

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА В РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ

А.А. Дегтярев, А.Е. Деркач.

Самарский государственный аэрокосмический университет

Аннотация

Для решения уравнения Шредингера, описывающего распространение электромагнитной волны в нелинейной среде, используется консервативная разностная схема с итерационным уточнением, которая имеет квадратичный порядок точности по направлению распространения волны и близкий к квадратичному по радиальной переменной. Результаты, полученные с помощью вычислительных экспериментов, полностью подтверждают теоретические исследования. Важной особенностью данного метода является возможность моделирования процесса распространения волны на расстояние порядка десятков метров в нелинейной среде.

Введение

Как известно [1], нелинейное уравнение Шредингера является частным случаем волнового уравнения в параболическом приближении и с учетом эффекта самовоздействия. Эффект самовоздействия проявляется при распространении оптического излучения в средах с кубичной нелинейностью (поляризация пропорциональна напряженности электрического поля в третьей степени).

С учетом этого эффекта уравнение Шредингера в радиально-симметричном случае запишется как [2]

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{i}{2kn_0} \Lambda_r U - \frac{kn_{nl}^2}{2n_0} |U|^2 U = 0, \quad (1)$$

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq z \leq L,$$

где $\Lambda_r \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right)$ - оператор Лапласа в радиально-симметричном случае,

U - напряженность электрического поля,

k - волновой вектор,

n_0 - показатель преломления среды,

n_{nl} - изменение показателя преломления под действием поля распространяющейся волны.

Уравнение (1) необходимо дополнить граничным и начальным условиями

$$\begin{cases} U|_{z=0} = \phi(r) \\ U|_{r=R} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Функция $\phi(r)$ описывает напряженность электрического поля волны на входе в среду (волновод), а нулевые граничные условия показывают, что среда (волновод) ограничена проводящей оболочкой.

Без учета нелинейных эффектов уравнение Шредингера принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{i}{2kn_0} \Lambda_r U = 0 \quad (3)$$

В дальнейшем уравнение (1) будем называть нелинейным уравнением Шредингера, а уравнение (3) - линейным уравнением.

1. Расчетная конечно-разностная схема с итерационным уточнением

Для численного решения системы (1)-(2) построим консервативную разностную схему [2]. Определим сетку

$$z_k = k \cdot h_z, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad h_z = L/K$$

$$r_i = (i+0,5) \cdot h_r, \quad i = \overline{0, I-1}, \quad h_r = R/(I+0,5)$$

где h_z, h_r - шаги по переменной z , описывающей направление распространения волны, и по радиальной переменной соответственно.

Оператор Лапласа по переменной r аппроксимируем следующим разностным оператором [3]:

$$\Lambda_r A(r) = \frac{1}{rh_r} (r+0,5h_r) \frac{A(r+h_r) - A(r)}{h_r} - \frac{1}{rh_r} (r-0,5h_r) \frac{A(r) - A(r-h_r)}{h_r},$$

причем $\Lambda_r = \Lambda_r A + O(h_r^2/r)$ для достаточно гладкой функции A . Задаче (1)-(2) поставим в соответствие следующую двухслойную нелинейную разностную схему:

$$\begin{cases} \frac{a(z+h_z, r) - a(z, r)}{h_z} + \frac{i}{2kn_0} \Lambda_r A(z, r) - \frac{kn_{nl}^2}{2n_0} |A(z, r)|^2 A(z, r) = 0 \\ a(0, r) = \phi(r) \\ a(z, R) = 0 \\ A(z, r) = 0,5(a(z+h_z, r) + a(z, r)). \end{cases} \quad (4)$$

Система разностных уравнений (4) является нелинейной. Для нахождения неизвестной функции $a(z+h_z, r)$ можно использовать итерационный метод последовательных приближений в сочетании с разностной прогонкой по r :

$$\begin{cases} \frac{a^{s+1}(z+h_z, r) - a^s(z, r)}{h_z} + \frac{i}{2kn_0} \Lambda_r A^s(z, r) - \frac{kn_{nl}^2}{2n_0} |A^s(z, r)|^2 A^s(z, r) = 0, \\ a^s(z+h_z, R) = 0, \\ A^s(z, r) = 0,5 \left(a^s(z+h_z, r) + a^s(z, r) \right), \\ a^0(z+h_z, r) = u(z, r), \quad s = \overline{0, 1, \dots} \end{cases} \quad (5)$$

Теоретические исследования сходимости схем вида (5) приведены в работе [2].

Необходимо также отметить, что так как данная схема является консервативной, она - аналог интегральной формы закона сохранения электромагнитной энергии в среде.

