \gamma_L^{(1)}(\vec{x})\right|^2 d^2\vec{x} \tag{38}$$

может рассматриваться как критерий точности формирования модового состава.

Используя (6), (24) и ортонормированность модовых функций нетрудно преобразовать формулу (38) к виду

$$\Delta^2 = c^2 |\Theta\Xi_L - H_L|^2. \tag{39}$$

Критерий Δ^2 (39) принимает минимальное значение

$$\Delta^2 = c^2[(H_L, H_L) - \Theta^2(\Xi_L, \Xi_L)] = c^2([(1 - \Theta^2)E_L R_L]\Xi_L, \Xi_L) \tag{40}$$

при оптимальном значении

$$\Theta = \frac{\mathrm{Re}(\Xi_L, H_L)}{(\Xi_L, \Xi_L)} = 1 + \frac{\left(\frac{H_L + H_L^*}{2}\Xi_L, \Xi_L\right)}{(\Xi_L, \Xi_L)} \tag{41}$$

Оценивая значения квадратичных форм (40), (41) с самосопряженными матрицами получаем следующие оценки Δ^2 и Θ:

$$c^2[1 - \Theta^2 - \lambda_{max}(R_L)]|\Xi_L|^2 \le \Delta^2 \le c^2[1 - \Theta^2 - \lambda_{min}(R_L)]|\Xi_L|^2 \tag{42}$$

$$1 + \lambda_{max}\left(\frac{H_L + H_L^*}{2}\right) \le \Theta \le 1 + \lambda_{min}\left(-\frac{H_L + H_L^*}{2}\right). \tag{43}$$

Относительная погрешность формирования поперечно-модового состава при наличии дискретизации равна

$$\delta^2 = \frac{\Delta^2}{\int_G |\Theta\gamma^{(1)}(\vec{x})|^2 d^2\vec{x}} = \frac{((E_L - R_L)\Xi_L, \Xi_L)}{\Theta^2(\Xi_L, \Xi_L)} - 1. \tag{44}$$

Другим критерием точности является среднеквадратичная ошибка формирования модового пучка

$$\Delta_\Phi^2 = \int_G |\gamma^{(1)}(\vec{x}) - \tilde{\gamma}^{(1)}(\vec{x})|^2 d^2\vec{x} \tag{45}$$

с соответствующей относительной погрешностью

$$\delta_\Phi^2 = \frac{\Delta_\Phi^2}{\int\limits_G |\gamma^{(1)}(\vec{x})|^2 d^2(\vec{x})} = \frac{\int\limits_G |\xi(\vec{x}) - \eta(\vec{x})|^2 d^2 \vec{x}}{\int\limits_G |\xi(\vec{x})|^2 d^2 \vec{x}} \qquad (46)$$

Из формул (17), (1), (37), (19) можно получить оценку

$$\lambda_{min}(\tilde{Q}_L) \le \delta_\Phi^2 = \frac{(\tilde{Q}_L \Xi_L, \Xi_L)}{(\Xi_L, \Xi_L)} \le \lambda_{max}(\tilde{Q}_L), \qquad (47)$$

где

$$\tilde{Q}_L = -(Q_L + H_L + H_L^*). \qquad (48)$$

Для случая формирования эталона одной моды ψ_{pl} (L=1) оценки принимают вид

$$\theta_{pl} = 1 + \mathrm{Re}H_{plpl}, \qquad (49)$$

$$\Delta_{pl}^2 = c_{pl}^2[1 - \theta^2 + 2\,\mathrm{Re}H_{plpl} + |H_{plpl}|^2]|\xi_{pl}|^2 =$$

$$= |c_{pl}\xi_{pl}|^2(\mathrm{Im}H_{plpl})^2, \qquad (50)$$

$$\delta_{pl}^2 = \frac{(\mathrm{Im}H_{plpl})^2}{(1+\mathrm{Re}H_{plpl})^2}, \qquad (51)$$

$$\delta_{\Phi pl}^2 = -(Q_{plpl} + 2\mathrm{Re}H_{plpl}). \qquad (52)$$

Заметим, что при вещественных значениях H_{plpl} имеет место равенство

$$\frac{\varepsilon_{1д}}{\varepsilon_{пад}} = \frac{c_{pl}|\xi_{pl}|^2}{\varepsilon_{пад}} \cdot \theta_{pl}^2, \qquad (53)$$

показывающее, что множитель θ^2 характеризует непосредственно уменьшение энергетической эффективности из-за дискретизации.

