М.А. Голуб, Н.Л. Казанский, И.Н. Сисакян,
В.А. Сойфер, С.И. Харитонов

ОЦЕНКА ДИФРАКЦИОННОГО РАЗМЫТИЯ ФОКАЛЬНОЙ ЛИНИИ ГЕОМЕТРООПТИЧЕСКИХ ФОКУСАТОРОВ

В данной работе решается задача дифракционного расчета интенсивности поля вблизи фокальной линии фокусатора когерентного излучения. Метод основан на вычислении интеграла Кирхгофа в параксиальном приближении в системе координат, связанной со слоями на фокусаторе, уравнения которых находятся в процессе решения обратной задачи. Приведены примеры расчетов световых полей в случае фокусировки плоского гауссова пучка в отрезок с равномерным распределением интенсивности. Получены простые выражения для дифракционной ширины фокального отрезка и энергетической эффективности фокусатора.

Пусть рассматривается задача фокусировки плоского пучка когерентного излучения с длиной волны λ в плоскую фокальную линию F с параметрическими уравнениями

$$x=x_o(\xi),\ \xi\in[0,\ L], \tag{1}$$

где

$l(\xi)$ - линейная плотность;

$x=(x,\ y)$ - декартовы координаты в плоскости фокусировки;

ξ - натуральный параметр кривой.

Фокальная плоскость отстоит на расстояние f_o от плоскости фокусатора (это расстояние будем называть фокусным).

Определим координаты в окрестности фокальной линии. Для этого введем линейное продолжение $\tilde{F}$ линии F касательными в концевых точках согласно уравнениям:

$$x=x_o(\xi)+x'_{o\xi}(\xi-\tilde{\xi}),\ \tilde{\xi}=\begin{cases}\xi, & \text{если } \xi\in[0,\ L];\\ 0, & \text{если } \xi<0;\\ L, & \text{если } \xi>L,\end{cases} \tag{2}$$

где $\vec{x}_{o\xi}=\dfrac{d\vec{x}_o}{d\xi}$.

При $\xi\notin[0, L]$ величина $|\xi-\tilde{\xi}|$ есть расстояние от точки x до соответствующей граничной точки прямой, измеренное по касательной.

Далее введем в плоскости фокусировки криволинейные координаты ξ, η, связанные с x, y соотношениями:

$$\begin{cases} y=y_o(\xi)+x_{o\xi}, \eta; \\ x=x_o(\xi)-y'_{o\xi}\eta. \end{cases} \tag{3}$$

Координата η, выбранная таким образом, характеризует отклонение точки x от кривой $\tilde{F}$, отсчитанное по нормали.

В геометрооптическом решении обратной задачи фокусировки [1-3] каждая точка ξ фокальной линии формируется соответствующим слоем, имеющим в параксиальном приближении уравнение

$$(u-x_o(\xi))x'_\xi(\xi)=c(\xi)f_o, \tag{4}$$

где функция $c(\xi)$ находится из энергетических соотношений.

Результатом решения обратной задачи фокусировки является фазовая функция фокусатора $k\Psi$ [2], определяемая уравнением

$$\Psi(u) = \frac{1}{f_o}\int_{u_o}^{u} x_o(\xi(u))dl - \frac{(u-x_C)^2}{2f_o} - \frac{u-u_o)x_C}{f_o},$$

где

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - волновое число;

$u=(u, v)$ - декартовы координаты в плоскости фокусатора.

В дифракционном решении прямой задачи фокусировки будем считать, что поле в каждой точке в окрестности фокальной линии формируется лишь той частью излучения, которая проходит вблизи соответствующего слоя фокусатора. Отдельно для каждой точки ξ линии $\tilde{F}$ построим систему декартовых координат в плоскости фокусатора так, чтобы ось β совпадала с соответствующим слоем

$$\begin{aligned} u&=(c(\tilde{\xi})f_o+x_o(\xi)x'_{o\xi}(\tilde{\xi}))x'_o(\tilde{\xi})+x'_{o\xi}(\xi)\times\beta); \\ v&=(c(\tilde{\xi})f_o+x_o(\xi)x'_o\xi(\tilde{\xi}))y'_o(\xi)+(x'_{o\xi}(\tilde{\xi})\cdot\beta), \end{aligned} \tag{5}$$

где $x\times\beta=x\alpha-y\beta$, $\quad (x\cdot\beta)=x\beta+y\alpha$.

