ЭВОЛЮЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ СВЕТОВЫХ ИМПУЛЬСОВ В ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКНАХ

Известно, что как источники оптического излучения, так и световоды подвержены случайным воздействиям [1]. Влияние флуктуаций диэлектрической проницаемости на эволюцию излучения, в том числе и нелинейную, достаточно подробно рассмотрено в [2-4]. Остановимся на исследовании эволюции коротких случайных импульсов по оптическому волокну, описываемому нелинейным уравнением Шредингера (НУШ).

В работах [5,6] методом интегрирования по траекториям в приближении заданного канала рассматривается нелинейное распространение коротких детерминированных импульсов гауссовской формы как при наличии слабого гауссовского шума (например, спонтанного лазерного излучения или его неполной синхронизации мод), так и при случайной фазовой модуляции стационарным гауссовским процессом, и анализируется эволюция их корреляционных характеристик.

Самовоздействие светового импульса типа "шумовой вспышки" вида

$$\psi_o(\tau) = \xi(\tau)U(\tau) \tag{1}$$

с гауссовской регулярной огибающей $U(\tau) = \exp(-\tau^2/2)$ и мультипликативным гауссовским шумом $\xi(\tau)$ рассмотрено различными методами в [7-9] на коротких расстояниях. В частности, в [7] показано, что с ростом η и $\varkappa$ мгновенное распределение решение НУШ все больше отличается от гауссовского.

Асимптотические характеристики решения НУШ на основе метода обратной задачи рассеяния для начальных условий типа солитон + шум $\psi_o(\tau) = \mathrm{sech}\,\tau + \xi(\tau)$ рассмотрены в [10], где отмечалась близость распределения решения НУШ к гауссовскому при сохранении односолитонного режима распространения (при малых флуктуациях), и отход от гауссовости с ростом флуктуаций, что объясняется нарушением односолитонности.

Статистические характеристики связанного состояния нескольких солитонов рассмотрены в [11,12].

Ограничиваясь односолитонным режимом распространения, рассмотрим статистические характеристики сигнала на выходе оптического волокна, описываемого НУШ

$$i\frac{\partial\psi}{\partial\eta} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2} + \varkappa|\psi|^2\psi = 0, \tag{2}$$

когда на вход его подается случайное воздействие $\psi(0,\tau) = \psi_o(\tau)$ произвольного вида. Для этого определим статистику решения уравнения (2) при некотором значении η. Аналогичная задача решалась в [13] применительно к уравнению Навье-Стокса.

Обозначим $u(\eta,\tau) = \mathrm{Re}\,\psi(\eta,\tau)$, $v(\eta,\tau) = \mathrm{Im}\,\psi(\eta,\tau)$ и рассмотрим вектор $z = (u,v)^T$. В этих обозначениях уравнение (2) с начальным условием $\psi(0,\tau) = \psi_o(\tau)$ переписывается в виде

$$\frac{\partial z}{\partial\eta} + A\,\frac{\partial^2 z}{\partial\tau^2} + \varkappa A|z|^2 z = z_o(\tau)\delta(\eta), \tag{3}$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, а $z_o(\tau) = (u(0,\tau),\ v(0,\tau))^T$. Таким образом, по известной статистике $z_o(\tau)$ требуется отыскать статистику решения $z(\eta,\tau)$ в точке η, которую удобно описывать в терминах характеристического функционала векторного аргумента $\theta(\tau)$

$$\Phi[\theta(\tau);\eta] = \langle\exp\{i\int_{-\infty}^{\infty}\theta^T(\tau)z(\eta,\tau)d\tau\}\rangle \tag{4}$$

или

$$\Phi[\theta(\tau);\eta] = \langle\exp\{i(\theta\cdot z)\}\rangle, \tag{5}$$

где угловые скобки обозначают статистическое усреднение.

Характеристический функционал дает полное статистическое описание процесса $z(\eta,\tau)$. Так, n-мерная плотность распределения вероятностей

$$p_n(z_1,\dots,z_n;\eta) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i(\theta_1^T z_1 + \dots + \theta_n^T z_n\right]\Phi[\theta_1,\dots,\theta_n;\eta]d\theta_1\dots d\theta_n,$$

$$z_i = z(\eta,\tau_i),\ \theta_i = \theta(\tau_i).$$

Через характеристический функционал можно также выразить и все моменты $z(\eta,\tau)$ [14].