5. Коррекция возмущений дискретизации в эталонных модовых оптических элементах

Поскольку операция дискретизации порождает серию "паразитных" мод, то формируемый модовый состав отличается от требуемого, что описывается критерием (44). В то время как "паразитные" моды высших порядков принципиально не устранимы, есть возможность влиять на распределение мощности и фаз по первым $L \ge 2$ модам. Для этой цели при синтезе модовых оптических элементов с помощью ЭВМ вместо эталонных коэффициентов Ξ_L в (17) будем использовать предыскаженные коэффициенты $\tilde{\Xi}_L$ [5]. Тогда при модах ψ_{pl}, $(p,l) \in I_L$ в представлении (24) вместо коэффициентов H_L (26) фигурируют коэффициенты

$$\tilde{H}_L = \Phi_L^* \tilde{\Xi}_L, \qquad (54)$$

характеризующие модовый состав, формируемый элементами компьютерной оптики. Если выбрать предыскажение согласно [5]

$$\tilde{\Xi}_L = \Phi_L^{*-1} \Xi_L, \qquad (55)$$

то получим

$$\tilde{H}_{pl} = \Xi_L,$$

т.е. модовый состав по первым L модам будет в точности требуемым, хотя моды высших порядков сохранятся. Пользуясь рядом Неймана при

$$||H_L|| < 1 \tag{56}$$

операцию (55) с большой степенью точности можно представить в виде ряда

$$\tilde{\Xi}_L^{(p)} = \Xi_L + \sum_{r=0}^{p} (-H_L^*)^r \Xi_L$$

или рекуррентными соотношениями [5]

$$\tilde{\Xi}_L^{(0)} = \Xi_L;\ \tilde{\Xi}_L^{(r)} = (-H_L^*)\tilde{\Xi}_L^{(r-1)} + \Xi_L\ ;\ r = \overline{1,p}\ . \tag{57}$$

При выполнении операции коррекции порядка p

$$\tilde{H}_L^{(p)} = (E_L + H_L^*)\tilde{\Xi}_L^{(p)} = (E_L + H_L^*)\sum_{r=0}^{p} (-H_L^*)^r\ \Xi_L = \left[E_L + (-1)^p\ H_L^{p+1}\right]^*\ \Xi_L. \tag{58}$$

Равенство (58) заменяет (26). Соответственно формула (44) для критерия δ^2 принимает вид

$$\delta^{(p)2} = \frac{((E_L - R_L^{(p)})\Xi_L, \Xi_L)}{[\theta^{(p)}]^2(\Xi_L, \Xi_L)}\ , \tag{59}$$

где

$$-R_L^{(p)} = (-1)^p[H_L^{p+1} + H_L^{*p+1}] + (H_L H_L^*)^{p+1}, \tag{60}$$

$$\theta^{(p)} = 1 + (-1)^p\ \frac{\left(\frac{H_L^{p+1} + H_L^{*p+1}}{2}\ \Xi_L, \Xi_L\right)}{(\Xi_L, \Xi_L)}\ . \tag{61}$$

Заметим, что при p=0 формулы (57)-(61) переходят соответственно в формулы (41)-(44), (30).

