

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ ОПТИКИ

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ПРОСТРАНСТВЕННО-ЧАСТОТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

С.Г. Волотовский, П.Г. Серафимович, С.И. Харитонов

Институт систем обработки изображений РАН, Самарский государственный аэрокосмический университет

1. Введение

В последнее время большое внимание уделяется методам расчета дифракционных оптических элементов в рамках строгой электромагнитной теории. Применение различных разностных схем к решению системы уравнений Максвелла [1] требует значительных вычислительных ресурсов. Это не позволяет рассчитывать дифракционные оптические элементы, апертура которых составляет больше двух-трех длин волн. В данной работе предложен метод решения системы уравнений Максвелла для случая дифракции плоской электромагнитной волны на дифракционном оптическом элементе, представляющем тонкую пластинку с нанесенным на нее микрорельефом. Расчет проводится в рамках строгой электромагнитной теории. Метод основан на приведении исходной системы уравнений Максвелла к системе интегро-дифференциальных уравнений. Приведены результаты расчета электромагнитного поля для случая прохождения плоской электромагнитной волны через бинарную линзу Френеля.

2. Постановка задачи

Рассмотрим прямую задачу дифракции (рис.1).

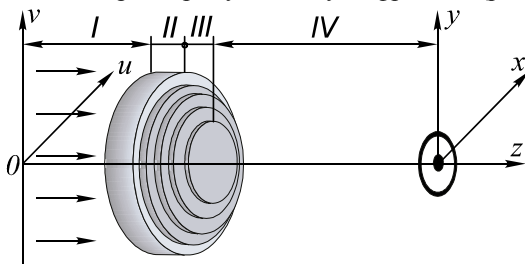


Рис.1. Оптическая схема

Пусть освещающий пучок с заданными значениями векторов электрического и магнитного поля \vec{E}, \vec{H} падает на дифракционный оптический элемент. Необходимо найти значение векторов электрического и магнитного поля в области регистратора. Анализируя оптическую схему, можно выделить несколько областей.

1. Область между источником и дифракционным оптическим элементом.
2. Область подложки.
3. Область модуляции.

4. Область после области модуляции.

В операторной записи система уравнений Максвелла имеет вид [1]

$$\partial_z \mathbf{W} = \mathbf{H} \mathbf{W}, \quad (1)$$

где \mathbf{W} - матрица-столбец из 4-х компонент

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ H_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} \text{ - блочно-матричный дифференциальный оператор:}$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \frac{i}{k} \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial_y & \partial_x \\ -\partial_y & \partial_x \end{pmatrix} + ik \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{ik} \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial_y & \partial_x \\ -\partial_y & \partial_x \end{pmatrix} + ik \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Представим решение в виде разложения в интеграл Фурье

$$\mathbf{W}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{W}(\alpha, \beta, z) \exp(ik(\alpha x + \beta y)) d\alpha d\beta, \quad (3)$$

$$\varepsilon(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\alpha, \beta, z) \exp(ik(\alpha x + \beta y)) d\alpha d\beta.$$

Подставляя (3) в (1) получаем систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\partial_z \mathbf{W}(\alpha, \beta, z) = \mathbf{H}(\alpha, \beta, z) \mathbf{W}(\alpha, \beta, z),$$

$$\mathbf{H}(\alpha, \beta, z) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A}(\alpha, \beta, z) \\ \mathbf{B}(\alpha, \beta, z) & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где двумерные матричные операторы действуют на двумерные матрицы столбцы по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} &= -ik \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-1}(\alpha - \omega_x, \beta - \omega_y, z) \begin{pmatrix} -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_y & \omega_x \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \varphi(\omega_x, \omega_y, z) \\ \psi(\omega_x, \omega_y, z) \end{pmatrix} d\omega_x d\omega_y + ik \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B}(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} &= ik \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta & \alpha \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} + \\ &+ ik \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\alpha - \omega_x, \beta - \omega_y) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \varphi(\omega_x, \omega_y) \\ \psi(\omega_x, \omega_y) \end{pmatrix} d\omega_x d\omega_y. \end{aligned} \quad (5)$$