2. Вычислительные эксперименты для среды с постоянным показателем преломления

Рассмотрим сначала аналитическое решение линейного уравнения, то есть $n_{nl} = 0$. В этом случае решение задачи (1) запишем в виде

$$U(z, r) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \exp\left(-i \frac{\mu_m^2}{R^2} \alpha z\right) J_0\left(\frac{\mu_m}{R} r\right),$$

где $\alpha = -\frac{1}{2kn_0}$,

$$C_m = \int_0^R \varphi(r) J_m\left(\frac{\mu_m}{R} r\right) dr,$$

а μ_m - нули функции Бесселя нулевого порядка.

Для простоты выберем начальное условие в виде функции Бесселя нулевого порядка

$$\phi(r) = J_0\left(\frac{\mu_1}{R} r\right),$$

тогда, используя свойство ортонормированности Бесселевых функций, получаем

$$C_0 = 1, \quad C_m = 0, \quad m = 1, 2, \dots,$$

в результате решение системы (1) - (2) будет иметь вид

$$U(z, r) = \exp\left(-i \frac{\mu_1^2}{R^2} \alpha z\right) J_0\left(\frac{\mu_1}{R} r\right). \quad (6)$$

2.1. Результаты экспериментальных исследований линейного уравнения

Пучок, описываемый формулой (6), является стационарным, так как $|U(r, z)|^2 = |U(r, 0)|^2$, то есть распределение интенсивности в плоскости OXY не зависит от расстояния z . Это распределение изображено на рис. 1.

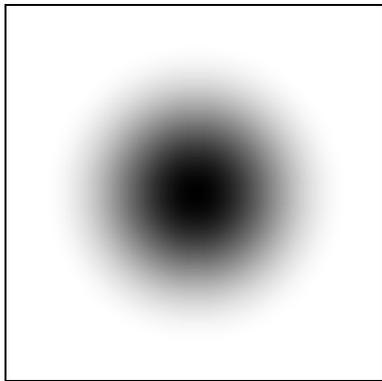


Рис. 1. Распределение интенсивности волны в линейной среде.

На рис. 2-3 приведены результаты численного решения линейного уравнения Шредингера на различных расстояниях от входа в среду.¹

В расчетах были использованы следующие значения параметров:

$$R=50 \text{ мкм};$$

$$\lambda=0,63 \text{ мкм}, \text{ причем } \lambda=2\pi/k;$$

$$n_0=1.$$

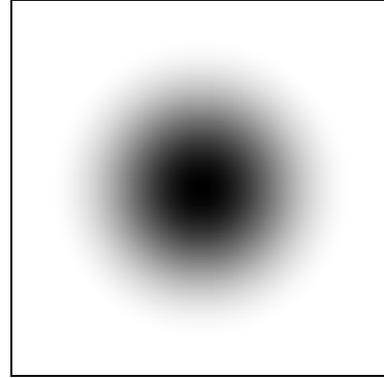


Рис. 2. Распределение интенсивности волны на расстоянии L от входа в среду ($L = 1 \text{ м}$, $nz = 1000$, $nr = 100$).

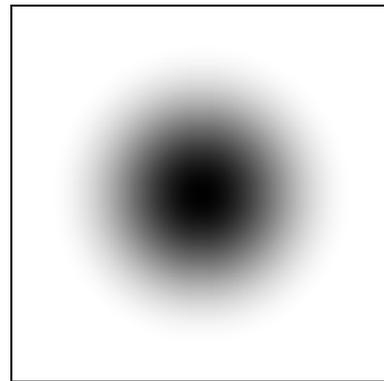


Рис. 3. Распределение интенсивности волны на расстоянии L от входа в среду ($L = 10 \text{ м}$, $nz = 1000$, $nr = 100$).

Как видно из приведенных графиков результат численного решения уравнения Шредингера полностью совпадает с результатом аналитического решения. Это подтверждает правильность выбора консервативной разностной схемы (5) для вычислительных экспериментов с уравнением Шредингера.

3.2. Численное решение нелинейного уравнения Шредингера

Самофокусировка пучка

На рис.4-6 приведены результаты численного решения нелинейного уравнения Шредингера со следующими параметрами:

$$R=50 \text{ мкм};$$

$$\lambda=0,63 \text{ мкм}, \text{ причем } \lambda=2\pi/k;$$

¹ В дальнейшем использованы следующие обозначения:

nr - количество интервалов разбиений по радиусу;

nz - количество интервалов разбиений по оси z .

