А.Е. Березный, И.А. Шимохин

ФАЗОВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ДЛЯ ФОКУСИРОВКИ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛОСКИЕ МНОГОУГОЛЬНЫЕ ОБЛАСТИ

Введение

Для ряда технологических применений лазеров актуальной задачей является создание на поверхности обрабатываемого материала определенного распределения интенсивности излучения в некоторой плоской области. При этом исходный пучок лазерного излучения, как правило, в сечении имеет вид круга.

В настоящей статье разрабатываются методы вычисления фазовой функции для оптических элементов, создающих в фокальной области распределение интенсивности в форме произвольного заданного многоугольника. Предлагается использовать для построения искомых фазовых функций аппарат теории конформных отображений.

Задача решается в параксиальном приближении геометрической оптики. Лучи из точек (x,y) в исходной плоскости идут в точки (u,v) фокальной плоскости. При этом координаты (u,v) задаются уравнениями

$$u = f_x(x,y)\lambda F/2\pi;$$
$$v = f_y(x,y)\lambda F/2\pi, \qquad (1)$$

включающими частные производные безразмерной фазовой функции по координатам (x,y). Здесь λ - длина волны излучения лазера, F - фокальное расстояние, $f(x,y)$ принимает значения в диапазоне $(0,\ 2\pi)$.

Как было показано ранее в [1], уравнения (1) с заданными функциями $u(x,y)$, $v(x,y)$ разрешимы относительно $f(x,y)$, если $(x,y) \to (u,v)$ является конформным отображением, а соответствующая фазовая функция имеет вид первообразной:

$$f(x,y) = \mathrm{Re}\ \{\int_0^z w(z)dz\}, \qquad (2)$$

где $z = x + iy$, $w = u + iv$ - комплексные координаты в исходной и в фокальной плоскостях.

Конформные отображения круга на многоугольные области

Будем считать, что сечение пучка в исходной плоскости есть круг радиуса R. Его надо отобразить конформно на многоугольник с n вершинами, которым соответствуют точки на границе круга $a_1,\dots,a_n$, и углами при вершинах $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ (где a_i - комплексные числа, причем α_i заданы в долях π: $0 < \alpha_1 < 2$). По теореме Римана такое отображение существует. Оно задается [2] формулой Шварца-Кристоффеля:

$$w(z) = C \int_0^z \prod_{k=1}^{n} (\omega - a_k)^{\alpha_i - 1}\, d\omega. \qquad (3)$$

Масштабная константа C определяется величиной R и размером многоугольника. Интеграл в (3) понимается как первообразная в смысле теории функций комплексного переменного: он берется вдоль любого пути внутри круга, соединяющего точки 0 и z и не зависит от выбора этого пути.

Так как отображение $w(z)$ однолистно, то интенсивность излучения в точке w, лежащей внутри многоугольника, определится как

$$I(w) = I(z) \cdot J_w^{-1} , \tag{4}$$

где $I(z)$ - интенсивность в исходной точке z, а J_w - якобиан отображения $w(z)$.

Как известно (см. [2]),

$$J_w = |dw/dz|^2. \tag{5}$$

Из (3)-(5) можно заключить, что интенсивность внутри многоугольника будет близка к равномерной (при условии равномерности интенсивности в исходном круге), а при приближении к вершинам она ($z \to a_k$) будет иметь особенности:

- при $\alpha_k < 1$, $J_w \to \infty$;
- при $\alpha_k > 1$, $J_w \to 0$.

Это значит, что если две соседние стороны образуют угол меньше π (выпуклая вершина), то при приближении к ней интенсивность быстро спадает до 0, а если угол больше π (вогнутая вершина), то при приближении к вершине интенсивность быстро растет (имеет место локальный фокус).

На практике это означает, что вершины получающегося многоугольника выглядят несколько скругленными.

Устойчивость фокусировки к неоднородностям амплитуды в пучке и поперечным сдвигам

Для практических применений фокусировки лазерного излучения в определенную фигуру важна не только приблизительная равномерность распределения энергии внутри фигуры, но и стабильность этого распределения по отношению к изменениям падающего на фокусирующий элемент исходного пучка лазерного излучения, в том числе и в смысле неточности юстировки - смещению исходного пучка относительно элемента.

Этой стабильности можно добиться, придавая фокусирующему элементу свойства, близкие к свойствам голограммы: целый ряд участков элемента, небольших по сравнению с диаметром пучка, должен создавать в фокальной области все нужное распределение интенсивности целиком, а устойчивость достигается наложением фокальных картин от многих таких участков - "перемешиванием" или усреднением распределения энергии в исходном пучке.

Для конформных отображений круга естественно воспользоваться тем свойством конформных отображений, что композиция двух конформных отображений сама является конформным отображением, а значит удовлетворяет условию существования аналитической фазовой функции для фокусирующего элемента. Для этого перед отображением круга на многоугольник надо произвести (многолистное) отображение круга на круг, и полученная композиция будет обладать нужными свойствами.

Какие существуют подходящие для этого отображения? Самое простое - N-листное отображение круга на себя:

$$z \to z^N. \tag{6}$$

Его фазовая функция

$$\mathrm{Re}\{z^{N+1}/(N+1)\} = \frac{r^{N+1}}{N+1} \cos((N+1)\theta), \tag{7}$$

где (r,θ) - полярные координаты на плоскости (x,y).

Можно брать и более сложные композиции отображений типа (6) конформными автоморфизмами единичного круга типа:

$$z \to e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-z\bar{a}}, \tag{8}$$

где a - комплексное число (точка внутри круга).