Продифференцируем обе части уравнения (5) по η:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = \langle i(\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial\eta})\exp\{i(\theta\cdot z)\}\rangle$$

и подставим вместо $\partial z/\partial\eta$ ее выражение из (3):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = i(\theta\cdot\{-A\left\langle\frac{\partial^2 z}{\partial\tau^2}e^{i(\theta\cdot z)}\right\rangle - \varkappa A\langle|z|^2 z\, e^{i(\theta\cdot z)}\rangle + \delta(\eta)\langle z_0(\tau)e^{i(\theta\cdot z)}\rangle\}).$$

Поскольку $e^{i(\theta\cdot z)}$ не зависит от τ, то последнее уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = i(\theta\cdot\{-A\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}D\Phi + \varkappa A|D|^2 D\Phi + \delta(\eta)\langle z_0(\tau)e^{i(\theta\cdot z)}\rangle\}, \tag{6}$$

где $D = (D_1,D_2)^T$, $|D|^2 = D_1^2 + D_2^2$, а $D_\alpha = \delta/\delta\theta_\alpha(\tau)d\tau$, $\alpha = 1,2$ - оператор вариационного дифференцирования [14]. Заметив, что

$$\langle i(\theta\cdot z_0(\tau)e^{i(\theta\cdot z)}\delta(\eta)\rangle = \langle i(\theta\cdot z_0)e^{i(\theta\cdot z_0)}\delta(\eta)\rangle = \frac{\partial}{\partial\eta}\Phi_{z_0}[\theta],$$

получаем, что характеристический функционал решения НУШ в точке η является решением уравнения

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = (\theta\cdot\{-A\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}D\Phi + \varkappa A|D|^2 D\Phi\}) \tag{7}$$

с начальным условием $\Phi[\theta(\tau);0] = \Phi_{z_0}[\theta]$, где $\Phi_{z_0}[\theta]$ - характеристический функционал случайного сигнала в начале эволюции (при $\eta = 0$).

Уравнение (7) линейно относительно искомого функционала $\Phi[\theta(\tau);\eta]$, что удобно для численных расчетов и, кроме того, для него справедлив принцип суперпозиции, то есть если начальное условие есть сумма элементарных сигналов, то суммарный характеристический функционал равен сумме характеристических функционалов, соответствующих отдельным начальным сигналам.

Решение уравнения (7), как и в других аналогичных задачах, будем искать в виде функционального степенного ряда вида

$$\Phi = e^{\Phi_1+\Phi_2}(1 + \sum_{n=3}^{\infty}\Phi_n), \tag{8}$$

где Φ_n – однородные степенные функционалы степени n:

$$\Phi_1 = \Phi_1[\theta(\tau);\eta] = \int \theta^T(\tau)\varphi_1(\tau;\eta)d\tau,$$

$$\Phi_2 = \Phi_2[\theta(\tau);\eta] = \iint \theta^T(\tau)\varphi_2(\tau,s;\eta)\theta(s)d\tau ds, \ldots$$

Этот ряд аналогичен ряду Грама-Шарлье для функций распределения вероятностей [15]. Экспоненциальный множитель в (8) представляет собой характеристический функционал гауссовского случайного процесса, имеющего те же первые и вторые моменты, что и рассматриваемый сигнал, а ряд в скобках описывает его отклонение от гауссовости.

Учитывая, что вариационное дифференцирование уменьшает, а скалярное умножение на $\theta(\tau)$ увеличивает на единицу степень функционала Φ_n, после подстановки (8) в уравнение (7) и приравнивания друг другу функционалов одинаковой степени, получается бесконечная система вариационных уравнений. Для замыкания системы воспользуемся гипотезой Миллионщикова о том, что четвертые моменты распределения можно выразить через вторые. Такое допущение справедливо для гауссовских случайных процессов и на практике выполняется для реальных полей, рассматриваемых, например, в статистической гидромеханике [13], и в данном случае влечет за собой равенство $\Phi_4 = 0$.

