

ФОКУСАТОРЫ В ОТРЕЗОК, СОСТАВЛЯЮЩИЙ ПРОИЗВОЛЬНЫЙ УГОЛ С ОПТИЧЕСКОЙ ОСЬЮ

ВВЕДЕНИЕ

Задачу фокусировки можно сформулировать следующим образом: с помощью оптического элемента сконцентрировать энергию излучения в заданной области пространства с заданным распределением интенсивности. Эта задача всегда являлась одной из важнейших в оптике. Долгое время она решалась с помощью классических изображающих систем - линз, цилиндрических линз, зеркал, аксиконов и т. п. [1], которые не позволяли получать разнообразные фокальные области.

Появление лазеров поставило задачу фокусировки монохроматического излучения. Развитие технологии микроэлектроники позволило создать принципиально новые оптические элементы [2], соединяющие свойства цифровых голограмм [3] и профилированных зонных пластинок [4]. Действие этих элементов, названных элементами компьютерной оптики, обусловлено рассчитанным на ЭВМ микрорельефом сложной формы [5, 6]. Рельеф наносится на плоскую поверхность через комплект согласованных фотошаблонов стандартными методами литографии [7]. Фотошаблоны рассчитываются на ЭВМ, исходя из функционального назначения элемента. В частности, для расчета фокусатора исходными данными являются распределение интенсивности фокусируемого излучения, форма фокальной области и распределение интенсивности в ней.

Технология изготовления элемента компьютерной оптики зависит только от высоты рельефа, размера зон и используемого материала (металл, стекло, кварц, цинк-селен, германий, кремний и др.) и не зависит от функционального назначения элемента. Поэтому основным этапом при проектировании новых элементов является расчет формы поверхности, осуществляющей заданное преобразование излучения. На это и будет обращено основное внимание в настоящей работе.

Расчет фокусатора является обратной задачей: необходимо рассчитать характеристики элемента, преобразующего излучение заданным образом.

Один из методов решения этой задачи заключается в использовании дифракционного интеграла Френеля-Кирхгофа [8], позволяющего вычислить поле в точке (x, y, z) по известному полю $A(u, v)$ в плоскости оптического элемента. (Рассматриваются стационарные монохроматические поля.)

Действие фокусатора обусловлено отражением (преломлением) лучей на его поверхности. Пренебрегая энергетическими потерями, которые в оптическом диапазоне невелики, положим, что на поверхности фокусатора падающее поле и преобразованное фокусатором имеют одинаковое распределение интенсивности. (Отметим, что данное приближение неприменимо к элементам

рентгеновского диапазона, где энергетическими потерями пренебречь нельзя.) А поскольку высота рельефа фокусатора невелика (порядка длины волны), будем считать, что эти два поля имеют одинаковое распределение интенсивности в плоскости (u, v) .

Пусть ось z перпендикулярна плоскости оптического элемента (u, v) . Запишем интеграл Френеля-Кирхгофа в форме

$$U(x, y, z) = -\frac{ik}{2\pi} \iint_G A(u, v) \frac{z}{r} \frac{e^{i(kr+\psi)}}{r} du dv,$$

где r - расстояние между точками (x, y, z) и (u, v)

ψ - набег фазы, вносимый фокусатором;

G - апертура оптического элемента;

k - волновое число ($k=2\pi/\lambda$; λ - длина волны излучения).

Если записать требуемую интенсивность в точке (x, y, z) как $I(x, y, z) = |U(x, y, z)|^2$, то получим интегральное уравнение относительно функции ψ , характеризующей требуемое изменение фазы излучения элементом, то есть определяющей профиль его поверхности:

$$I(x, y, z) = \left| -\frac{ik}{2\pi} \iint_G A(u, v) \frac{z}{r} \frac{e^{i(kr+\psi)}}{r} du dv \right|^2. \quad (1)$$

Класс функций $I(x, y, z)$, для которых существует решение уравнения (1), неизвестен. Ясно, что задача переопределена и распределение интенсивности на нескольких плоскостях или кривых уже определяет поле во всем пространстве.

Целесообразно выделить два широких класса обратных задач фокусировки - получение заданного распределения интенсивности на плоскости (в общем случае - на двумерной поверхности) и на плоской (пространственной) кривой. Этим проблемам посвящена обширная литература, обзор которой выходит за рамки данной работы. Мы рассмотрим задачу фокусировки в пространственную кривую, воспользовавшись приближением геометрической оптики.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ФОКУСИРОВКИ В ПРОСТРАНСТВЕННУЮ КРИВУЮ В ПРИБЛИЖЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Под задачей фокусировки в пространственную кривую в геометрико-оптическом приближении будем понимать задачу создания такого поля, все лучи которого проходят через эту кривую. Данная кривая является вырожденной каустикой и называется фокальной кривой.

Понятие интенсивности сфокусированного излучения на кривой нуждается в дополнительном обсуждении. Ясно, что геометрическая оптика не позволяет определить интенсивность поля на фокальной кривой. Определение интенсивности через интеграл Кирхгофа не учитывает дифракционной ширины полученной кривой. В [9] введено используемое ниже понятие интегральной интенсивности, основанное на законе сохранения энергии и учитывающее

дифракционную ширину кривой. Сравнение двух различных определений интенсивности проведено в [10].

Итак, пусть на оптический элемент (отражающий или преломляющий) падает излучение с известным распределением интенсивности. Все лучи преобразованного фокусатором поля проходят через заданную фокальную кривую L , создавая на ней заданное распределение интенсивности. Требуется рассчитать профиль поверхности элемента, осуществляющего такое преобразование излучения.

Пусть фокусатор занимает область G в плоскости $z=0$. Положение точки на фокальной кривой будем характеризовать натуральным параметром θ - длиной вдоль этой кривой, отсчитываемой от некоторой ее точки. Обозначим через $M(\theta)$ точку на кривой, соответствующую значению θ натурального параметра.

Задание системы лучей, выходящих из области G и проходящих через кривую L , определяет отображение области G на кривую L . Будем рассматривать однократно вырожденные отображения, при которых прообразом каждой точки $M(\theta)$ кривой L является кривая в области G , называемая слоем и обозначаемая $\Gamma(\theta)$. Случай двукратного вырождения, когда в некоторые точки кривой L отображаются двумерные области, рассматриваться нами не будет.

В основе дальнейших рассуждений лежит следующее утверждение [9]. Если все лучи поля проходят через некоторую кривую L так, что в каждую точку этой линии приходит однопараметрическое семейство лучей, то это семейство лучей образует круговой конус (рис. 1), причем все лучи этого конуса приходят в точку $M(\theta)$ с одинаковым эйконалом $F(\theta)$. Ось конуса касательна к кривой L в этой точке, а угол между осью и образующими конуса $\omega(\theta)$ связан с производной эйконала в этой точке соотношением

$$\cos \omega(\theta) = \frac{dF(\theta)}{d\theta}. \quad (2)$$

Выбор угла $\omega(\theta)$ показан на рис. 1, на котором $\theta_2 > \theta_1$.

Непосредственно из сформулированной теоремы следует, что слой $\Gamma(\theta)$ состоит из связанных компонент, каждая из которых является пересечением конуса лучей, приходящих в точку $M(\theta)$, и области G , занимаемой фокусатором в плоскости $z=0$.

Заметим, что наличие нескольких компонент у слоя $\Gamma(\theta)$ может быть обусловлено и тем, что область G разбита на несколько частей, каждая из которых отображается на всю кривую L . Исключив данный случай, будем рассматривать гладкие отображения, у которых эйконал преобразованного фокусатором поля - гладкая в области G функция. Однако и в случае гладкого эйконала в точку $M(\theta)$ может отображаться несколько кривых. При этом в окрестности точки $M(\theta)$ возникает сложная интерференционная структура, описание которой требует решения дифракционной задачи. Данная ситуация рассматриваться нами не будет. Будем считать, что слой $\Gamma(\theta)$ - одна или