Белым цветом изображается график решения линейного уравнения (3), а серым цветом - график численного решения уравнения Шредингера (1)-(2).

$$n_0 = 1;$$

$$n_{нл}^2 = 0,001, \text{ причем } n_{нл} > 0.$$

В работе [1] показано, что при $n_{нл} > 0$ происходит фокусировка пучка на расстоянии

$$f = R \sqrt{\frac{n_0^2}{2n_{нл}^2 \phi(0)}} \text{ от входа в нелинейную среду.}$$

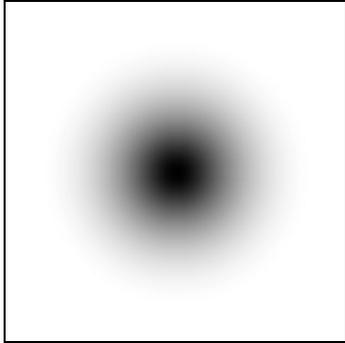


Рис. 4. Распределение интенсивности волны на расстоянии L от входа в среду ($L = 500 \text{ мкм}$, $n_z = 1000$, $nr = 100$).

Подставляя экспериментальные значения параметров, получаем, что $f \approx 1100 \text{ мкм}$. Вычислительные эксперименты (рис. 3-5) показывают, что фокусировка пучка происходит на расстоянии порядка 800-900 мкм. Таким образом, результаты численного решения достаточно близки к теоретическим оценкам, что еще раз подтверждает практическую пригодность выбранной разностной схемы.

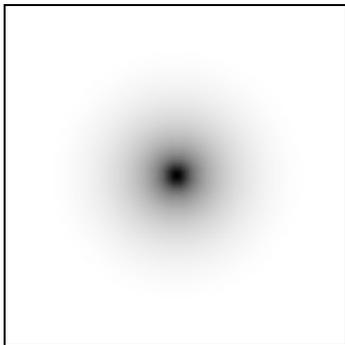


Рис. 5. Распределение интенсивности волны на расстоянии L от входа в среду ($L = 700 \text{ мкм}$, $n_z = 1000$, $nr = 100$).

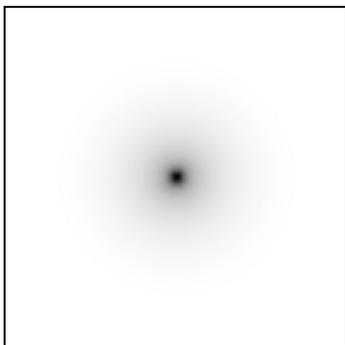


Рис. 6. Распределение интенсивности волны на расстоянии L от входа в среду ($L = 750 \text{ мкм}$, $n_z = 1000$, $nr = 100$).

Самодефокусировка пучка

На рис. 7-10 приведены результаты численного решения нелинейного уравнения Шредингера со следующими параметрами:

$$R = 50 \text{ мкм};$$

$$\lambda = 0,63 \text{ мкм}, \text{ причем } \lambda = 2\pi/k;$$

$$n_0 = 1;$$

$$n_{нл}^2 = 0,001, \text{ причем } n_{нл} < 0.$$

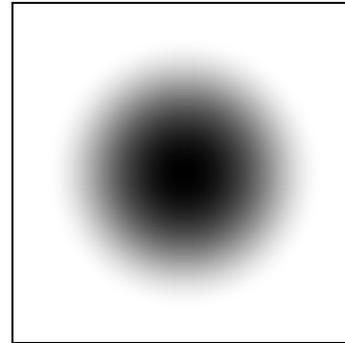


Рис. 7. Распределение интенсивности волны на расстоянии L от входа в среду ($L = 500 \text{ мкм}$, $n_z = 1000$, $nr = 100$).

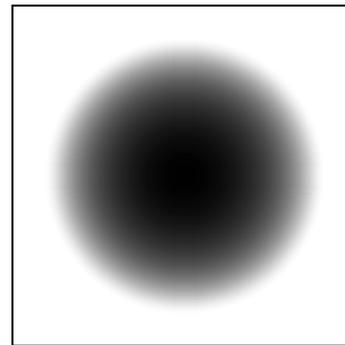


Рис. 8. Распределение интенсивности волны на расстоянии L от входа в среду ($L = 1 \text{ мм}$, $n_z = 1000$, $nr = 100$).

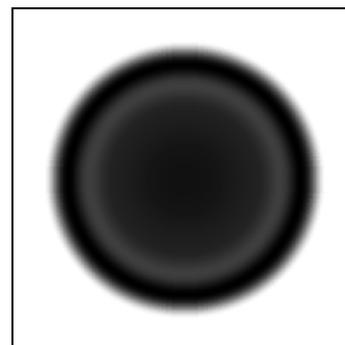


Рис. 9. Распределение интенсивности волны на расстоянии L от входа в среду ($L = 1,5 \text{ мм}$, $n_z = 1000$, $nr = 100$).