Пренебрегая членами Φ_5 и более высокого порядка в указанном приближении получается следующая замкнутая система уравнений

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta} = (\theta\cdot\{-A\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}D\Phi_1 + \varkappa A[((D_1\Phi_1)^2 + (D_2\Phi_1)^2_1 D\Phi_1 + \tag{9}$$
$$+ 2D_1\Phi_1 D_1 D\Phi_2 + 2D_2\Phi_1 D_2 D\Phi_2 + |D|^2\Phi_2 D\Phi_1 + |D|^2 D\Phi_3]\})$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial\eta} = (\theta\cdot\{-A\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}D\Phi_2 + \varkappa A[((D_1\Phi_1)^2 + (D_2\Phi_1)^2)D\Phi_2 +$$
$$+ 2(D_1\Phi_1 D_1\Phi_2 + D_2\Phi_1 D_2\Phi_2)D\Phi_1 + 2(D_1\Phi_1 D_1 D\Phi_3 + D_2\Phi_1 D_2 D\Phi_3) + \tag{10}$$
$$+ 2(D_1\Phi_2 D_1 D\Phi_2 + D_2\Phi_2 D_2 D\Phi_2) + |D|^2\Phi_2 D\Phi_2 + |D|^2\Phi_3 D\Phi_1]\})$$

$$\frac{\partial\Phi_3}{\partial\eta} = (\theta\cdot\{-A\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}D\Phi_3 + \varkappa A[((D_1\Phi_1)^2 + (D_2\Phi_1)^2)D\Phi_3 +$$
$$+ 2(D_1\Phi_1 D_1\Phi_2 + D_2\Phi_1 D_2\Phi_2)D\Phi_2 + ((D_1\Phi_2)^2 + (D_2\Phi_2)^2)D\Phi_1 + \tag{11}$$
$$+ 2(D_1\Phi_1 D_1\Phi_3 + D_2\Phi_1 D_2\Phi_3)D\Phi_1 + 2(D_1\Phi_2 D_1 D\Phi_3 + D_2\Phi_2 D_2 D\Phi_3) +$$
$$+ |D|^2\Phi_2 D\Phi_3 + 2(D_1 D\Phi_2 D_1\Phi_3 + D_2 D\Phi_2 D_2\Phi_3) + |D|^2\Phi_3 D\Phi_3]\}).$$

Система уравнений (9-11) позволяет записать уравнения для первых трех моментных функций, которые допускают только лишь численное решение, однако один очень важный вывод из них следует сразу. Если входной сигнал $z_0(\tau)$ является гауссовским с нулевым математическим ожиданием, что справедливо, например, для шумовой вспышки вида (1), то из уравнений (7-9) следует $\Phi_1 \equiv 0$, $\Phi_3 \equiv 0$ и

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial\eta} = (\theta\cdot\{-A\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}D\Phi_2 + \varkappa A|D|^2\Phi_2 D\Phi_2 + \tag{12}$$
$$+ 2\varkappa A(D_1\Phi_2 D_1 D\Phi_2 + D_2\Phi_2 D_2 D\Phi_2)\}),$$

то есть сигнал на выходе оптического волокна, описываемого нелинейной моделью (3) с точностью до членов порядка Φ_5, подчиняется гауссовской статистике, корреляционная функция которой $\varphi_2(\tau,s;\eta)$ удовлетворяет уравнению в частных производных, которое можно записать из (12). В этом приближении оказывается обоснованным использование гауссовской модели, примененной, например, в [16] при анализе распространения шума.

Из (10) получаются уравнения, определяющие матрицу корреляций квадратурных компонент огибающей случайного сигнала. Если нет необходимости в полной статистике, а требуется найти только корреляционную функцию процесса на выходе волокна, описываемого моделью (2), то можно воспользоваться иными методами. Так, в работе [5], используя метод интегрирования по траекториям исследована корреляционная функция отклика на входной сигнал вида $\psi_0(\tau) = e^{-\tau^2} + n(\tau)$, где $n(\tau)$ - гауссовский шум с нулевым средним, показано, что на начальном этапе эволюции форма гауссовского импульса не искажается: изменяются лишь его длительность и время корреляции, а влияние шума сводится к дополнительному расплыванию импульса. В [6] тем же методом исследованы корреляционные функции огибающей и интенсивности сигналов с начальной случайной фазовой модуляцией.