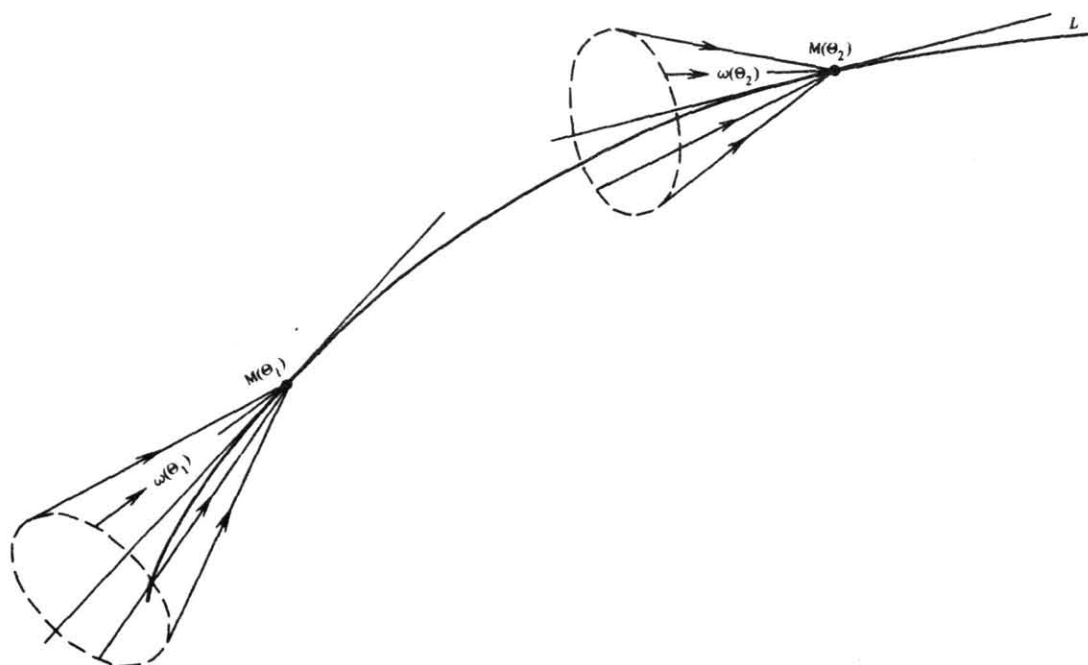


Рис. 1. Лучевая структура поля, имеющего фокальную линию

несколько связных компонент одного конического сечения, причем в случае гиперболы берутся компоненты только одной из ее ветвей.

Предположим, что для некоторой задачи фокусировки мы нашли слой $\Gamma(\theta)$ для всех точек фокальной кривой. Следовательно, мы знаем и угол $\omega(\theta)$ между осью и образующими конуса, приходящего в каждую точку $M(\theta)$. Воспользовавшись соотношением (2), можно найти значения эйконала $F(\theta)$ в точках фокальной кривой. (В рассматриваемом случае $F(\theta)$ - однозначная гладкая функция.) Если учесть теперь оптический путь от точек слоя $\Gamma(\theta)$ до соответствующей этому слою точки $M(\theta)$, можно найти (с точностью до константы, которая в данном случае не существенна) значения эйконала в точках слоя.

Для существования однозначного и гладкого решения необходимо, чтобы:

- 1) слои не пересекались в области G ;
- 2) слои в своей совокупности заполняли всю область G .

При этом знание эйконала в точках всех слоев эквивалентно знанию эйконала $\chi(u, v)$ преобразованного фокусатором излучения в точках (u, v) области G . Из уравнения эйконала можно определить значения эйконала $\Phi_2(u, v, z)$ этого излучения в окрестности области $G(\chi(u, v) = \Phi_2(u, v, 0))$.

Эйконал падающего на фокусатор излучения $\Phi_1(u, v, z)$ известен. Поверхность фокусатора $z = z(u, v)$ находится из уравнения [11]

$$\Phi_2(u, v, z) - \Phi_1(u, v, z) = \lambda C(u, v). \quad (3)$$

Если $C = \text{const}$, то уравнение (3) определяет гладкую поверхность, решающую поставленную задачу. В то же время при фокусировке стационарных

монохроматических полей эйконал $\Phi_2(u, v, z)$ можно получать с точностью до величин, кратных λ . При этом в уравнении (3) $C=C(u, v)$ - целочисленная кусочно-постоянная функция, выбираемая так, чтобы высота рельефа была минимальной. В этом случае уравнение (3) определяет искомым кусочно-непрерывный рельеф.

Итак, решение задачи фокусировки разделяется на два этапа:

1. Определение эйконала $\chi(u, v)$ преобразованного фокусатором поля, исходя из следующих положений:

а) все лучи этого поля проходят через фокальную кривую L ;

б) на этой кривой создается заданное распределение интенсивности $I(\theta)$;

в) в области G это поле имеет заданное распределение интенсивности, совпадающее с распределением интенсивности $J(u, v)$ падающего на фокусатор излучения.

Отметим, что для существования решения необходимо, чтобы $I(\theta)$ и $J(u, v)$ были связаны условием нормировки:

$$\int_L I(\theta) d\theta = \iint_G J(u, v) du dv = W, \quad (4)$$

где W - полная энергия лазерного пучка, падающего на фокусатор.

2. Определение профиля поверхности фокусатора $z=z(u, v)$, преобразующего известное падающее на фокусатор лучевое поле в найденное на первом этапе преобразованное поле. Этот этап стандартен для задач фокусировки [11].

Первый этап, как показано выше, может быть сведен к нахождению семейства слоев $\Gamma(\theta)$, фокусирующихся в точки фокальной кривой для всех $M(\theta) \in L$.

Определим интегральную интенсивность на кривой L . Зададим кривую L параметрически:

$$\begin{cases} u=u_0(\theta) \\ v=v_0(\theta) \\ z=z_0(\theta) \end{cases} \quad (5)$$

где θ - натуральный параметр на кривой.

Направление оси конуса лучей, проходящих через точку $M(\theta)$, определяется вектором $(\dot{u}_0(\theta), \dot{v}_0(\theta), \dot{z}_0(\theta))$.

Рассмотрим $M(\theta)$ и $M(\theta+\Delta\theta)$ - две точки на кривой L , соответствующие значениям θ и $\theta+\Delta\theta$ натурального параметра. Пусть в точку $M(\theta)$ приходит излучение с некоторой кривой $\Gamma(\theta)$, а в точку $M(\theta+\Delta\theta)$ - с кривой $\Gamma(\theta+\Delta\theta)$ области G . Пусть эти кривые ограничивают область фокусатора $G(\Gamma(\theta), \Gamma(\theta+\Delta\theta))$, из которой излучение в случае непрерывного отображения фокусируется в дугу $M(\theta)M(\theta+\Delta\theta)$ кривой L (рис. 2).

Рассмотрим функцию

$$i(\theta) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \iint_{G(\Gamma(\theta), \Gamma(\theta+\Delta\theta))} J(u, v) du dv / \Delta\theta \quad (6)$$

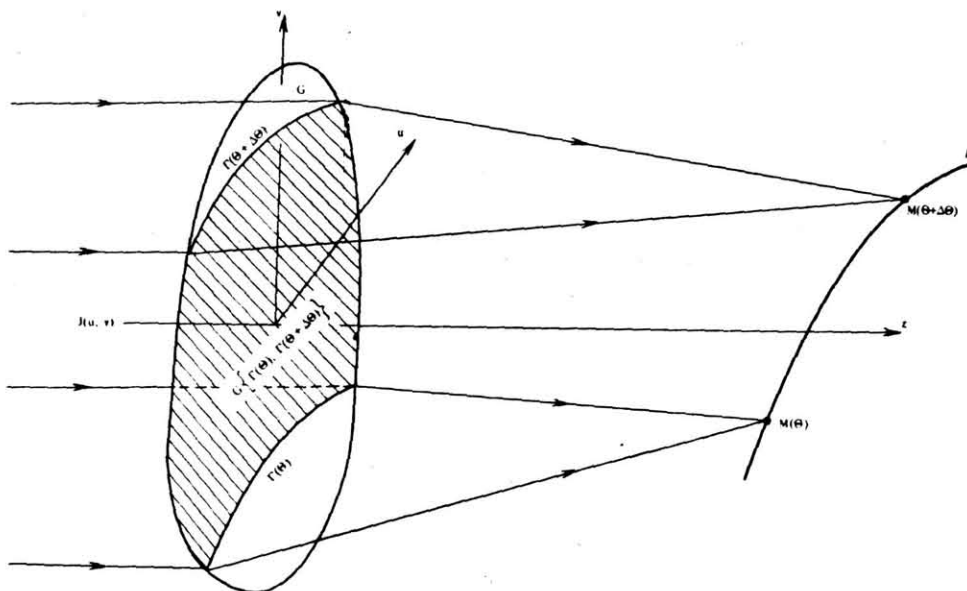


Рис. 2. К выводу уравнения для нахождения семейства слоев

Если указанный предел существует, то функцию $i(\theta)$ назовем интегральной интенсивностью (или просто интенсивностью) на кривой L в точке $M(\theta)$.