6. Дискретизация в оптических элементах, согласованных с модами Гаусса-Эрмита

Для ортонормированных мод Гаусса-Эрмита [7], имеющих комплексную амплитуду

$$\psi_{pl}(x,y) = \psi_p(x)\psi_l(y), \tag{62}$$

где

$$\psi_p(x) = E_{0p}H_p\left(\frac{\sqrt{2}x}{\delta}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{\delta^2}\right), \tag{63}$$

$$E_{0p} = \sqrt{\frac{\psi_{max}}{2^p p!}}\ ;\ \psi_{max} = \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{64}$$

производная может быть представлена выражением

$$\psi_p'(x) = \frac{1}{\delta}\left[\sqrt{p}\ \psi_{p-1}(x) - \sqrt{p+1}\ \psi_{p+1}(x)\right], \tag{65}$$

следующим из рекуррентных соотношений полиномов Эрмита $H_p(\cdot)$ [8]. Соотношение (65) и свойство ортонормированности функций (62) позволяют получить простые выражения для матричных элементов возмущений. В случае плоской освещающей волны ($E(\vec{x}) = 1$) формулы (п10), (п14) приложения дают

$$Q_{plp'l'} = \frac{1}{12N_\delta^2} \Bigg\{\delta_{ll'}\Big[(\sqrt{pp'} + \sqrt{(p+1)(p'+1)})\delta_{pp'} - $$

$$- \sqrt{p(p'+1)}\ \delta_{p-2,p'} - \sqrt{(p+1)p'}\ \delta_{p+2,p'}\Big] +$$

$$+ \delta_{pp'}\Big[(\sqrt{ll'} + \sqrt{(l+1)(l'-1)}\ \delta_{ll'} - \sqrt{l(l'+1)}\ \delta_{l-2,l'} -$$

$$- \sqrt{(l+1)l'}\ \delta_{l+2,l'}\Big]\Bigg\}, \tag{66}$$

$$H_{plp'l'} = -Q_{plp'l'} + \Big[\mathrm{sinc}\ (\tfrac{1}{N_\nu})\ \mathrm{sinc}(\tfrac{1}{\tilde N_\nu}) - 1\Big]\delta_{pp'}\,\delta_{ll'} +$$

$$+ \frac{i}{N_\sigma}\Bigg\{\frac{\mathrm{sinc}(\frac{1}{N_\nu}) - \cos(\frac{\pi}{N_\nu})}{2\pi/N_\nu}\ \mathrm{sinc}\ (\tfrac{1}{N_\nu})\ \cdot$$

$$\cdot\ \delta_{ll'}\Big[\sqrt{p'}\ \delta_{p+1,p'} - \sqrt{p'+1}\ \delta_{p-1,p'}\Big] +$$

$$+ \sin\ (\tfrac{1}{N_\nu})\ \frac{\mathrm{sinc}(\frac{1}{\tilde N_\nu}) - \cos(\frac{\pi}{\tilde N_\nu})}{2\pi/N_\nu}\ \delta_{pp'}\Big[\sqrt{l'}\ \delta_{l+1,l'} - \sqrt{l'+1}\ \delta_{l-1,l'}\Big]\Bigg\},$$

где $$\mathrm{sinc}(\xi) = \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi}, \tag{67}$$

$$N_\sigma = \frac{\sigma}{\delta}, \tag{68}$$

$$N_\nu = 1/\nu_x\ \delta,\ \tilde N_\nu = 1/\nu_y\ \delta\ . \tag{69}$$

Величины N_σ, N_ν, $\tilde N_\nu$ показывают, сколько элементов разрешения укладываются соответственно на радиусе σ основной моды, на периоде несущей по оси x и по оси y.

Рассмотрим пример. Пусть изготавливается оптический элемент размера $d_1=d_2=d$, формирующий лишь одну моду Гаусса-Эрмита с параметром σ, из плоской освещающей волны. Используется способ фазового кодирования с несущей $\nu_x = \nu$, $\nu_y = 0$. Задано разрешение δ.

Учитывая, что

$$\frac{W_{max}}{\xi_{pl}} \le \psi_{max} = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{70}$$

по формулам (49)-(52), (32), (34) и (66)-(69) получаем следующие расчетные соотношения ($\beta = 1$)

$$\delta^2_{\Phi pl} = 2\Big[1 - \mathrm{sinc}\ \frac{1}{N_\nu}\ \Big] + \frac{p+l+1}{6N_\sigma^2} \cong \cong \frac{\pi^2}{3N_\nu^2} + \frac{p+l+1}{6N_\sigma^2} \tag{71}$$

$$\frac{\varepsilon_{1дpl}}{\varepsilon_{пад}} = \frac{\varepsilon_{1pl}}{\varepsilon_{пад}} \cdot \Big[\mathrm{sinc}\ \frac{1}{N_\nu} - \frac{p+l+1}{6N_\sigma^2}\Big], \tag{72}$$

где

$$\frac{\varepsilon_{1pl}}{\varepsilon_{пад}} = -\ \frac{1}{2}\ I_1^2(\frac{\pi\beta}{2})\ (\frac{2\sigma}{d})^2 \tag{73}$$

– энергетическая эффективность модовых оптических элементов в отсутствие дискретизации.