Непосредственно из НУШ с затуханием β в [9] с использованием известных методов анализа самовоздействия случайных волн в нелинейных диспергирующих средах [1,17] и ограничиваясь гауссовским приближением для $B(\tau,s;\eta) = \langle\psi(\eta,\tau)\psi^*(\eta,s)\rangle$ получено уравнение

$$i\frac{\partial B(\tau,s;\eta)}{\partial\eta} + \frac{\partial^2 B(\tau,s;\eta)}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2 B(\tau,s;\eta)}{\partial s^2} + \\ + 2\varkappa[B(\tau,\tau,\eta) - B(s,s;\eta)]B(\tau,s;\eta) + \\ + 2i\beta B(\tau,s;\eta) = 0, \tag{13}$$

подробный анализ которого проведен в [9,18] для входного импульса вида (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981.-640 с.

2. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Тарарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. М.: Наука, 1978, 464 с.

3. Безиерис И. Солитоны в среде со случайными неоднородностями. В кн.: Нелинейные электромагнитные волны / Под ред. П. Усленги. М.: Мир, 1983, С. 70-91.

4. Zhao Y. Soliton propagation in optical fiber with random perturbations // Optics Communications, 1988, Vol. 68, N 1, P. 21-24.

5. Фаттахов А.М., Чиркин А.С. Влияние шума на распространение световых импульсов в оптических волокнах // Квантовая электроника, 1983, Т. 10, № 10, С. 1989-1996.

6. Фаттахов А.М., Чиркин А.С. Нелинейное распространение фазово-модулированных световых импульсов // Квантовая электроника, 1984, Т. 11, № 11, С. 2349-2355.

7. Фаттахов А.М., Чиркин А.С. Распространение шумовых сверхкоротких импульсов света в диспергирующих нелинейных средах // Известия АН СССР. Сер. Физическая, 1985, Т. 49, № 3, С. 553-557.

8. Кандидов В.П., Шлёнов С.А. Статистика частично-когерентного излучения в среде с кубической нелинейностью // Известия вузов. Радиофизика, 1984, Т. 27, № 9, С. 1158-1167.

9. Кловский Д.Д., Сисакян И.Н., Шварцбург А.Б., Широков С.М. Статистические характеристики нелинейной эволюции случайного импульса в волоконном световоде // Радиотехника и электроника, 1987, Т. 32, № 4, С. 740-746.

10. Выслоух В.А., Иванов А.В., Чередник И.В. Статистика флуктуаций односолитонных решений нелинейного уравнения Шредингера // Известия вузов. Радиофизика, 1987, Т. 30, № 8, С. 980-990.

11. Выслоух В.А., Иванов А.В. Статистические характеристики оптических солитонов // Известия АН СССР. Сер. Физическая, 1988, Т. 52, № 2, С. 359-363.

12. Выслоух В.А., Сухотскова Н.А. Самосжатие и автомодуляционная неустойчивость случайномодулированных многосолитонных импульсов в волоконных световодах // Письма в ЖТФ, 1988, Т. 14, Вып. 9, С. 818-823.

13. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидродинамика. М.: Наука, 1967. Ч. 2.–720 с.

14. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967.

15. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982. - 624 с.

16. Ахманов С.А. Статистические эффекты в резонансной нелинейной оптике. - В кн.: Нелинейная спектроскопия / Под ред. Н. Бломбергена. М.: Мир, 1979, С. 347-368.

17. Пасманик Г.А. Самовоздействие пучков некогерентного света // ЖЭТФ, 1974, Т. 66, № 2, С. 490-500.

18. Шерман А.Ю., Широков С.М. Исследование нелинейного волоконно-оптического канала. - В сб.: Оптическая запись и обработка информации. Куйбышев: КуАИ, 1988, С. 52-62.