Такая трактовка функции $i(\theta)$ обусловлена следующим. Если проинтегрировать обе части (6) по $d\theta$ от θ_1 до θ_2 , то, поскольку область $G(\Gamma(\theta_1), \Gamma(\theta_2))$ отображается в дугу $M(\theta_1), M(\theta_2)$, получим уравнение, имеющее смысл закона сохранения энергии

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} i(\theta) d\theta = \iint_{G(\Gamma(\theta_1), \Gamma(\theta_2))} J(u, v) du dv, \quad (7)$$

в котором $i(\theta)$ имеет смысл именно интенсивности в точке $M(\theta)$. В дальнейшем мы не будем делать различия между $i(\theta)$ и $I(\theta)$, считая, что заданное распределение интенсивности $I(\theta)$ удовлетворяет определению (6).

Рассмотрим теперь вид самих слоев. Из сформулированной выше теоремы следует, что они являются фрагментами конических сечений, то есть в общем случае - участками гиперболы (одной из ветвей), параболы или эллипса, а в вырожденном случае - участками окружности или прямой.

Если фокальная линия представляет собой отрезок, параллельный оси фокусатора, то слои - концентрические окружности [12, 13].

Если же фокальная кривая лежит в плоскости, параллельной плоскости фокусатора, и фокусное расстояние $f \gg D$ и $f \gg L$ (D - диаметр элемента, L - длина фокальной кривой), то являющиеся в этом случае слоями фрагменты гипербол можно с хорошей точностью аппроксимировать отрезками прямых [14].

В случае пространственной кривой необходимо рассматривать слои $\Gamma(\theta)$ как фрагменты кривых второго порядка. Этот подход и предложен в настоящей работе, что позволит рассмотреть более широкий класс задач фокусировки.

Обратимся к закону сохранения энергии, записанному в форме (7). Зафиксируем одну из точек фокальной кривой со значением параметра θ_0 и предположим, что мы нашли (например, из энергетических или геометрических соображений) соответствующий ей слой $\Gamma(\theta_0)$. Положим в (7) $\theta_1 = \theta_0$. В качестве точки со значением параметра θ_2 будем рассматривать произвольную точку $M(\theta)$ фокальной кривой. Тогда выражение (7) примет вид

$$\int_{\theta_0}^{\theta} I(\vartheta) d\vartheta = \iint_{G(\Gamma(\theta_0), \Gamma(\theta))} J(u, v) du dv \quad (8)$$

В свою очередь геометрия $\Gamma(\theta)$ определяется углом ω между осью конуса лучей, приходящих в точку $M(\theta)$, и его образующими. Обозначим за $\Upsilon(\theta, \omega)$ виртуальный слой, соответствующий точке $M(\theta)$ и углу ω . При этом $\Gamma(\theta) = \Upsilon(\theta, \omega(\theta))$, а функция $\omega(\theta)$ определяется уравнением

$$\int_{\theta_0}^{\theta} I(\vartheta) d\vartheta = \iint_{G(\Gamma(\theta_0), \Upsilon(\theta, \omega))} J(u, v) du dv \quad (9)$$

А как было показано выше, по функции $\omega(\theta)$ можно найти функцию $F(\theta)$, семейство слоев $\Gamma(\theta)$, а затем функцию $\chi(u, v)$, определяющую профиль поверхности фокусатора.

Итак, пусть требуется сфокусировать лазерный пучок с распределением интенсивности $J(u, v)$ в плоскости $z=0$ в заданную кривую L с распределением интенсивности $I(\theta)$ вдоль этой кривой. Тогда в каждую точку θ кривой L может фокусироваться линия $\Upsilon(\theta, \omega)$, являющаяся фрагментом кривой второго порядка – пересечением области G , занимаемой фокусатором в плоскости $z=0$, и кругового конуса с вершиной в точке $M(\theta)$, осью, совпадающей с касательной к кривой L в точке $M(\theta)$, и углом между осью и образующими конуса ω (рис. 3).

Для расчета фокусатора можно зафиксировать некоторую точку θ_0 на кривой L , найти соответствующий ей слой $\Gamma(\theta_0)$, а для всех остальных точек $M(\theta)$ кривой L из уравнения (9) найти значение функции $\omega(\theta)$.

Рассмотрение слоев как кривых второго порядка существенно расширяет класс рассматриваемых задач фокусировки. Однако уравнение (9) в общем виде не позволяет явно выразить $\omega(\theta)$ как функцию $\theta, I(\theta), J(u, v)$ и геометрические параметры задачи. Ниже будет рассмотрена задача фокусировки в отрезок, составляющий произвольный угол с оптической осью, для которой построен и реализован на ЭВМ алгоритм расчета функций $\omega(\theta)$ и $\chi(u, v)$. Эта задача является базовой для фокусировки в пространственную кривую, поскольку

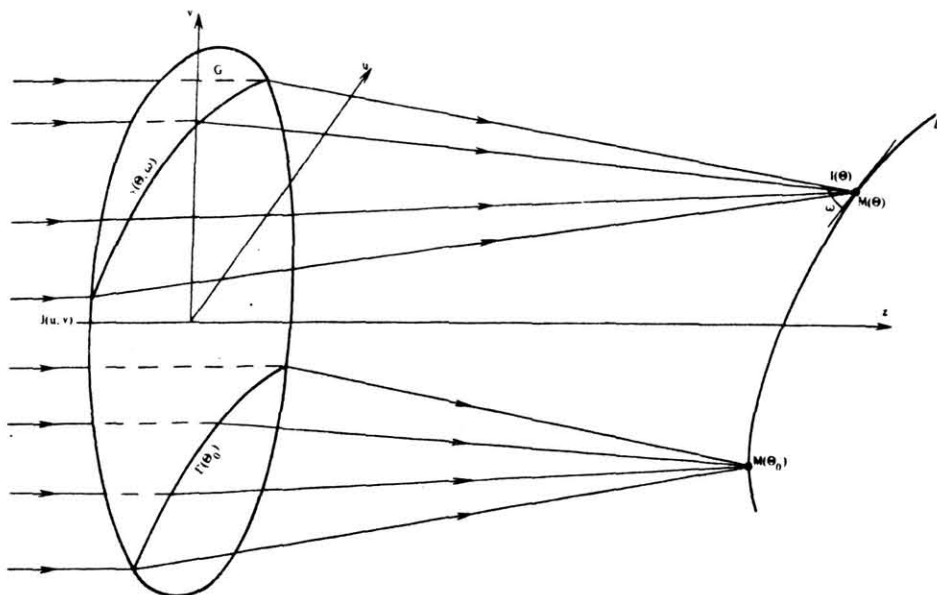


Рис. 3. К постановке задачи фокусировки

предложенный алгоритм может быть с незначительными изменениями распространен на случай произвольной кривой.

2. УРАВНЕНИЕ СЛОЯ В ЗАДАЧЕ ФОКУСИРОВКИ В ОТРЕЗОК

Зададим отрезок параметрически:

$$\begin{cases} u=0 \\ v=\theta \sin \varphi \\ z=f+\theta \cos \varphi \end{cases}, \quad (10)$$

где φ - угол наклона отрезка к оптической оси ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$), а θ - натуральный параметр ($-L/2 \leq \theta \leq L/2$, L - длина отрезка). Чтобы избежать громоздких формул, мы предположили, что отрезок лежит в плоскости $u=0$, а его середина - на оси z (рис. 4).

При этом мы рассматриваем случай нормального падения лазерного пучка на фокусатор, однако полученные результаты легко могут быть перенесены на случай наклонного падения, согласно методу, предложенному в [15].

Уравнение кругового конуса с вершиной в точке θ и углом ω между осью конуса (в данном случае она совпадает с прямой, на которой лежит отрезок) и его образующими есть

$$\begin{aligned} &u^2 \cos^2 \omega + (v \cos \varphi - z \sin \varphi + f \sin \varphi^2) \cos^2 \omega - \\ &-(z \cos \varphi + v \sin \varphi - f \cos \varphi - \theta)^2 \sin^2 \omega = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

При $\omega = \pi/2$ конус вырождается в плоскость.

Отметим, что уравнение (11) описывает полный конус, то есть как лучи, приходящие в $M(\theta)$, так и лучи, выходящие из этой точки.