Поле в первой зоне представляет собой суперпозицию падающего и отраженного полей, частотные компоненты которых имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(\alpha, \beta, z) &= (I^e(\alpha, \beta) \mathbf{W}^{-e}(\alpha, \beta) + \\ &+ I^h(\alpha, \beta) \mathbf{W}^{-h}(\alpha, \beta)) \times \\ &\times \exp(-ik\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}z) + \\ &+ (R^e(\alpha, \beta) \mathbf{W}^{+e}(\alpha, \beta) + \\ &+ R^h(\alpha, \beta) \mathbf{W}^{+h}(\alpha, \beta)) \times \\ &\times \exp(ik\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}z) \end{aligned} \quad (6)$$

Поле в третьей зоне (рис 3.6) за оптическим элементом имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(\alpha, \beta, z) &= (T^e(\alpha, \beta) \mathbf{W}^{-e}(\alpha, \beta) + \\ &+ T^h(\alpha, \beta) \mathbf{W}^{-h}(\alpha, \beta)) \times \\ &\times \exp(-ik\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}z) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\mathbf{W}^{\pm e}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \mp \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2} \alpha \\ \mp \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2} \beta \\ \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} \|W\|^{-1},$$

$$\mathbf{W}^{\pm h}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \\ \mp \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2} \alpha \\ \mp \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2} \beta \end{pmatrix} \|W\|^{-1},$$

$$\|W\| = \sqrt{(2-\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)}.$$

Частотные компоненты в области 3 и 4 удовлетворяют системе интегро-дифференциальных уравнений (4).

3. Метод расчета

Рассмотрим метод решения системы (4). Вместо непрерывных функций введем их значения в точках

$$\alpha_n = \alpha_0 + \frac{\lambda n}{d_x}, \quad \beta_m = \beta_0 + \frac{\lambda m}{d_y};$$

$$\mathbf{W}^{\pm e}_{nm} = \mathbf{W}^{\pm e}(\alpha_n, \beta_m),$$

$$\mathbf{W}^{\pm h}_{nm} = \mathbf{W}^{\pm h}(\alpha_n, \beta_m),$$

$$I^e_{nm} = I^e(\alpha_n, \beta_m) \lambda^2 / (d_x d_y),$$

$$I^h_{nm} = I^h(\alpha_n, \beta_m) \lambda^2 / (d_x d_y),$$

$$R^e_{nm} = R^e(\alpha_n, \beta_m) \lambda^2 / (d_x d_y),$$

$$R^h_{nm} = R^h(\alpha_n, \beta_m) \lambda^2 / (d_x d_y),$$

$$T^e_{nm} = T^e(\alpha_n, \beta_m) \lambda^2 / (d_x d_y),$$

$$T^h_{nm} = T^h(\alpha_n, \beta_m) \lambda^2 / (d_x d_y). \quad (8)$$

Поле в области 1 имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(x, y, z) &= \sum_{nm} (I^e_{nm} \mathbf{W}^{-e}_{nm} + I^h_{nm} \mathbf{W}^{-h}_{nm}) \times \\ &\times \exp(-ik\sqrt{1-\alpha_n^2-\beta_m^2}z + ik(\alpha_n x + \beta_m y)) + \\ &\sum_{nm} (R^e_{nm} \mathbf{W}^{+e}_{nm} + R^h_{nm} \mathbf{W}^{+h}_{nm}) \times \\ &\times \exp(ik\sqrt{1-\alpha_n^2-\beta_m^2}z + ik(\alpha_n x + \beta_m y)) \end{aligned}$$

Поле в области 4 имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(x, y, z) &= \sum_{nm} (T^e_{nm} \mathbf{W}^{-e}_{nm} + T^h_{nm} \mathbf{W}^{-h}_{nm}) \times \\ &\times \exp(-ik\sqrt{1-\alpha_n^2-\beta_m^2}z + ik(\alpha_n x + \beta_m y)). \end{aligned}$$