Расчет поля $w(x, f_o)$ в фокальной плоскости проводим с помощью интеграла Кирхгофа в параксиальном приближении [4]

$$w(x, f_o)=e^{ikf_o}\frac{k}{2\pi i f_o}\int w_o(u, 0)\exp(ik\tilde{\Psi})d^2u, \tag{6}$$

где

$$\tilde{\Psi} = \frac{1}{2f_o}(x-u)^2+\Psi. \tag{7}$$

Анализируя фазу $\tilde{\Psi}$, можно убедиться, что множество точек стационарной фазы образует прямую линию, совпадающую со слоем на фокусаторе.

Сделаем в (6) замену переменных $(u, v)\to(\alpha, \beta)$ и разложим $\tilde{\Psi}(\alpha, \beta)$ в ряд Тейлора, ограничившись квадратичными членами, а функцию w_o аппроксимируем ее значением на соответствующем слое (то есть при $\alpha=0$). Далее вычисляется интеграл по β; получаем

$$\begin{aligned} w(x, f_o)=e^{i\varkappa}\frac{k}{2\pi f_o}\int d\beta\{w_o(u(0,\beta), 0)\exp(\frac{ik}{f_o}(\gamma_o - \frac{\gamma_1^2}{4\gamma_2}))\times \\ \times\operatorname{sign}(\alpha + \frac{\gamma_1}{4\gamma_2})E(\frac{k}{f_o}\gamma_2(\alpha+\frac{\gamma_1}{2\gamma_2})^2)\sqrt{\frac{\pi}{2\gamma_2}}\left|\begin{matrix} G_1(\beta) \\ G_2(\beta)\end{matrix}\right\}, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\gamma_0=f_0\tilde{\Psi}|_{\alpha=0},\ \gamma_1 = \frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\alpha}f_0\Big|_{\alpha=0},$$

$$\gamma_2 = \frac{f_0}{2}\ \frac{\partial^2\tilde{\Psi}}{\partial\alpha^2}\Big|_{\alpha=0},\ E(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int e^{ix^2}dx,$$

$\varkappa$ - фаза, не зависящая от α и β.

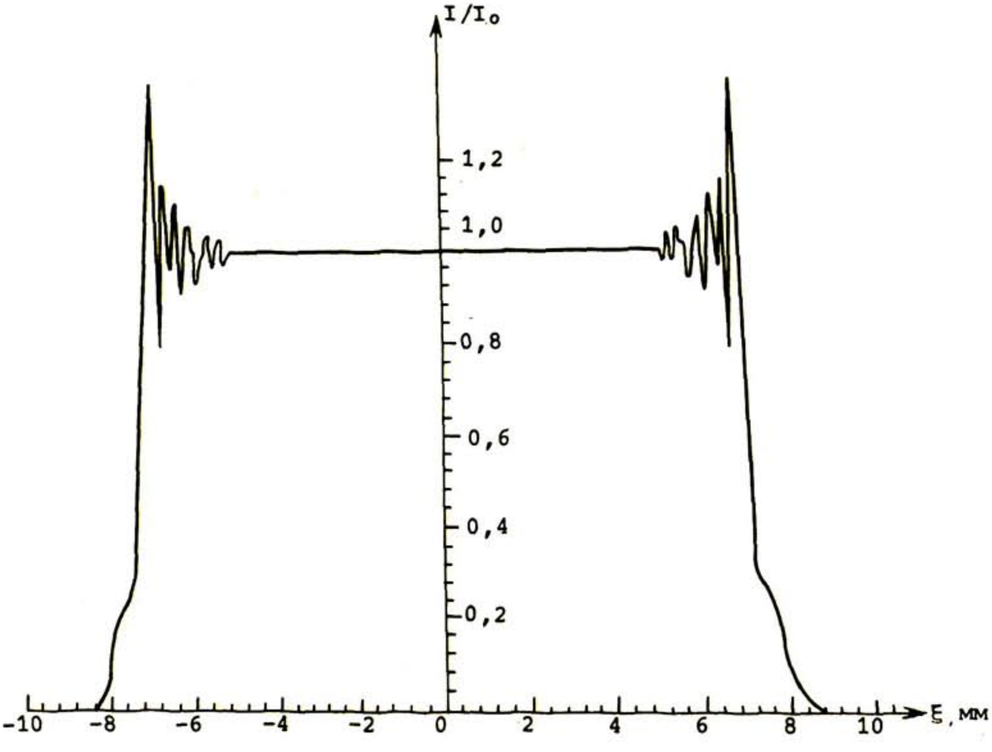
$\alpha=G_1(\beta)$ и $\alpha=G_2(\beta)$ уравнения границ фокусатора, которые находятся из уравнений границ в переменных (u, v) с использованием соотношений (4) и (5).