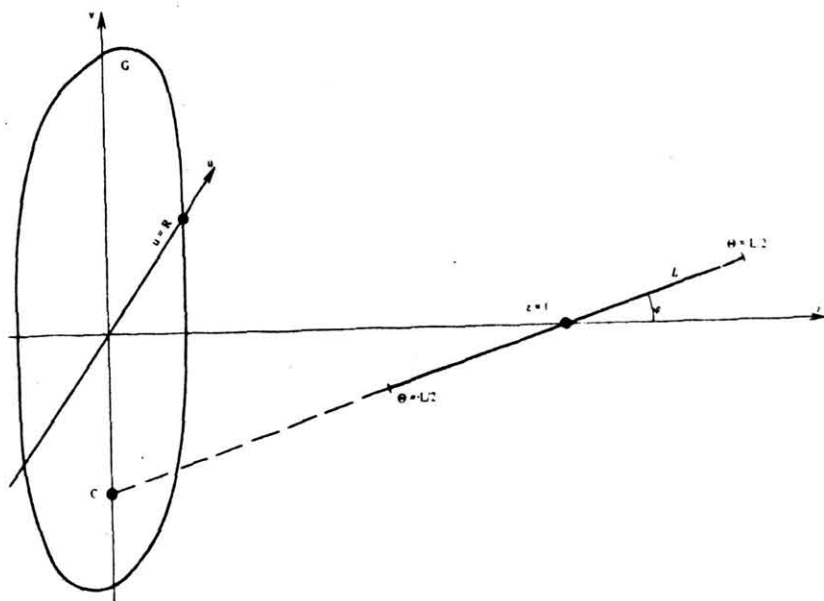


Рис. 4. Взаимное расположение фокусатора и фокального отрезка

В пересечении с плоскостью фокусатора $z=0$ получаем кривую второго порядка

$$u^2 + v^2 \frac{\cos^2 \omega - \sin^2 \varphi}{\cos^2 \omega} + 2v \sin \varphi [f \cos \varphi + (f \cos \varphi + \theta) \operatorname{tg}^2 \omega] + [f^2 \sin^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \omega (f \cos \varphi + \theta)^2] = 0, \quad (12)$$

если $\omega \neq \pi/2$, и прямую, параллельную оси u

$$v = f \operatorname{ctg} \varphi + \frac{\theta}{\sin \varphi}, \quad (13)$$

если $\omega = \pi/2$.

При $\cos^2 \omega - \sin^2 \varphi > 0$ (или $\omega + \varphi < \pi/2$) кривая второго порядка будет эллипсом

$$\frac{u^2}{a^2(\theta, \omega)} + \frac{(v + d(\theta, \omega))^2}{b^2(\theta, \omega)} = 1, \quad (14)$$

при $\cos^2 \omega - \sin^2 \varphi = 0$ (или $\omega + \varphi = \pi/2$) - параболой

$$u^2 = -2p(\theta, \omega)(v + c(\theta, \omega)), \quad (15)$$

при $\cos^2 \omega - \sin^2 \varphi < 0$ (или $\omega + \varphi > \pi/2$) - гиперболой

$$\frac{(v - d(\theta, \omega))^2}{b^2(\theta, \omega)} - \frac{u^2}{a^2(\theta, \omega)} = 1, \quad (16)$$

где

$$a(\theta, \omega) = \frac{\sin \omega (f + \theta \cos \varphi)}{\sqrt{|\cos^2 \omega - \sin^2 \varphi|}} \quad (17)$$

$$b(\theta, \omega) = \frac{\sin \omega |\cos \omega| (f + \theta \cos \varphi)}{|\cos^2 \omega - \sin^2 \varphi|} \quad - \quad (18)$$

полуоси эллипса и гиперболы вдоль осей u и v соответственно,

$$p(\theta, \omega) = \sin \varphi [f \cos \varphi + (f \cos \varphi + \theta) \operatorname{tg}^2 \omega] \quad - \quad (19)$$

фокальный параметр параболы,

$$c(\theta, \omega) = \frac{f^2 \sin^2 \varphi - (f \cos \varphi + \theta)^2 \operatorname{tg}^2 \omega}{2 \sin \varphi [f \cos \varphi + (f \cos \varphi + \theta) \operatorname{tg}^2 \omega]} \quad - \quad (20)$$

расстояние между вершиной параболы и центром фокусатора,

$$d(\theta, \omega) = \frac{[f \cos \varphi + (f \cos \varphi + \theta) \operatorname{tg}^2 \omega] \sin \varphi \cos^2 \omega}{|\cos^2 \omega - \sin^2 \varphi|} \quad - \quad (21)$$

расстояние между центром эллипса или гиперболы и центром фокусатора.

Для определения $\Gamma(\theta)$ теперь необходимо найти пересечение области G с указанными кривыми. Возможные варианты пересечений рассматриваются в разд. 5. Еще раз отметим, что слой $\Gamma(\theta)$ не обязательно является связной кривой (примеры, когда $\Gamma(\theta)$ состоит из двух связных компонент, приведены ниже). Вместе с тем $\Gamma(\theta)$ должен содержать все связные компоненты пересечения эллипса, параболы или ветви гиперболы с областью G . В противном случае функция $F(\theta)$ не будет однозначно определена на кривой L .

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛОЯ $\Gamma(\pm L/2)$

Рассмотрим теперь слои, соответствующие концам отрезка. Для гладкости функции $\chi(u, v)$ необходимо, чтобы слои $\Gamma(\pm L/2)$ не разбивали область G на две непересекающиеся области. Если $\Gamma(\pm L/2)$ — линия, разбивающая G на две части, то на этой линии либо отображение области G на кривую L будет иметь разрыв, либо функция $F(\theta)$ не будет однозначной.

Пусть область G — круг радиуса R . Это соответствует форме пучка большинства лазеров.

Поскольку слой $\Gamma(\pm L/2)$ — пересечение кривой второго порядка с областью G (которая берется здесь вместе со своей границей), указанному условию на $\Gamma(\pm L/2)$ могут удовлетворять:

- а) точка внутри области G (вырожденный эллипс с $\omega=0$);
- б) точка на границе области G (кривая второго порядка и граница области G касаются в одной точке);
- в) две точки на границе области G (кривая второго порядка и граница области G касаются в двух точках);
- г) вся граница области G (слой-окружность радиуса R).

Но слой-окружности отвечают только случаю $\varphi=0$, который рассмотрен в [5]. Таким образом, при $\varphi=0$ могут иметь место только первые три случая.

Уточним теперь возможности реализации этих случаев для непрерывного решения. При попадании точки C - пересечения прямой, на которой лежит отрезок L , и плоскости $z=0$ - внутрь области $G(\operatorname{tg} \varphi \leq R/f)$ (рис. 4) точка C отображается в один из концов отрезка. Если бы точка C отображалась внутрь отрезка, то либо отображение области G на кривую L было бы разрывным, либо функция $F(\theta)$ была бы многозначной. Легко показать также, что построение решения, гладкого всюду, кроме точки C , невозможно.

В случае же попадания точки C вне области $G(\operatorname{tg} \varphi > R/f)$ концам отрезка будут соответствовать кривые, касающиеся противоположных краев фокусатора. При этом касание может происходить как в одной, так и в двух точках. Если коническое сечение касается G в двух точках, то слоев должны быть обе эти точки. В противном случае нарушается либо гладкость отображения, либо однозначность функции $F(\theta)$.

Из приведенных рассуждений следует, что в качестве фиксированной точки θ_0 в (8) следует брать один из концов отрезка, ибо соответствующий ему слой может быть найден из геометрических соображений. Для определенности выберем $\theta_0 = -L/2$.

Дальнейшее построение решения имеет два варианта:

1. Точке $\theta_0 = -L/2$ соответствует или точка C (если $\operatorname{tg} \varphi \leq R/f$), или кривая, касающаяся нижнего края области G (если $\operatorname{tg} \varphi > R/f$).
2. Точке $\theta_0 = -L/2$ соответствует кривая, касающаяся верхнего края области G .

Оба варианта равноправны, поставленная задача имеет два непрерывных решения. Для определенности рассмотрим первый вариант.

4. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ФУНКЦИИ $\omega(\theta)$

Уравнение (9) для задачи фокусировки в отрезок приобретает вид:

$$\int_{-L/2}^{\theta} I(\vartheta) d\vartheta = \iint_{G(\Gamma(-L/2), \Gamma(\theta, \omega))} J(u, v) du dv, \quad (22)$$

где слой $\Gamma(-L/2)$ отвечает указанным выше условиям. При этом для каждой фиксированной точки θ левая часть (22) есть число, заключенное между 0 и W (см. (4)), а правая - монотонная функция угла ω , принимающая значения от 0 до W . Таким образом, для каждой точки θ существует и единственное значение угла ω , удовлетворяющее уравнению (22). Итак, уравнение (22) определяет функцию $\omega(\theta)$, которая всегда существует. Для существования гладкой $\chi(u, v)$ необходимо, чтобы слои $\Gamma(\theta)$, определенные по функции $\omega(\theta)$, не пересекались внутри области G . В этом случае по $\omega(\theta)$ находим функцию $\chi(u, v)$, а по ней - профиль поверхности фокусатора в отрезок. Однако в общем виде это уравнение неразрешимо, и построение решения следует проводить численными методами.