В работе [1] показано, что при $n_{нл} < 0$ происходит самодефокусировка пучка в нелинейной среде, то есть смещение энергии пучка в периферийную зону. Приведенные выше графики численного моделирования демонстрируют этот факт.

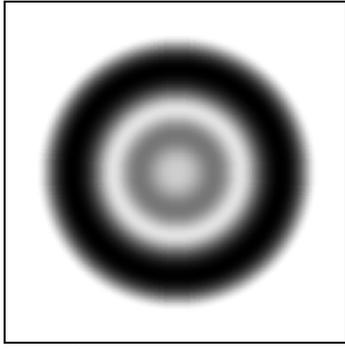


Рис. 10. Распределение интенсивности волны на расстоянии L от входа в среду ($L = 2,5\text{мм}$, $nz = 1000$, $nr = 100$).

3. Вычислительные эксперименты для среды с показателем преломления, распределенным по параболическому закону

Пусть показатель преломления зависит от радиуса следующим образом

$$n_0^2 = n_1^2 \left(1 - 2\Delta \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right), \quad (7)$$

причем $n_{\text{пл}} = 0$.

Будем искать решение уравнения в виде

$$U(z, r) = A(r)B(z). \quad (8)$$

Подставляя (8) в уравнение (1), получаем факторизованное уравнение

$$\frac{2ik}{B} \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{1}{n_0 A} \Lambda_r A = -f, \quad (9)$$

где f - произвольная константа.

$$\text{Таким образом, } B(z) = C \exp\left(i \frac{f}{2k} z\right). \quad (10)$$

Представим $A(r)$ в виде произведения двух функций

$$A(r) = X(r) \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2}\right). \quad (11)$$

После подстановки (11) и (10) в (8) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} - \frac{4r}{\omega_0^2} \frac{\partial X}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial r} - \frac{4}{\omega_0^2} X + \\ + \frac{4r^2}{\omega_0^4} X + fn_0 X = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Осуществим замену переменных $\alpha = r^2$. Тогда (12) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial^2 X}{\partial \alpha^2} + \left(1 - \frac{2\alpha}{\omega_0^2}\right) \frac{\partial X}{\partial \alpha} + \left(\frac{fn_1}{4} - \frac{1}{\omega_0^2}\right) X + \\ + \left(\frac{\alpha}{\omega_0^4} - \frac{\alpha \Delta fn_1}{4a^2}\right) X = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{Пусть } \frac{1}{\omega_0^4} = \frac{\Delta fn_1}{4a^2}. \quad (14)$$

Осуществим еще одну замену переменных

$$\alpha' = \frac{2\alpha}{\omega_0^2} \quad (15)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \alpha' \frac{\partial^2 X}{\partial \alpha'^2} + (1 - \alpha') \frac{\partial X}{\partial \alpha'} + \\ + \frac{\omega_0^2}{2} \left(\frac{fn_1}{4} - \frac{1}{\omega_0^2} \right) X = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Решением уравнения (16) являются многочлены Лагерра

$$X = L_s(\alpha') = L_s\left(\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right), \quad (17)$$

причем

$$s = \frac{fn_1}{8} \omega_0^2 - \frac{1}{2} \quad (18)$$

Таким образом, с учетом (8), (10) и (11) получаем искомое решение

$$U(z, r) = C \exp\left(i \frac{f}{2k} z\right) L_s\left(\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right) \times \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2}\right) \quad (19)$$

3.1. Результаты численного решения линейного уравнения Шредингера

Для вычислительных экспериментов выберем, например, моду Гаусса-Лагерра с номером $s=10$

Тогда из (18) и (14) получаем, что

$$f = \frac{42^2 \Delta}{n_1 a^2} \quad (20)$$

$$\omega_0^2 = \frac{a^2}{21\Delta} \quad (21)$$

Для того чтобы обеспечить выполнение граничного условия, выберем аргумент многочлена Лагерра, равный десятому нулю функции.

$$\frac{2R^2}{\omega_0^2} = m_{10}, \quad (22)$$

где $m_{10}=29,9206970123$ - десятый нуль многочлена Гаусса-Лагерра.

На рис. 11 изображено распределение интенсивности в пучке, описываемом формулой (19).