Если в (8) $G_1(\beta)=\infty$, $G_2(\beta)=-\infty$, получим асимптотическую формулу

$$w(x,\ f_0)= \frac{e^{i\varkappa}}{2}\int\sqrt{\frac{k}{\pi f_0|\gamma_2|}}\ w(u(0,\ \beta),0)\exp\left(\frac{-ik\beta\eta}{f_0}\right)d\beta. \qquad (9)$$

В частности, формула (9) справедлива всюду, если фокальная кривая замкнута и гладкая, а также справедлива для окрестности внутренних точек, достаточно удаленных от концов произвольной фокальной кривой. Интенсивность поля рассчитывается по формулам (8) и (9) путем вычисления квадрата модуля.

В качестве примера рассмотрим фокусировку в фокальный отрезок прямой с равномерной линейной плотностью (рисунок). Отрезок предполагается расположенным вдоль оси и симметрично относительно начала координат, а фокусатор - прямоугольным размера $2a \times 2b$. Для него $\xi=x$, $\eta=y$, а слои представляют прямые, параллельные оси v.



Распределение интенсивности
от фокусатора гауссова пучка в
отрезок ($\lambda=10{,}6$ мк, $\sigma=10$ мм,
$a=12{,}5$ мм, $L=15$ мм)

Для фокусируемого пучка, имеющего плоский волновой фронт с равномерным распределением интенсивности

$$\Psi(u,\ v) = -\frac{u^2}{2f_0}\left(1 - \frac{L}{2a}\right) - \frac{v^2}{2f_0}\ , \qquad (10)$$

а поле в фокальной области определяется согласно (8), выражения

$$w(\xi\eta) = \sqrt{\frac{2ak}{\pi L f_o}}\, b\, \mathrm{sinc}\left(\frac{kb\eta}{\pi f_o}\right) \times \{\mathrm{sign}(a - \frac{2\xi a}{L}) \times E((\frac{\Delta}{\Delta_o})) + \tag{11}$$

$$+ \mathrm{sign}(a + \frac{2\xi a}{L}) \times E(\frac{ka}{Lf_o}(\xi + \frac{L}{2})^2\};$$

$$\Delta_o = \sqrt{\frac{Lf_o}{ka}}\ ;\ \Delta = \xi - \frac{L}{2}\quad \mathrm{sign}\ x = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0\ . \end{cases}$$

Соотношение (10) позволяет представить данный фокусатор как две скрещенные линзы с фокусами $f_o/(1 - \frac{L}{2a})$ и f_o по осям u и v соответственно. Заметим, что поле (11), рассчитанное по формуле (8) вдоль оси ξ, описывается формулами дифракции Френеля сферического сходящегося пучка на щели шириной $2a$, а вдоль оси η - формулами дифракции Фраунгофера на щели шириной $2b$.