Ниже предложен алгоритм построения решения для равномерного распределения интенсивности как в пучке ($J(u, v) = J_0$), так и вдоль отрезка ($I(\theta) = I_0$). Его легко видоизменить применительно к любым другим распределениям.

Для выбранных же распределений интенсивности уравнение (22) принимает вид:

$$I_0(\theta + L/2) = J_0 S(\theta, \omega), \quad (23)$$

где $S(\theta, \omega)$ - площадь области $G(\Gamma(-L/2), \Upsilon(\theta, \omega))$, а условие нормировки (4) -

$$I_0 L = J_0 \pi R^2. \quad (24)$$

Разделив (23) на (24), получаем

$$\frac{S(\theta, \omega)}{\pi R^2} = \frac{\theta + L/2}{L}. \quad (25)$$

Как будет показано ниже, во всех случаях взаимного расположения слоя $\Upsilon(\theta, \omega)$ и области G удается найти явный вид функции $S(\theta, \omega)$, что позволяет, решая уравнение (25), найти функцию $\omega(\theta)$.

5. ГЕОМЕТРИЯ СИСТЕМЫ СЛОЕВ

Слой (кривая второго порядка) может иметь с окружностью - границей области G - 0, 2 или 4 точки пересечения, 1 или 2 точки касания, а также 1 точку касания и 2 точки пересечения одновременно. Будут рассмотрены все возможные случаи.

Как уже было отмечено, вид слоя $\Gamma(-L/2)$ зависит от того, попадает точка C внутрь или вне области G .

Рассмотрим сначала случай, при котором точка C расположена внутри области G . В этом случае слоем $\Gamma(-L/2)$ является точка C .

Найдем явный вид функции $S(\theta, \omega)$. Зафиксируем точку отрезка $M(\theta)$ и найдем значения ω , при которых $\Upsilon(\theta, \omega)$ касается границы области G . При переходе через эти точки происходит изменение вида зависимости S от θ и ω .

Касание нижнего края возможно только в точке A (рис. 5а, кривая 1) и происходит при значении угла $\omega = \omega_1(\theta)$, определяемом геометрически:

$$\omega_1(\theta) = \arctg \frac{R \cos \varphi - f \sin \varphi}{\theta + R \sin \varphi + f \cos \varphi}. \quad (26)$$

При этом кривая $\Upsilon(\theta, \omega_1(\theta))$ - эллипс, лежащий внутри области G .

На касании верхнего края следует остановиться подробнее. Оно возможно различными способами: в одной точке B (рис. 5а, кривые 3 и 5; рис. 6а, кривые 2 и 4; рис. 7а, кривая 1) или в двух точках D_1 и D_2 (рис. 5а, кривая 4; рис. 6а, кривая 3).

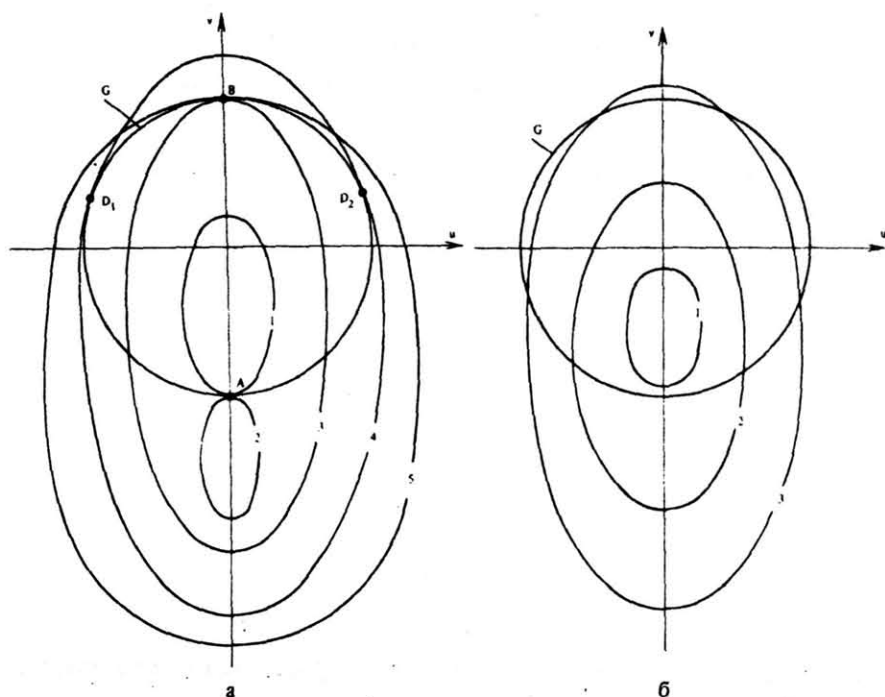


Рис. 5. Слои в виде эллипсов:
 а) слои пересекают границу области G; б) слои касаются границы области G

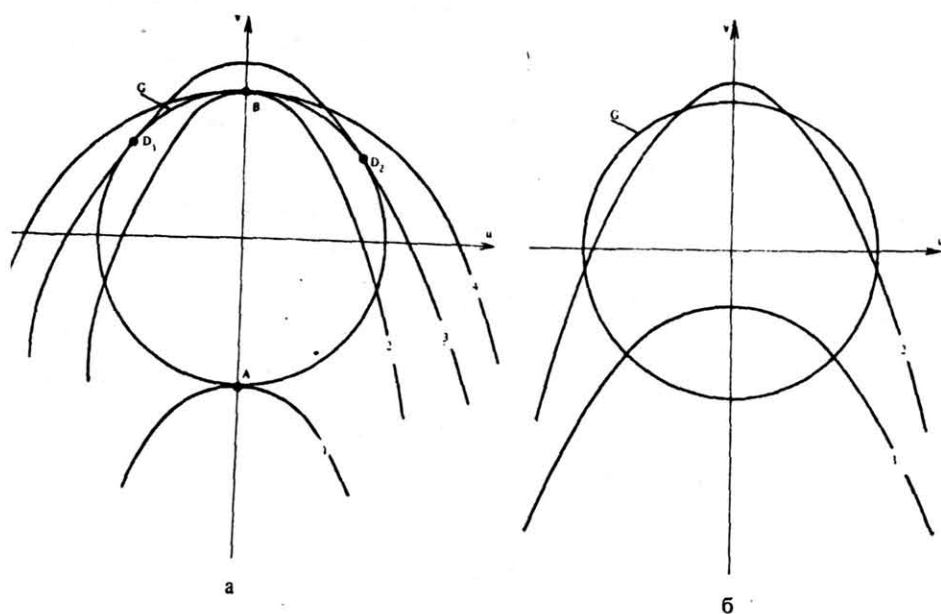


Рис. 6. Слои в виде нижних ветвей гипербол:
 а) слои пересекают границу области G; б) слои касаются границы области G

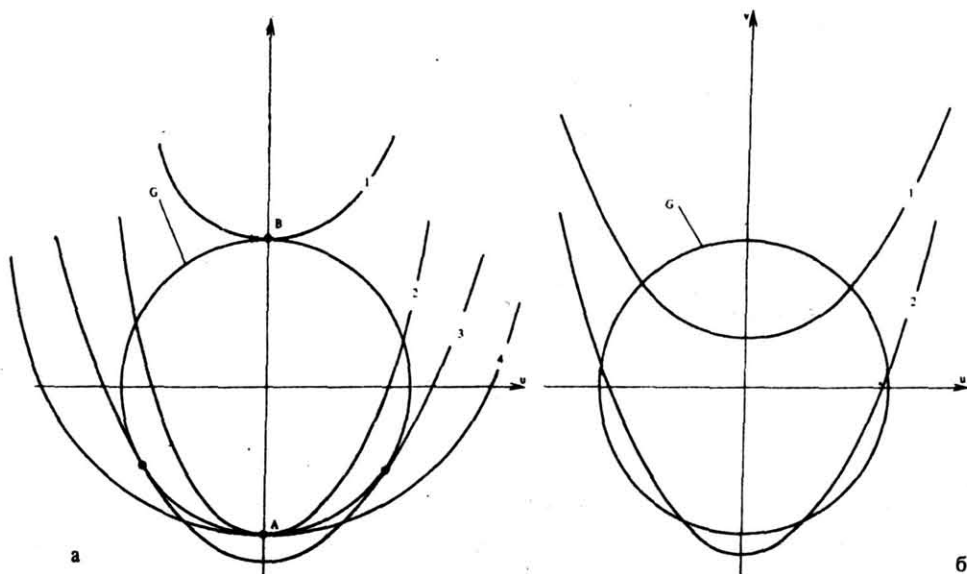


Рис. 7. Слои в виде верхних ветвей гипербол:
а) слои пересекают границу области G; б) слои касаются границы области G

Если кривая $\Gamma(\theta, \omega)$ касается G и лежит вне области G, то она может отображаться только в точку $M(L/2)$. Если же кривая $\Gamma(\theta, \omega)$ касается G внутренним образом (при этом она имеет еще 2 точки пересечения с границей области G (рис. 5а, кривая 3; рис. 6а, кривая 2), то эта кривая может отображаться только во внутреннюю точку отрезка.