При $\delta \to$ имеем $N_\nu \to \infty$, $N_\sigma \to 0$. При конкретном $\delta > 0$ первые слагаемые в (71) и (72) описывают погрешность дискретной передачи несущей, а вторые слагаемые - погрешность дискретного представления модовой функции ψ_{pl}. В табл. 1, 2 приведены значения критериев (72), (71).

Таблица 1

Коэффициент снижения энергетической эффективности из-за дискретизации $\frac{\varepsilon_{1дpl}}{\varepsilon_{1pl}}$ ($N_\nu = 4$)

N_σ \ p+l	0	5	10	50	100
5	0,797	0,740	0,684	0,318	0,053
10	0,807	0,792	0,778	0,664	0,536
20	0,810	0,806	0,804	0,785	0,762
30	0,810	0,808	0,807	0,794	0,776

Таблица 2

Зависимость характеристик модового элемента от несущей пространственной частоты (N_σ=10, p+l=10)

N_ν	2	4	6	8	10	20
$\frac{\varepsilon_{1дpl}}{\varepsilon_{1pl}}$	0,374	0,777	0,868	0,913	0,924	0,954
$\delta^2_{\Phi pl}$	0,758	0,218	0,118	0,070	0,058	0,028

С ростом порядка (p+l) моды ψ_{pl} энергетическая эффективность $\varepsilon_{1дpl}/\varepsilon_{пад}$ падает, а среднеквадратичное уклонение δ^2_Φ растет. Задаваясь допустимым спадом

$$\chi = \frac{|\varepsilon_{1дpl} - \varepsilon_{1pl}|}{\varepsilon_{1pl}}$$

энергетической эффективности и максимальным значением среднеквадратичного уклонения $\delta_{\Phi max}$ получим оценку максимального порядка моды, которую можно записать на изготавливаемый оптический элемент.

$$(p+l)_{max} = \min(p_1,\ p_2), \tag{74}$$

где

$$p_1 = 6N_\sigma^2[\operatorname{sinc}(\frac{1}{N_\nu}) - \sqrt{1 - \chi}] - 1, \tag{75}$$

$$p_2 = 6N_\sigma^2[\delta^2_{\Phi max} - 2(1 - \operatorname{sinc}\frac{1}{N_\nu})] - 1 \tag{76}$$

Следует также учитывать ограничение ширины моды $\sim\sigma\sqrt{p+0,5} \times \sigma\sqrt{1+0,5}$ размером оптического элемента, порождающее оценку

$$p \le p_3;\ 1 \le p_3;\ p_3 = 4(\frac{d}{2\sigma})^2 - \frac{1}{2}. \tag{77}$$

Так, при $\chi = 0{,}2$, $N_\nu = \delta_\Phi^2 = 0{,}2$, $d = 5$ мкм, $\delta = 25$ мкм получим $P + 1 \le 21$ при $N_\sigma = 26$ и $p{+}l \le 2$ при $N_\sigma = 10$.

С ростом несущей пространственной частоты ν (т.е. с уменьшением N_ν) энергетическая эффективность $\varepsilon_{1дpl}$ (72) падает, а среднеквадратичный критерий увеличивается, т.е. одновременно происходит улучшение качества формируемого распределения комплексной амплитуды и растет доля падающего на него светового потока.