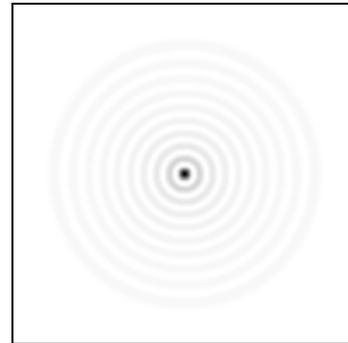


Рис. 11. Распределение интенсивности волны в линейной среде.

На рис. 12-13 приведены результаты численного моделирования линейного уравнения со следующими параметрами:

$$R = 50 \text{ мкм};$$

$$\lambda = 0,63 \text{ мкм, причем } \lambda = 2\pi/k;$$

$$n_1 = 1.$$

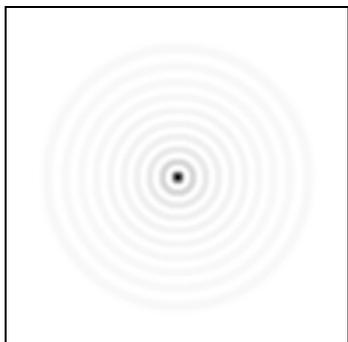


Рис. 12. Распределение интенсивности волны на расстоянии L от входа в среду ($L = 1\text{ м}$, $n_z = 1000$, $n_r = 100$).

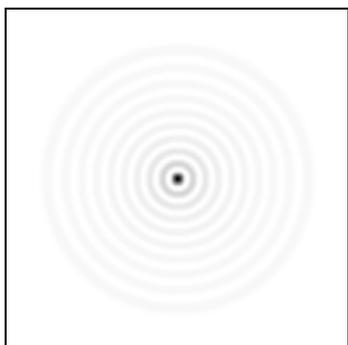


Рис. 13. Распределение интенсивности волны на расстоянии L от входа в среду ($L = 10\text{ м}$, $n_z = 1000$, $n_r = 100$).

Как видно из приведенных графиков, результат численного решения уравнения Шредингера полностью совпадает с результатом аналитического решения.

Заключение

Итак, в результате проведения вычислительных экспериментов получено подтверждение сходимости разностной схемы (5), использованной для решения нелинейного уравнения Шредингера. Процесс итерационного уточнения обнаружил быструю сходимость: для уточнения решения до величин порядка 10^{-4} требуются 2-3 итерации.

Проведенные исследования подтвердили высокую точность численного решения задачи. Так для модели среды, не учитывающей эффект самовоздействия, численное решение практически совпадает с аналитическим, рассчитанным по формуле (6).

Для среды с “параболическим профилем” показатели преломления моды Гаусса-Лагерра, рассчитанные с помощью схемы (5), практически не претерпевают изменений в процессе распространения волны на расстояние порядка десятков метров, что соответствует теории [4].

Для модели среды, учитывающей эффект самовоздействия, численный расчет позволяет наблюдать как явление самофокусировки излучения, так и его самодефокусировки, что спрогнозировано теоретическими оценками, например в работе [1].

Литература

1. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн // М., Наука. 1979.
2. Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П., Трофимов В.А. Математическое моделирование в нелинейной оптике // М., Изд-во Моск. ун-та. 1989.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем // М., Наука. 1977.
4. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов // М., Мир. 1984.

Numerical solution of the nonlinear Schrödinger equation in the radiallysymmetric case

A.A. Degtyarev, A.E. Derkach
Samara State Aerospace University

Abstract

To solve the Schrödinger equation describing the propagation of an electromagnetic wave in a nonlinear medium, the authors use a conservative difference scheme with the iterative improvement, which has the quadratic order of accuracy in the direction of wave propagation, and the order of accuracy close to quadratic in the radial variable. The results obtained in computational experiments fully confirm the theoretical studies. An important feature of this method is that it allows to simulate the process of wave propagation in a nonlinear medium over a distance of tens of meters.

Citation: Degtyarev AA, Derkach AE. Numerical solution of the nonlinear Schrödinger equation in the radially-symmetric case. *Computer Optics* 2001; 21: 14 - 18.

References

- [1] Vinogradova MB, Rudenko OV, Sukhorukov AP. Theory of waves [In Russian]. Moscow: "Nauka" Publisher; 1979.
- [2] Karamzin YN, Sukhorukov AP, Trofimov VA. Mathematical modeling in nonlinear optics [In Russian]. Moscow: MGU Publisher; 1989.
- [3] Samarskii AA. The theory of difference schemes. CRC Press; 2001.
- [4] Adams MJ. An introduction to optical waveguides. New York: John Wiley & Sons Inc; 1981.