Рассмотрим конус с вершиной в точке $M(\theta)$, проходящий через точку B. Угол при его вершине обозначим через $\omega_2(\theta)$, а радиус кривизны в точке B сечения этого конуса обозначим через $r_B(\theta)$. Геометрический расчет дает

$$\omega_2(\theta) = \arctg \frac{R \cos \varphi + f \sin \varphi}{\theta - R \sin \varphi + f \cos \varphi}, \quad (27)$$

$$r_B(\theta) = \frac{(R \cos \varphi + f \sin \varphi)(f + \theta \cos \varphi)}{f \cos \varphi - R \sin \varphi + \theta}. \quad (28)$$

Ясно, что если $0 < r_B(\theta) < R$, где R - радиус области G, то при $\omega \geq \omega_2(\theta)$ кривая $\Gamma(\theta, \omega)$ пересекает границу области G в четырех точках, то есть реализуются случаи кривых 3, 4 на рис. 5а или 2, 3 на рис. 6а.

Если же $r_B(\theta) < 0$ (то есть рассматриваемое коническое сечение выпукло вниз) или $r_B(\theta) \geq R$, то данные случаи реализовываться не будут.

Таким образом, при

$$\omega < \omega_1(\theta) \quad (29)$$

кривая $\Gamma(\theta, \omega)$ лежит внутри области G.

Если $\Gamma(\theta, \omega)$ пересекает G , то при

$$\begin{cases} 0 < r_B(\theta) < R \\ \omega_1(\theta) < \omega < \omega_2(\theta) \\ r_B(\theta) \leq 0 \text{ или } r_B(\theta) \geq R \\ \omega > \omega_1(\theta) \end{cases} \quad (30)$$

имеют место две точки пересечения, а при

$$\begin{cases} 0 < r_B(\theta) < R \\ \omega > \omega_2(\theta) \end{cases} \quad (31)$$

имеют место четыре точки пересечения.

С учетом сделанных замечаний запишем выражения $S(\theta, \omega)$ для всех возможных случаев взаимного расположения слоя $\Gamma(\theta, \omega)$ и области G и условия, при которых они реализуются для каждой фиксированной точки отрезка $M(\theta)$.

I. $\Gamma(\theta, \omega)$ - фрагмент эллипса, то есть

$$\omega + \theta < \pi/2. \quad (32)$$

1. Эллипс расположен целиком внутри области G (рис. 5б, кривая 1).

$$S(\theta, \omega) = \pi a(\theta, \omega) b(\theta, \omega) \quad (33)$$

при выполненном условии (29).

2. Пересечение в двух точках (рис. 5б, кривая 2).

$$\begin{aligned} S(\theta, \omega) = & a(\theta, \omega) b(\theta, \omega) \arccos \frac{v_0(\theta, \omega) + d(\theta, \omega)}{b(\theta, \omega)} - \\ & - u_0(\theta, \omega) d(\theta, \omega) + R^2 \left(\pi - \arccos \frac{v_0(\theta, \omega)}{R} \right) \end{aligned} \quad (34)$$

при выполненном условии (30); $(\pm u_0(\theta, \omega), v_0(\theta, \omega))$ - точки пересечения эллипса и окружности ($u_0(\theta, \omega) \geq 0$).

3. Пересечение в четырех точках (рис. 5б, кривая 3).

$$\begin{aligned} S(\theta, \omega) = & a(\theta, \omega) b(\theta, \omega) \left\{ \arccos \frac{v_2(\theta, \omega) + d(\theta, \omega)}{b(\theta, \omega)} - \right. \\ & \left. - \arccos \frac{v_1(\theta, \omega) + d(\theta, \omega)}{b(\theta, \omega)} \right\} - u_2(\theta, \omega) d(\theta, \omega) + \end{aligned} \quad (35)$$

$$+ u_1(\theta, \omega) d(\theta, \omega) + R^2 \arccos \frac{v_1(\theta, \omega)}{R} + \\ + R^2 \left[\pi - \arccos \frac{v_2(\theta, \omega)}{R} \right]$$

при выполненном условии (31); $(\pm u_1(\theta, \omega), v_1(\theta, \omega))$ и $(\pm u_2(\theta, \omega), v_2(\theta, \omega))$ - точки пересечения эллипса и окружности ($u_1(\theta, \omega) \geq 0$, $u_2(\theta, \omega) \geq 0$, $v_1(\theta, \omega) > v_2(\theta, \omega)$).

II. $\Gamma(\theta, \omega)$ -фрагмент параболы, то есть

$$\omega + \theta = \pi/2 \quad (36)$$

1. Пересечение в двух точках.

$$S(\theta, \omega) = -\frac{1}{3} \frac{u_0^3(\theta, \omega)}{p(\theta, \omega)} - u_0(\theta, \omega) (v_0(\theta, \omega) + 2c(\theta, \omega)) + \\ + R^2 \left[\pi - \arccos \frac{v_0(\theta, \omega)}{R} \right] \quad (37)$$

при выполненном условии (30); $(\pm u_0(\theta, \omega), v_0(\theta, \omega))$ - точки пересечения параболы и окружности ($u_0(\theta, \omega) \geq 0$).

2. Пересечение в четырех точках.

$$S(\theta, \omega) = -\frac{1}{3p(\theta, \omega)} \left\{ u_2^3(\theta, \omega) - u_1^3(\theta, \omega) \right\} - \\ - 2c(\theta, \omega) \left\{ u_2(\theta, \omega) - u_1(\theta, \omega) \right\} - u_2(\theta, \omega) v_2(\theta, \omega) + \\ + u_1(\theta, \omega) v_1(\theta, \omega) + R^2 \arccos \frac{v_1(\theta, \omega)}{R} + \\ + R^2 \left[\pi - \arccos \frac{v_2(\theta, \omega)}{R} \right] \quad (38)$$

при выполненном условии (31); $(\pm u_1(\theta, \omega), v_1(\theta, \omega))$ и $(\pm u_2(\theta, \omega), v_2(\theta, \omega))$ - точки пересечения параболы и окружности ($u_1(\theta, \omega) \geq 0$, $u_2(\theta, \omega) \geq 0$, $v_1(\theta, \omega) > v_2(\theta, \omega)$).

III. $\Gamma(\theta, \omega)$ - нижняя ветвь гиперболы, то есть

$$\begin{cases} \omega + \theta > \pi/2 \\ \omega < \pi/2 \end{cases} \quad (39)$$

1. Пересечение в двух точках (рис. 6б, кривая 1).

$$S(\theta, \omega) = -a(\theta, \omega) b(\theta, \omega) \ln \left[\frac{u_0(\theta, \omega)}{a(\theta, \omega)} - \frac{v_0(\theta, \omega) - d(\theta, \omega)}{b(\theta, \omega)} \right] +$$

$$+ u_0(\theta, \omega) d(\theta, \omega) + R^2 \left(\pi - \arccos \frac{v_0(\theta, \omega)}{R} \right) \quad (40)$$

при выполненном условии (30); $(\pm u_0(\theta, \omega), v_0(\theta, \omega))$ - точки пересечения нижней ветви гиперболы и окружности ($u_0(\theta, \omega) \geq 0$).