Таким образом, при наличии дискретизации следует минимизировать пространственную частоту ν. Следует однако иметь в виду, что нижняя граница ν определяется условиями разделения нулевого и первого порядков.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Оценка матричных элементов возмущений

Оценим матричные элементы $H_{plp'l'}$, $Q_{plp'l'}$ (20), (37) для $E(\vec{x}) \equiv \mathrm{const}$ (плоская освещающая волна). Для $\vec{\nu} = 0$ элемент $H_{plp'l'}$ оценивался в работе [4]. Обобщим предложенный в [4] метод.

Возмущения дискретизации (19), (18) являются кусочными функциями, имеющими различные параметры в различных ячейках разрешения G_{nm}. В силу малости размера δ ячейки можно разложить $\psi_{pl}(\vec{x})$ в ряд Тейлора с центром $\vec{x}_{nm}$ и ограничиться линейными членами:

$$\psi_{pl}(\vec{x}) = \psi_{pl}(\vec{x}_{nm}) + (\vec{x}-\vec{x}_{nm})\nabla\psi_{pl}(\vec{x}_{nm}), \quad \vec{x} \in G_{nm}. \qquad (п1)$$

Подставляя (п1), (18) в (19) получаем

$$h_{pl}(\vec{x}) = \psi_{pl}(\vec{x}_{nm})\{\exp[-i2\pi\vec{\nu}(\vec{x}-\vec{x}_{nm})] - 1\} - (\vec{x}-\vec{x}_{nm})\nabla\psi_{pl}\ \vec{x}_{nm} \qquad (п2)$$

при $\vec{x} \in G_{nm}$.

Теперь можно оценить матричные элементы (20)

$$H_{plp'l'} = \int_G h^*_{pl}(\vec{x})\psi_{p'l'}(\vec{x})d^2\vec{x} = \sum_{n,m}\int_{G_{nm}} h^*_{pl}(\vec{x})\psi_{p'l'}(\vec{x})d^2\vec{x}\ . \qquad (п3)$$

Подставляя (п1), (п2) в (п3) и учитывая, что

$$\int_{G_{nm}} (\vec{x}-\vec{x}_{nm})d^2(\vec{x})=0, \qquad (п4)$$

$$\int_{G_{nm}} (x-x_n)^2 d^2\vec{x} = \int_{G_{nm}} (y-y_m)^2 d^2\vec{x} = \frac{\delta^4}{12}, \qquad (п5)$$

$$\int_{G_{nm}} \{\exp[+i2\pi\vec{\nu}(\vec{x}-\vec{x}_{nm})] - 1\}d^2\vec{x} = \delta^2[\mathrm{sinc}(\nu_x\delta)\ \mathrm{sinc}(\nu_y\delta) - 1], \qquad (п6)$$

$$\int_{G_{nm}} (\vec{x}-\vec{x}_{nm})\{\exp[+i2\pi\vec{\nu}(\vec{x}-\vec{x}_{nm})] - 1\}d^2\vec{x} = i\delta^2\vec{F}(\nu_x,\nu_y,\delta), \qquad (п7)$$

где $\mathrm{sinc}(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$,

$$\vec{F}(\nu_x,\nu_y,\delta) = \begin{pmatrix} F_0(\nu_x,\nu_y,\delta) \\ F_0(\nu_y,\nu_x,\delta)\end{pmatrix}, \qquad (п8)$$

$$F_0(\nu_x,\nu_y,\delta) = \frac{\mathrm{sinc}(\nu_x\delta) - \cos(\pi\nu_x\delta)}{2\pi\nu_x}\,\mathrm{sinc}(\nu_y\delta) \qquad (п9)$$

получаем

$$H_{plp'l'} = \delta^2 \sum_{n,m} \psi^*_{pl}(\vec{x}_{nm})\psi_{p'l'}(\vec{x}_{nm})\left[\mathrm{sinc}(\nu_x\delta)\,\mathrm{sinc}(\nu_y\delta) - 1\right] +$$

$$+ i\psi^*_{pl}(\vec{x}_{nm})\ \nabla\psi_{p'l'}(\vec{x}_{nm})\vec{F}(\nu_x,\nu_y,\delta) - \nabla\psi^*_{pl}(\vec{x}_{nm})\nabla\psi_{p'l'}(\vec{x}_{nm})\ \frac{\delta^2}{12}\ .$$