Поле в зоне модуляции удовлетворяет системе дифференциальных уравнений первого порядка относительно функций $\mathbf{W}_{nm}(z)$:

$$\partial_z \mathbf{W}_{nm}(z) = \sum_{sk} \mathbf{H}_{nm,sk}(z) \mathbf{W}_{sk}(z), \quad (9)$$

$$\mathbf{H}_{nm,sk}(z) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A}_{nm,sk}(z) \\ \mathbf{B}_{nm,sk}(z) & 0 \end{pmatrix},$$

где двумерные матричные операторы действуют на двумерные матрицы-столбцы по формулам, следующим из уравнений (5)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{nm,sk} \begin{pmatrix} \varphi_{sk}(z) \\ \psi_{sk}(z) \end{pmatrix} &= -ik \begin{pmatrix} \alpha_n & 0 \\ 0 & \beta_m \end{pmatrix} \varepsilon^{-1}_{n-s, m-k} \times \\ &\times \begin{pmatrix} -\beta_k & \alpha_s \\ -\beta_k & \alpha_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{sk}(z) \\ \psi_{sk}(z) \end{pmatrix} + \\ &+ ik \delta_{ns, mk} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{sk}(z) \\ \psi_{sk}(z) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_{nm,sk} \begin{pmatrix} \varphi_{sk}(z) \\ \psi_{sk}(z) \end{pmatrix} = ik \begin{pmatrix} \alpha_n & 0 \\ 0 & \beta_m \end{pmatrix} \delta_{nm,sk} \times \\ \times \begin{pmatrix} -\beta_k & \alpha_s \\ -\beta_k & \alpha_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{sk} \\ \psi_{sk} \end{pmatrix} + \\ + ik \varepsilon_{n-s,m-k} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{sk}(z) \\ \psi_{sk}(z) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Данная система обыкновенных дифференциальных уравнений получается путем дискретизации исходной системы интегро-дифференциальных уравнений.

Совокупность решений системы уравнений с различными индексами удобно объединить в блочную квадратную матрицу $\overline{\mathbf{W}}$. Элементами этой блочной матрицы являются четырехкомпонентные матрицы столбцы.

Пусть $\overline{\mathbf{W}}^e_{nm}(z)$, $\overline{\mathbf{W}}^h_{nm}(z)$ - решения системы уравнений (10) с начальными условиями $\mathbf{W}^{-e}_{nm}(0)$ и $\mathbf{W}^{-h}_{nm}(0)$, где $\mathbf{W}^{-e}_{nm}(0)$ или $\mathbf{W}^{-h}_{nm}(0)$ представляет собой блочную квадратную матрицу, у которой отличен от нуля только элемент, стоящий на пересечении m -ной строки n -того столбца. Этот элемент равен четырехкомпонентному столбцу \mathbf{W}^{-e}_{nm} или \mathbf{W}^{-h}_{nm} (не следует путать обозначения $\mathbf{W}^{-e}_{nm}(0)$, $\mathbf{W}^{-h}_{nm}(0)$ и \mathbf{W}^{-e}_{nm} или \mathbf{W}^{-h}_{nm}).

Условие непрерывности пространственно-частотных компонент при $z=a$ имеет вид

$$\sum_{mn} (T^e_{nm} \mathbf{W}^{-e}_{nm}(a) + T^h_{nm} \mathbf{W}^{-h}_{nm}(a)) = \\ = \sum_{mn} (I^e_{nm} \mathbf{W}^{-e}_{nm}(0) + I^h_{nm} \mathbf{W}^{-h}_{nm}(0)) \times \\ \times \exp(-ik\sqrt{1-\alpha_n^2-\beta_m^2}a) + \\ + \sum_{mn} (R^e_{nm} \mathbf{W}^{+e}_{nm} + R^h_{nm} \mathbf{W}^{+h}(0)_{nm}) \times \\ \times \exp(ik\sqrt{1-\alpha_n^2-\beta_m^2}a). \quad (11)$$

Последнее выражение представляет собой систему линейных уравнений для определения коэффициентов пропускания и отражения.