2. Пересечение в четырех точках (рис. 6б, кривая 2).

$$\begin{aligned} S(\theta, \omega) = & -a(\theta, \omega)b(\theta, \omega) \left\{ \ln \left[\frac{u_2(\theta, \omega)}{a(\theta, \omega)} - \frac{v_2(\theta, \omega) - d(\theta, \omega)}{b(\theta, \omega)} \right] - \right. \\ & \left. - \ln \left[\frac{u_1(\theta, \omega)}{a(\theta, \omega)} - \frac{v_1(\theta, \omega) - d(\theta, \omega)}{b(\theta, \omega)} \right] \right\} + \\ & + d(\theta, \omega)(u_2(\theta, \omega) - u_1(\theta, \omega)) + R^2 \arccos \frac{v_1(\theta, \omega)}{R} + \\ & + R^2 \left(\pi - \arccos \frac{v_2(\theta, \omega)}{R} \right) \end{aligned} \quad (41)$$

при выполненном условии (31); $(\pm u_1(\theta, \omega), v_1(\theta, \omega))$ и $(\pm u_2(\theta, \omega), v_2(\theta, \omega))$ - точки пересечения нижней ветви гиперболы и окружности ($u_1(\theta, \omega) \geq 0$, $u_2(\theta, \omega) \geq 0$, $v_1(\theta, \omega) > v_2(\theta, \omega)$).

IV. $\Gamma(\theta, \omega)$ - верхняя ветвь гиперболы, то есть

$$\omega > \pi/2 \quad (42)$$

1. Пересечение в двух точках (рис. 7б, кривая 1).

$$\begin{aligned} S(\theta, \omega) = & a(\theta, \omega)b(\theta, \omega) \ln \left[\frac{u_0(\theta, \omega)}{a(\theta, \omega)} + \frac{v_0(\theta, \omega) - d(\theta, \omega)}{b(\theta, \omega)} \right] + \\ & + u_0(\theta, \omega)d(\theta, \omega) + R^2 \left(\pi - \arccos \frac{v_0(\theta, \omega)}{R} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

при выполненном условии (30); $(\pm u_0(\theta, \omega), v_0(\theta, \omega))$ - точки пересечения верхней ветви гиперболы и окружности ($u_0(\theta, \omega) \geq 0$).

Итак, мы рассмотрели все возможные случаи, реализующиеся при попадании точки С внутрь области G.

Пусть теперь точка С находится вне области G. Слой $\Gamma(-L/2)$ будет в этом случае кривая, касающаяся нижнего края области G и лежащая вне области G. Аналогично касанию верхнего края такое касание возможно различными способами (рис 5а, кривая 2; рис. 6а, кривая 1; рис. 7а, кривые 3, 4).

Кривые 2 и 3 на рис. 7а имеют место, если радиус кривизны $r_A(\theta)$ в точке А (нижней точке области G) кривой, соответствующей $M(\theta)$ и проходящей через точку А,

$$r_A(\theta) = \frac{(f \sin \varphi - R \cos \varphi)(f - \theta \cos \varphi)}{-\theta - f \cos \varphi - R \sin \varphi} \quad (44)$$

удовлетворяет условию $0 < r_A < R$.

При выполнении этого же условия возможно пересечение верхней ветви гиперболы и границы области G в четырех точках (рис. 7б, кривая 2).

В этом случае

$$\begin{aligned} S(\theta, \omega) = & a(\theta, \omega) b(\theta, \omega) \left\{ \ln \left[\frac{u_2(\theta, \omega)}{a(\theta, \omega)} + \frac{v_2(\theta, \omega) - d(\theta, \omega)}{b(\theta, \omega)} \right] - \right. \\ & - \ln \left[\frac{u_1(\theta, \omega)}{a(\theta, \omega)} + \frac{v_1(\theta, \omega) - d(\theta, \omega)}{b(\theta, \omega)} \right] \left. \right\} - R^2 \arccos \frac{v_2(\theta, \omega)}{R} - \\ & - d(\theta, \omega) (u_1(\theta, \omega) - u_2(\theta, \omega)) + R^2 \arccos \frac{v_1(\theta, \omega)}{R}, \end{aligned} \quad (45)$$

где $(\pm u_1(\theta, \omega), v_1(\theta, \omega))$ и $(\pm u_2(\theta, \omega), v_2(\theta, \omega))$ - точки пересечения верхней ветви гиперболы и окружности ($u_1(\theta, \omega) \geq 0, u_2(\theta, \omega) \geq 0, v_1(\theta, \omega) > v_2(\theta, \omega)$).

Обозначим за $\omega'_1(\theta)$ угол, при котором происходит касание верхней ветви гиперболы и границы области G в точке A:

$$\omega'_1(\theta) = \arctg \frac{f \sin \varphi - R \cos \varphi}{f \cos \varphi + R \sin \varphi + \theta}. \quad (46)$$

Тогда случай пересечения в четырех точках верхней ветви гиперболы и окружности имеет место при выполнении условий:

$$\begin{cases} 0 < r_A(\theta) < R \\ \omega < \omega'_1(\theta). \end{cases} \quad (47)$$

Никаких других новых случаев взаимного расположения кривой и окружности реализоваться не может. Величина $\omega_2(\theta)$ определяется так же, как и в случае попадания точки C внутрь области G, то есть формулой (27). Останется прежним и условие (31), определяющее пересечение эллипса, параболы или нижней ветви гиперболы с окружностью в четырех точках.

Изменится лишь условие, при котором будет происходить пересечение в двух точках:

$$\begin{cases} \left\{ \begin{aligned} & r_A(\theta) < 0 \text{ или } r_A(\theta) \geq R \\ & r_B(\theta) < 0 \text{ или } r_B(\theta) \geq R \end{aligned} \right. \\ \forall \omega \\ \left\{ \begin{aligned} & 0 < r_A(\theta) < R \\ & r_B(\theta) < 0 \text{ или } r_B(\theta) \geq R \\ & (\omega > \omega'_1(\theta)) \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (48)$$

$$\begin{cases} r_A(\theta) < 0 \text{ или } r_A(\theta) < R \\ 0 < r_B(\theta) < R \\ \omega < \omega_2(\theta) \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < r_A(\theta) < R \\ 0 < r_B(\theta) < R \\ \omega'_1(\theta) < \omega < \omega_2(\theta) \end{cases} \quad (48)$$

Таким образом, для каждой точки $M(\theta)$ построен алгоритм нахождения функции $S(\theta, \omega)$. Решение уравнения (25) производится численными методами.

Расчет функции $\omega(\theta)$ и затем профиля поверхности фокусатора проводился на ЭВМ типа MicroVAX с помощью программ, написанных на языке FORTRAN.

Для выяснения точности вычислений был проведен вычислительный эксперимент, заключающийся в определении расстояния между прямой, на которой лежит отрезок L , и лучами, идущими от фокусатора в соответствии с рассчитанной по предложенному алгоритму функцией $\chi(u, v)$. Для сетки на отрезке, состоящей из 400 точек, это отклонение было существенно меньше дифракционной ширины фокальной линии.

С помощью фотопостроителя сканирующего типа Photomation P-1700 с растром 25 мкм получены амплитудные маски, на которых плотность почернения соответствует высоте рельефа.

На рис. 8 (а-з) приведены фотографии амплитудных масок для различных значений углов наклона отрезка $\varphi(0-\pi/2)$, длин отрезка L (10-20 мм) и фокусного расстояния f (100-200 мм) для длины волны излучения $\lambda=10,6$ мкм. Для иллюстрации вида слоев на амплитудных масках показана система слоев, соответствующих 10 точкам, равномерно расположенным на отрезке L .