Важно заметить, что, какую бы сложную и многолистную композицию мы ни выбрали, величина пространственных частот фазовой функции соответствующего элемента останется практически той же самой, так как эти частоты определяются не сложностью отображения, а только угловыми размерами фокальной картины, то есть в данном случае многоугольника.

Тем не менее,для практических применений приходится ограничиваться не слишком сложными композициями, чтобы не усложнять чрезмерно расчет фотошаблонов для фазовой функции. Этих простых композиций, впрочем,вполне достаточно для достижения приемлемого уровня устойчивости.

Фазовая функция для преобразования $z \to z^3$ имеет естественную симметрию четвертого порядка, так как градиент ее, задающий отображение, имеет симметрию третьего порядка.

Численный алгоритм

Для изготовления оптического элемента, фокусирующего лазерное излучение в заданную многоугольную область по формулам (1), необходимо построить фотошаблон для травления фазового рельефа на поверхности элемента. Чтобы изготовить эти фотошаблоны с помощью генератора изображений, фазовая функция f(x,y) по формулам (2), (3) должна быть численно определена на сетке из $N \times N$ точек.

Мы использовали в своих расчетах величину N=1024 с шагом между точками δ = 0,025 мм, что соответствует диаметру пучка лазерного излучения 25,6 мм, то есть исходный круг имел радиус R = 12.8 мм.

Соответствие между физическими координатами точки в круге радиуса R и математическими безразмерными координатами точки в единичном круге в формулах (2), (3) задается соотношением:

$$z = X/R + iY/R, \tag{9}$$

где (X, Y) - физические координаты (в миллиметрах).

Для вычисления f(x,y) нужно дважды вычислять первообразную от комплексной функции, причем подинтегральная функция в формуле (3) имеет полюса в точках, соответствующих выпуклым вершинам многоугольника (углы при которых меньше π). При приближении к ним следует производить интегрирование с особой тщательностью, так как,хотя эти особенности являются интегрируемыми (интеграл (3) в этих точках сходится), обычные приемы интегрирования, например, по формулам Симпсона, могут дать большую погрешность в окрестностях этих точек. Интегрирование ведется от центра круга до его границы по произвольному пути. Для удобства вычисления можно выбрать путь в виде двухзвенной ломаной: сначала по вертикали от 0 до нужного значения Y, потом по горизонтали от точки (0,Y) до точки (X,Y).

В окрестностях упомянутых точек, в которых подинтегральная функция в формуле (3) имеет особенность, первое интегрирование по формуле (3) можно не проводить в силу того, что в образах этих точек интенсивность когерентного поля лазерного излучения имеет нули, а просто положить $w(z) = a_k$ в окрестности подобной точки. Это даже улучшает визуальное качество фокального распределения энергии (многоугольник получается более четким).

Возникает проблема с хранением большого массива промежуточных величин N^2 значений $w(z)$. При выбранных нами параметрах эти данные занимают 8 Мбайт. Однако данную проблему можно решить благодаря комплексной аналитичности интегрируемых функций. Надо поступить следующим образом. Сначала вычисляется на горизонтальной оси круга интегрированием вдоль прямой, и этот результат хранится в одном массиве на N комплексных (на самом деле даже вещественных) величин. Потом, используя этот массив, получают путем интегрирования вдоль той же прямой массив из N вещественных значений $f(x,y)$. Затем независимо на каждой из вертикальных прямых, проходящих через круг вверх и вниз от горизонтальной оси, дважды производится интегрирование, дающее сначала массив из N значений $w(z)$, затем массив из N значений $f(x,y)$ на этой прямой, после чего значения $w(z)$ можно забыть, а значения $f(x,y)$ вывести в файл на диске для последующего использования при построении фотошаблонов генератором изображений.

Таким образом, предлагаемый алгоритм требует порядка 24 N байт для хранения промежуточных данных в процессе вычисления (в наших условиях - всего 24 Кбайт) и не обращается к дисковой памяти, что позволяет провести вычисления за приемлемое время (менее 2 ч на мини-компьютере).

Модельный пример

В качестве примера для апробации изложенных методов мы выбрали фокусировку в пятиугольную звезду (пентаграмму). Тот факт, что существует аналитическая фазовая функция, задающая форму поверхности искривленного зеркала, фокусирующего пучок лазерного излучения (круглый в сечении) в такую форму, вызывает невольное удивление своей красотой.

Для данного случая формула (3) упрощается до

$$w(z) = C\int_0^z (1-z^5)^{2/5}(1+z^5)^{-4/5}\,dz, \tag{10}$$

где константа C выражается через радиус звезды R и гамма-функцию:

$$C = R\,5\sqrt[5]{4}\,\Gamma(3/10)\Gamma(1/10)^{-1}\Gamma(1/5)^{-1}. \tag{11}$$

Заключение

Конформные отображения, возможности которых были неоднократно продемонстрированы в различных областях прикладной механики, гидродинамики и т.п., позволяют многое сделать и в задачах преобразования волновых фронтов лазерного излучения.

Это проявляется и в возможностях по управлению формой фокального распределения, и в возможности по перемешиванию пучка, и в возможностях, связанных с получением композиций нескольких отображений на одном (фазовом) элементе.

Однако для управления распределением энергии, по-видимому, следует иногда выходить за рамки конформных отображений, используя расширение формулы (5) для неконформных отображений:

$$J_w = \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 - \left|\frac{dw}{dz}\right|^2. \tag{12}$$

Некоторые указания по этому поводу можно получить в [2].

Литература

1. Березный А.Е., Сисакян И.Н. Оптические преобразования координат. Оптическая запись и обработка информации. Куйбышев, 1986, с. 22-28.

2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1986.