4. Реализация вычислений

Для того, чтобы получить систему линейных уравнений (11), необходимо многократно решить систему дифференциальных уравнений (9) с различными начальными условиями. Это позволяет использовать технику параллельных вычислений. В данном случае для организации параллельных вычислений был использован подход, состоящий в том, что система уравнений (9) для различных начальных условий решалась на различных компьютерах, входящих в кластер. Приводимые ниже результаты были получены с использованием кластера, состояще-

го из 4 двухпроцессорных компьютеров PENTIUM-II с частотой 450 МГц.

Для решения системы дифференциальных уравнений использовались методы матричной экспоненты в одномерном случае и Рунге-Кутта в двумерном [3-5].

5. Апробация метода (бинарная линза)

В качестве примера был выбран расчет поля от бинарной цилиндрической линзы, рассчитанной на освещение наклонным пучком. В этом случае можно провести сравнение с аналитическим решением. Данный метод был реализован также и для двумерного варианта. Оптическая схема для одномерного случая приведена на рис 2.

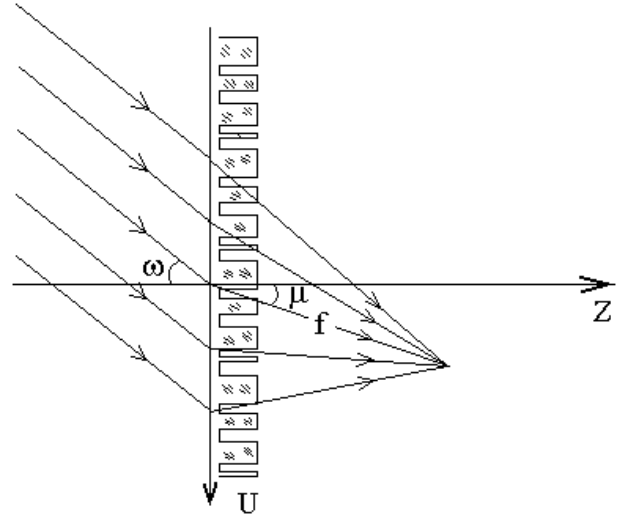


Рис.2. Оптическая схема для одномерного случая.

На рис.3 приведены результаты расчета профиля бинарной цилиндрической линзы (а, в, д) и вектора Умова-Пойтинга (б, г, е) в фокальной плоскости для TE -поляризации при различных углах падения ω и преломления μ . Пунктиром показано точное решение задачи дифракции на цилиндрической линзе, полученное аналитически [2] в скалярном приближении. Длина волны света λ составляла 1мкм, размер апертуры $d = 64\mu\text{м}$, фокусное расстояние $f = 64\mu\text{м}$, глубина рельефа $h = \lambda/(n-1)$, где n - показатель преломления материала, принятый равным 1.5.

Для двумерного случая оптическая схема приведена на рис 1. На рис 4, 5 приведены результаты расчета проекции вектора Умова-Пойтинга на оптическую ось для дифракции плоской электромагнитной волны на радиально-симметричной бинарной линзе в различных плоскостях. При расчете были использованы следующие параметры: радиус апертуры $R = 4,82\lambda$, фокусное расстояние $f = 4,82\lambda$. При этом на рисунках 4а, 4в, 4д, 4ж и 5а черный цвет соответствует максимальному значению.

Отметим, что решение одной двумерной задачи занимало около 2 часов на кластере с описанной выше конфигурацией.