Аппроксимируя интегральную сумму интегралом и учитывая ортонормированность функций $\psi_{pl}(\vec{x})$ получаем

$$H_{plp'l'} = -\frac{\delta^2}{12}\int_G \nabla\psi^*_{pl}(\vec{x})\nabla\psi_{p'l'}(\vec{x})d^2\vec{x} \ +$$

$$+ \left[\mathrm{sinc}(\nu_x\delta)\,\mathrm{sinc}(\nu_y\delta) - 1\right]\delta_{pp'}\delta_{ll'} +$$

$$+ i\vec{F}(\nu_x,\nu_y,\delta)\int_G \psi^*_{pl}(\vec{x})\nabla\psi_{p'l'}(\vec{x})d^2\vec{x}\ . \qquad (п10)$$

Для вычисления матричных элементов $Q_{plp'l'}$ (37) воспользуемся формулой (18) ($E(\vec{x})$ = const). Производя интегрирование имеем

$$Q_{pl\ p'l'} = \delta_{pp'}\delta_{ll'} - \delta^2\sum_{n,m}\psi^*_{pl}(\vec{x}_{nm})\psi_{p'l'}(\vec{x}_{nm})\,. \qquad (п11)$$

С другой стороны, условие ортонормированности модовых функций с учетом (п1) и (п4), (п5) принимает вид

$$\delta_{pp'}\delta_{ll'} = \int_G \psi^*_{pl}(\vec{x})\psi_{p'l'}(\vec{x})d^2\vec{x} = \sum_{n,m}\int_{G_{nm}} \psi^*_{pl}(\vec{x})\psi_{p'l'}(\vec{x})d^2\vec{x} =$$

$$= \delta^2\sum_{n,m}\psi^*_{pl}\ (\vec{x}_{nm})\psi_{p'l'}(\vec{x}_{nm}) + \frac{\delta^4}{12}\sum_{n,m}\nabla\psi^*_{pl}(\vec{x}_{nm})\nabla\psi_{p'l'}(\vec{x}_{nm})\,. \qquad (п12)$$

Подставляя (п12) в (п11) получаем

$$Q_{plp'l'} = \frac{\delta^4}{12}\sum_{n,m}\nabla\psi^*_{pl}(\vec{x}_{nm})\nabla\psi_{p'l'}(\vec{x}_{nm})\ . \qquad (п13)$$

Аппроксимируя сумму в (п13) интегралом окончательно записываем результат

$$Q_{plp'l'} = \frac{\delta^2}{12}\int_G \nabla\psi^*_{pl}(\vec{x})\ \nabla\psi_{p'l'}(\vec{x})d^2\vec{x}. \qquad (п14)$$

Формулы (п10), (п14) позволяют оценивать матричные элементы возмущений, встречающиеся при изучении дискретизации в основной части работы.

Литература

1. Голуб М.А., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А. Квантовая электроника, № 9, 1866(1982).

2. Голуб М.А., Кривошлыков С.Г., Прохоров А.М., И.Н. Сисакян, Сойфер В.А. Пространственные фильтры для анализа и формирования поперечно-модовой структуры когерентного электромагнитного излучения. М.: Препринт. ФИАН СССР, 1983, № 21.

3. Sissakian I.N., Soifer V.A. Fine opties. Synthetized by a computer. V International Conference on Lasers and their Applications. Abstracts. Dresden, GDR, 1985. November. P. 23-25.

4. Голуб М.А., Сойфер В.А. Устойчивость разложения Карунена-Лоэва и машинный синтез оптимальных пространственных фильтров // Спектральные методы обработки информации в научных исследованиях. Пущино. НИВЦ, 1980. С. 108-134.

5. Голуб М.А., Сойфер В.А. Алгоритм восстановления поля по конечному набору коэффициентов ортогонального разложения с возмущенным базисом // Тр. МФТИ, Долгопрудный, 1978. С. 50-55.

6. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1971.

7. Справочник по лазерам / Под ред. А.М. Прохорова. Т.2. М.: Сов. радио, 1978. С. 20.

8. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977.