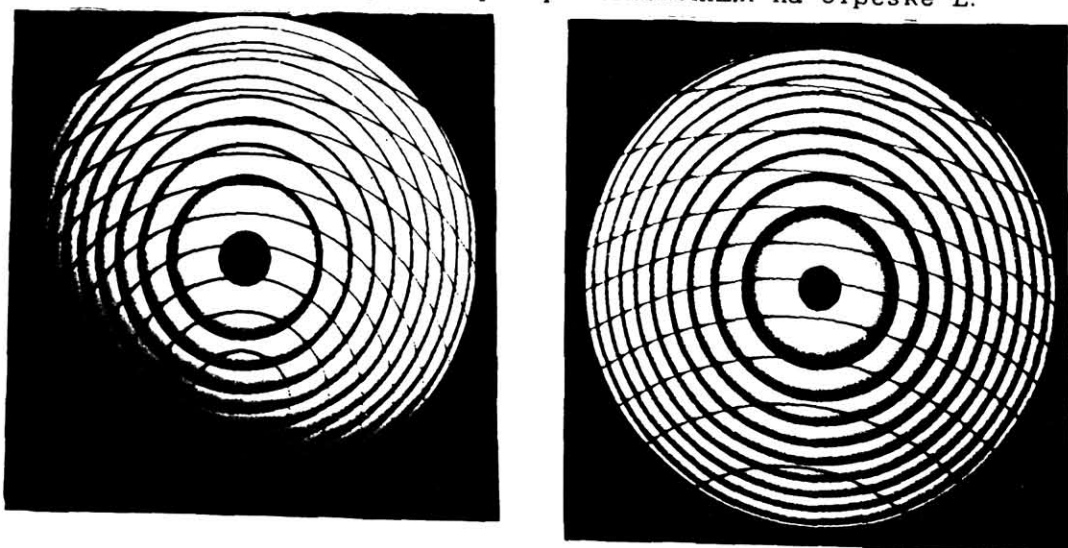
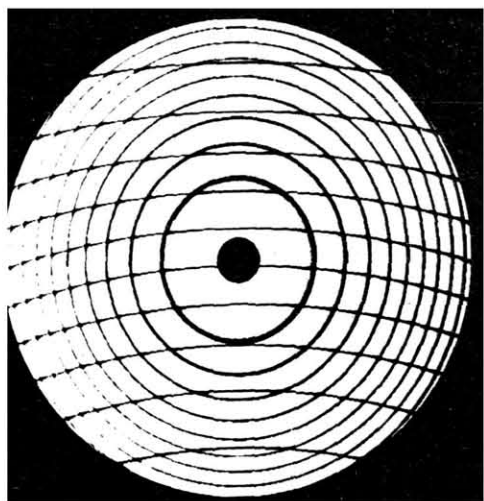
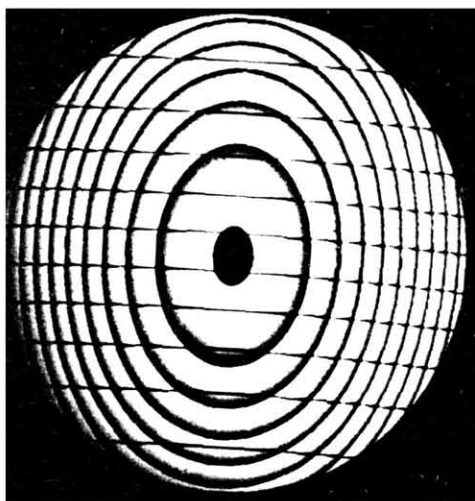


Рис. 8. Амплитудные маски фокусаторов в отрезок
($\lambda = 10,6$ мкм, $R = 6,4$ мм);

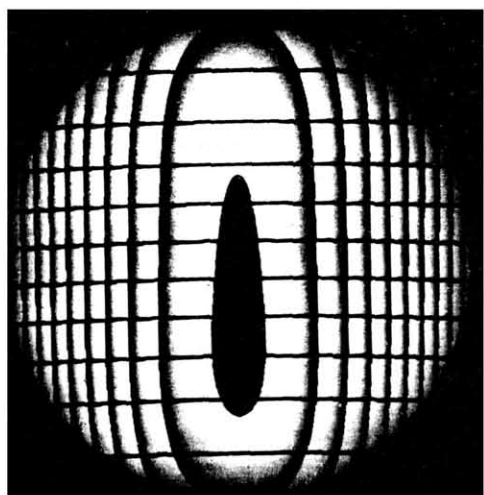
- а) $\varphi = 0,02$, $L = 10$ мм, $f = 200$ мм; б) $\varphi = 0,05$, $L = 10$ мм, $f = 200$ мм; в) $\varphi = 0,1$, $L = 10$ мм, $f = 200$ мм; г) $\varphi = \pi/6$, $L = 10$ мм, $f = 200$ мм; д) $\varphi = \pi/6$, $L = 20$ мм, $f = 200$ мм; е) $\varphi = \pi/3$, $L = 10$ мм, $f = 200$ мм; ж) $\varphi = \pi/3$, $L = 10$ мм, $f = 100$ мм; з) $\varphi = \pi/2$, $L = 20$ мм, $f = 200$ мм (тонкими линиями показаны слои)



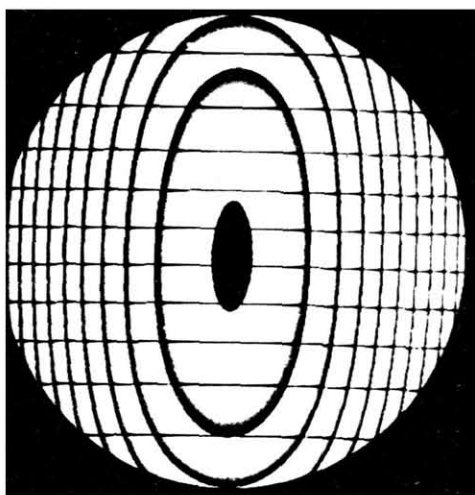
В



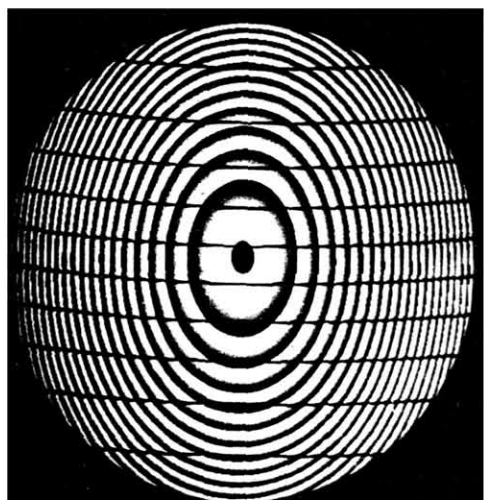
Г



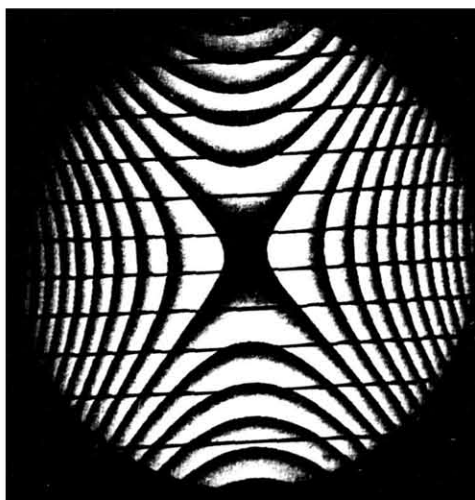
Д



Е



Ж



З

Окончание рис. 8

ЛИТЕРАТУРА

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973.
2. Сисакян И.Н., Сойфер В.А. Компьютерная оптика. Достижения и проблемы // Компьютерная оптика, 1987, вып. 1, с. 5-19.
3. Ярославский Л.П., Мерзляков Н.С. Методы цифровой голографии. М., Наука, 1977.
4. Слюсарев Г.Г. Оптические системы с фазовыми слоями // ДАН СССР, 1957, т. 113, N 4, с. 780-783.
5. Голуб М.А., Карпеев С.В., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А. Фокусировка излучения в заданную область пространства // Письма в ЖТФ, 1981, т. 7, вып. 10, с. 18-623.
6. Данилов В.А., Попов В.В., Прохоров А.М., Сагателян Д.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А. Синтез оптических элементов, создающих фокальную линию произвольной формы // Письма в ЖТФ, 1982, т. 8, с. 810-815.
7. Бобров С.Т., Грейсхус Г.У., Туркевич Ю.Г. Оптика дифракционных элементов и систем. Л.: Машиностроение, 1986.
8. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979.
9. Данилов В.А., Попов В.В., Прохоров А.М., Сагателян Д.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А. Оптические элементы, фокусирующие когерентное излучение в произвольную фокальную кривую: Препринт. ФИАН, N 69, 1983.
10. Данилов В.А., Кинбер Б.Е., Шишлов А.В. Теория когерентных фокусаторов // Компьютерная оптика, 1987, вып. 1, с. 40-52.
11. Гончарский А.В., Данилов В.А., Попов В.В., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А., Степанов В.В. Решение обратной задачи фокусировки лазерного излучения в произвольную кривую // ДАН СССР, 1983, т. 273, N 3, с. 605-609.
12. Волкова Н.А., Коробкин В.В., Малышева Б.Ю. и др. Фокусировка лазерного излучения аксиконами: Препринт. ИВТАН, N 5-126, М., 1983.
13. Пальчикова И.Г. Синтез фазовой структуры киноформных аксиконов: Препринт. Институт автоматики и электрометрии СОАН СССР, Новосибирск, 1986.
14. Гончарский А.В., Степанов В.В. Обратные задачи когерентной опти- ки. Фокусировка в линию // ЖВМ и МФ, 1986, т. 26, N 1, с. 80-91.
15. Гончарский А.В., Данилов В.А., Попов В.В., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А., Степанов В.В. Фокусаторы лазерного излучения, падающего под углом // Квантовая электроника, 1984, т. 11, N1, с. 166-168.