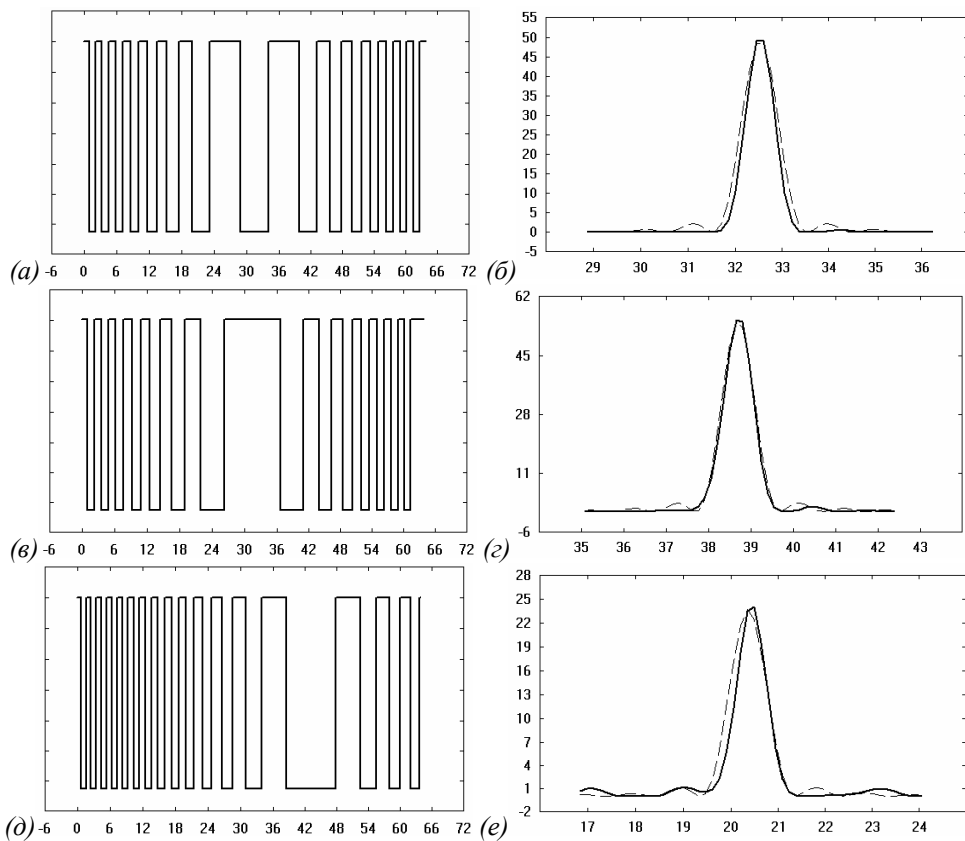
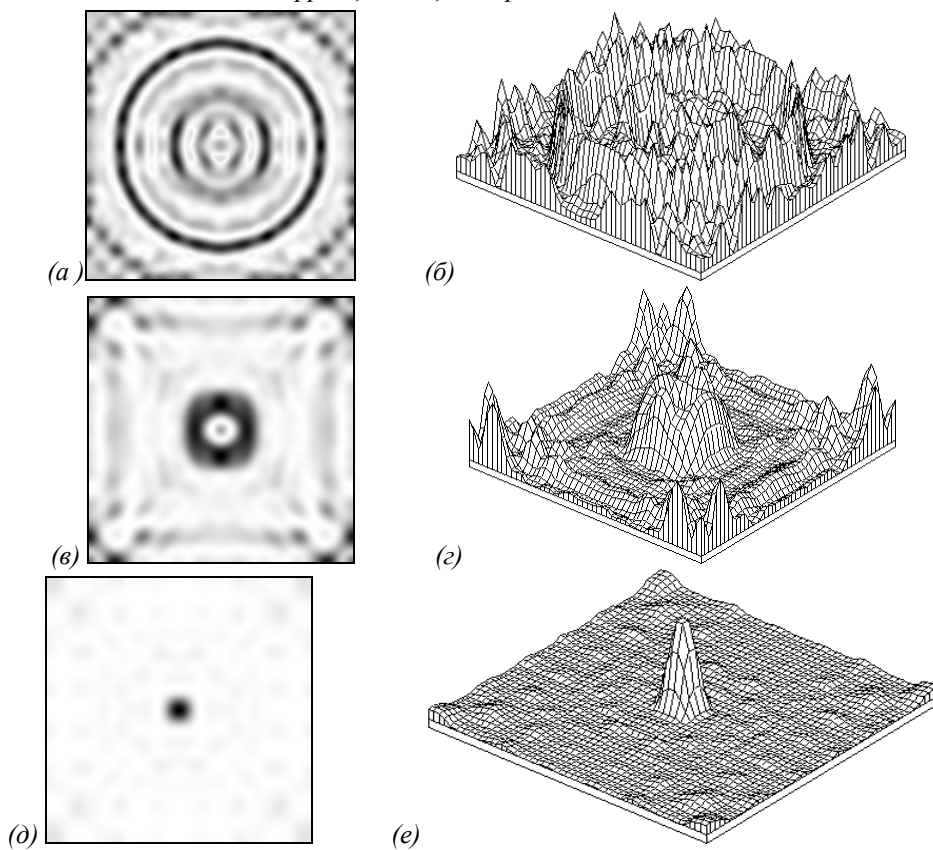