При $L\to 0$ мы получаем поле от линзы с апертурой $2a \times 2b$ и фокусным расстоянием f_o.

При $-\Delta = |\Delta| >> \Delta_o$, то есть для внутренних точек, лежащих вдали от концов отрезка, формула (11) асимптотически переходит в

$$w(\xi\eta) = w_o \mathrm{sinc}\left(\frac{kb\eta}{\pi f_o}\right), \tag{12}$$

где $w_o(\xi) = 2b\sqrt{\frac{ak}{\pi L f_o}}$ описывает усредненное от оси значение комплексной амплитуды, а sinc-функция описывает дифракционное уширение Δ_o фокальной кривой.

При $\Delta_o << L$ для уровня Θ по интенсивности получим

$$\Delta_o = \frac{2\pi f_o}{kb}\ \mathrm{arsinc}\sqrt{\Theta},$$

где символом arsinc обозначена функция обратная к $\mathrm{sinc}(x)$. Формула (12) позволяет оценить дифракционную эффективность фокусатора ε_Θ, то есть долю энергии, попадающую в прямоугольник с шириной Δ_Θ и длиной L

$$\varepsilon_\Theta = \frac{2}{\pi}(\mathrm{SI}(2\pi x) - \pi\Theta x)|_{x=\mathrm{arsinc}\sqrt{\Theta}}.$$

Для фокусируемого гауссова пучка с плоским волновым фронтом и распределением интенсивности

$$I = I_o \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right),$$

согласно (8) и (9), выражение для амплитуды имеет вид:

$$w(\xi\eta) = \begin{cases} e^{i\varkappa}\sqrt{\frac{k}{2\pi f}}\sqrt{\frac{2\pi\sigma\,\mathrm{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right)}{L}}\, w_2 & \text{при } \Delta >> \Delta_o; \\ \frac{e^{i\varkappa}}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi\sigma\sqrt{2\pi}\,\mathrm{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right)k}{L\exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right)f}} \times \left\{\mathrm{sign}\Delta E\left(\left(\frac{\Delta}{\Delta_o}\right)^2\right) - \frac{1+i}{2}\right\} w_\eta & \text{при } \Delta \approx \Delta_o, \end{cases} \tag{13}$$

где

$$\Delta_o = \sqrt{\frac{2f_o L\exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right)}{k\sigma\sqrt{2\pi}\,\mathrm{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right)}}\ ;\quad \Delta = \xi - \frac{L}{2};$$

$$w_\eta = \int \exp\left(\frac{ik\eta v}{f}\right) \exp\left(-\frac{v^2}{4\sigma^2}\right) dv.$$

В случае, когда размеры фокусатора больше, чем характерный размер пучка σ, w_y принимает вид

$$w_\eta = 2\sigma\sqrt{\pi}\,\exp\left(-\frac{\eta^2}{4\tilde{\sigma}^2}\right),$$

где $\tilde{\sigma} = \frac{2f}{k\sigma}$,

совпадающий с известной формулой для фокусировки гауссова пучка линзой.

При этом

$$\Delta_\theta = \frac{2f}{k\sigma\sqrt{2}}(-\ln\theta)^{1/2};$$

$$\varepsilon_\theta = \operatorname{erf}(\sqrt{-\ln\theta}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Голуб М.А., Карпеев С.В., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А. Письма в ЖТФ, 1981, т. 7, № 10, с. 618.
2. Данилов В.А., Попов В.В., Прохоров А.М., Сагателян Д.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А. Письма в ЖТФ, 1982, т. 8, № 13, с. 810.
3. Гончарский А.В., Данилов В.А., Попов В.В., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А., Степанов В.В. Доклады АН СССР, 1983, т. 273, вып. 605.
4. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971. - 495 с.