Рис.3. Результаты расчета профиля (а, в, д) бинарной цилиндрической линзы и вектора Умова-Пойтинга (б, з, е) в фокальной плоскости для ТЕ-поляризации при различных углах падения ω и преломления μ : вариант $\omega = 0^\circ$ и $\mu = 0^\circ$ (а, б), $\omega = 5^\circ$, $\mu = 5^\circ$ (в, з), $\omega = 0^\circ$, $\mu = 10.5^\circ$ (д, е); пунктиром показано точное решение задачи дифракции на цилиндрической линзе.



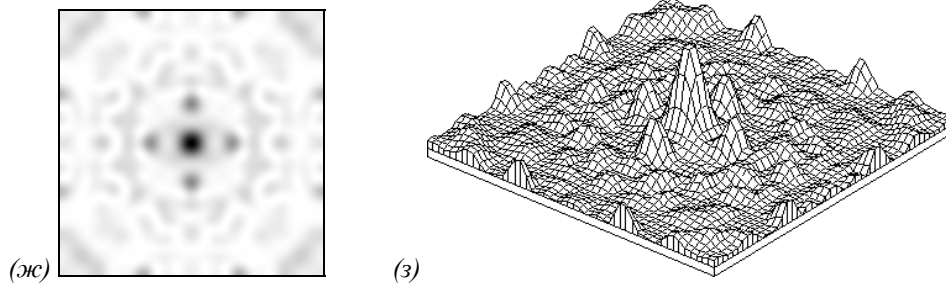


Рис.4. Результаты расчета проекции вектора Умова-Пойтинга на оптическую ось для дифракции плоской электромагнитной волны на радиально-симметричной бинарной линзе в плоскости $z = 0$ (а,б), в плоскости $z = f/2$ (в,г), в плоскости $z = f$ (д,е), в плоскости $z = 3f/2$ (ж,з).

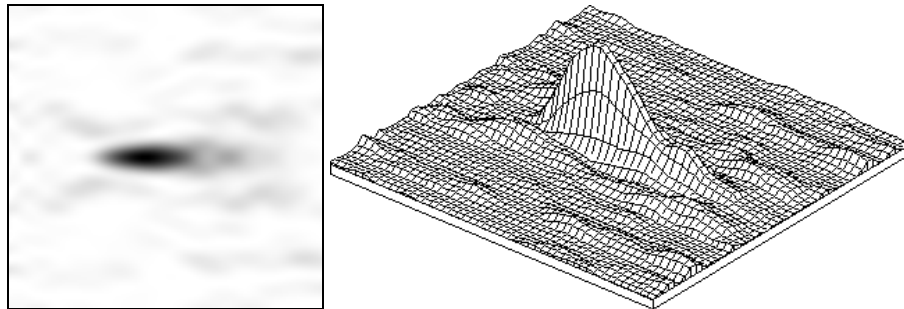


Рис.5. Результаты расчета проекции вектора Умова-Пойтинга на оптическую ось для дифракции плоской электромагнитной волны на радиально-симметричной бинарной линзе в плоскости ZX .

6. Заключение

Приведенные выше результаты численных расчетов показывают работоспособность предложенного алгоритма. Разработанный метод снижает требования к вычислительным ресурсам по сравнению с многомерными разностными методами. Контроль правильности решения проводился с помощью закона сохранения энергии, записанного в пространственно-частотном представлении:

$$Eff = \sum (\tilde{R}_{nm}^e + \tilde{R}_{nm}^e + \tilde{T}_{nm}^e + \tilde{T}_{nm}^e) = 1$$

$$\tilde{R}_{nm}^{e,h} = \left| R_{nm}^{e,h} \right|^2 \times \frac{\sqrt{1 - \alpha_m^2 - \beta_m^2}}{2 - \alpha_m^2 - \beta_m^2} \frac{2 - \alpha_0^2 - \beta_0^2}{\sqrt{1 - \alpha_0^2 - \beta_0^2}}$$

$$\tilde{T}_{nm}^{e,h} = \left| T_{nm}^{e,h} \right|^2 \times \frac{\sqrt{1 - \alpha_m^2 - \beta_m^2}}{2 - \alpha_m^2 - \beta_m^2} \frac{2 - \alpha_0^2 - \beta_0^2}{\sqrt{1 - \alpha_0^2 - \beta_0^2}}$$

Результаты численного моделирования признавались истинными, если $|Eff - 1| < 0.001$

Анализ полученных результатов показывает, что максимум интенсивности в фокусе для исследованных параметров линзы, примерно в четыре раза меньше значения, рассчитанного в скалярном параксиальном приближении Кирхгофа.

Однако, несмотря на это бинарная линза сохраняет свои фокусирующие свойства. Следует отметить, что в отличие от скалярной теории, фокальное пятно имеет слегка вытянутую форму. Это объясняется тем, что в рамках электромагнитной теории не существует радиально-симметричных решений даже в случае дифракции плоской волны на радиально-симметричном объекте. Радиальная симметрия нарушается наличием поляризации у падающей электромагнитной волны.

Литература

1. Методы компьютерной оптики./ под ред. Соифера В.А. М., Физматлит, 2000 г, 688 с.
2. Борн М., Вольф Э. Основы Оптики. М., Наука. 1973 г.
3. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. М., ГИФМЛ, 1962 г.
4. Хемминг Р.В. Численные методы. (Пер. с англ.) М., Наука, 1972 г.
5. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. М., Наука, 1973 г.

The solution of Maxwell's equations in the space-frequency representation

*S.G. Volotovskiy, P.G. Serafimovich, S.I. Kharitonov
Image Processing Systems Institute of RAS
Samara State Aerospace University*

Abstract

Recently, much attention has been paid to the DOE design methods within the framework of a rigorous electromagnetic theory. The application of various difference schemes to the solution of the system of Maxwell's equations [1] requires significant computing resources. This does not allow to design the diffractive optical elements with the aperture of more than two or three wavelengths. This article proposes a method for solving the system of Maxwell's equations for the case of diffraction of a plane electromagnetic wave by a diffractive optical element shaped as a thin plate with a microrelief. The calculation is performed within the framework of the rigorous electromagnetic theory. The method is based on reducing the original system of Maxwell's equations to a system of integro-differential equations. The paper presents the results of designing an electromagnetic field for the case of a plane electromagnetic wave propagation through a binary Fresnel lens.

Citation: Volotovskiy SG, Serafimovich PG, Kharitonov SI. The solution of Maxwell's equations in the space-frequency representation. *Computer Optics* 2000; 20: 5 - 9.

References

- [1] Methods of computer optics edited by V.A. Soifer, Moscow: Fizmatlit; 2000: 688.
- [2] Born M, Wolf E. Basics of optics. Moscow: Nauka Publisher; 1973: 856.
- [3] Berezin IS, Zhidkov NP. Calculation methods; V. 1; 1962.
- [4] Hemming RV. Numerical Methods [Russian translation]. Moscow: Nauka Publisher; 1972.
- [5] Godunov SK, Ryabenkii VS. Difference schemes. Moscow: Nauka Publisher; 1973.