

ВЛИЯНИЕ ДИФРАКЦИИ НА ИЗОБРАЖЕНИЯ, СОГЛАСОВАННЫЕ С ВЫТЯНУТЫМИ СФЕРОИДАЛЬНЫМИ ВОЛНОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

С.Н. Хонина, В.В. Котляр

Институт систем обработки изображений РАН, г. Самара

Аннотация

Рассмотрены свойства вытянутых сфероидальных волновых функций нулевого порядка, важные для дифракционной оптики: инвариантность к преобразованию Фурье, устойчивость к диафрагмированию в оптических системах, самовоспроизведение на некотором расстоянии в свободном пространстве. Исследованы влияние размеров диафрагмы на точность передачи сигнала, согласованного с вытянутыми сфероидальными волновыми функциями линзовыми системами. Проведено сравнение с функциями Гаусса-Эрмита.

Введение

Вытянутые сфероидальные волновые функции (ВСВФ) известны в оптике, прежде всего, как моды оптических систем с ограниченной апертурой и проходящие через такие оптические системы без искажений [1-4].

ВСВФ представляют собой полный набор функций с ограниченной спектральной полосой, которые ортогональны как на данном конечном интервале, так и на бесконечном интервале [5]. Таким образом, бесконечным рядом по ВСВФ можно представить любое световое поле. Суперпозиция ВСВФ, аппроксимирующая некоторое световое распределение, будет обладать модовым характером при прохождении через оптические линзовые системы с ограниченной апертурой. То есть, изображение будет устойчиво к дифракционным эффектам, связанным с ограниченными размерами апертуры оптической системы.

Заметим, что разложение поля или изображения, сформированного оптической линзовой системой по базису ВСВФ является оптимальной процедурой в смысле минимального количества слагаемых разложения, число которых равно числу степеней свободы оптической системы по Шеннону [6, 7].

В [8] высказано предположение, что обобщенные двумерные ВСВФ [9] обладают также свойством самовоспроизведения при распространении в пространстве, то есть они являются собственными функциями оператора дифракции Френеля от ограниченной апертуры.

В данной работе с помощью численного моделирования исследуется устойчивость одномерных ВСВФ к преобразованию Френеля. Кроме того, исследуются другие свойства ВСВФ, важные для дифракционной оптики: инвариантность к преобразованию Фурье, устойчивость к диафрагмированию в объектной плоскости.

Также проведены численные эксперименты, моделирующие прохождение сигнала, представляющего собой суперпозицию ВСВФ, через линзовую систему с ограниченным зрачком в спектральной плоскости. Исследуется влияние размеров диафрагмы на точность передачи сигнала. Проводится сравнение с функциями Гаусса-Эрмита.

1. Свойства ВСВФ, используемые в дифракционной оптике

После разделения трехмерного скалярного волнового уравнения в вытянутых сфероидальных

координатах возникает дифференциальное уравнение [10]:

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d\psi(x)}{dx} + \left(\chi - c^2x^2 - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\psi(x) = 0, \quad (1)$$

которое имеет непрерывное вещественное решение $\psi(x)$, ограниченное при любых x . С точностью до константы решение единственно. Здесь и далее: c – произвольное положительное число, m – неотрицательное целое. Для упрощения записи в дальнейшем будем опускать зависимость величин от c .

Обозначим специальные значения χ , при которых существуют непрерывные решения через $\chi_{m,n}$, $n=m, m+1, \dots$. Эти собственные значения могут быть так обозначены, поскольку $0 < \chi_{m,m} < \chi_{m,m+1} < \dots$. Соответствующие им решения обозначим $\psi_{m,n}(x)$. Собственные функции $\psi_{m,n}(x)$ четные, если $n-m$ – четное число и нечетные, если $n-m$ – нечетное число. Также они имеют ровно $n-m$ нулей на открытом интервале $|x| < 1$.

Функции $\psi_{m,n}(x)$ известны [11, 12] как вытянутые сфероидальные волновые функции порядка m . Однако особый интерес представляют ВСВФ нулевого порядка. Благодаря ряду замечательных свойств они играют важную роль во многих прикладных задачах.

Функции $\psi_{0,n}(x)$, которые далее будем обозначать просто $\psi_n(x)$, удовлетворяют интегральному уравнению [10]:

$$\lambda_n \psi_n(y) = \int_{-1}^1 \frac{\sin[c(y-x)]}{\pi(y-x)} \psi_n(x) dx, \quad (2)$$
$$\lambda_n \psi_n(y) = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\sin\left[\frac{2c}{T}(y-x)\right]}{\pi(y-x)} \psi_n(x) dx,$$

где λ_n – собственные числа, $1 > \lambda_0 > \lambda_1 > \dots > 0$. При этом собственные числа интегрального преобразования определяют количество энергии соответствующей собственной функции, концентрирующейся на данном ограниченном интервале. Собственные числа, близкие к единице, показывают, что данная ВСВФ имеет за пределами данного интервала малую долю энергии. Поведение λ_n как функции от n таково, что до некоторого $n_0 = 2c/\pi$ собственные числа имеют значения близкие к единице, а после – резко спадают до нуля.

Используя (2) функция $\psi_n(x)$ можно продлить на все пространство $[-\infty, \infty]$. Рассмотрим преобразо-

вание Фурье аналитического продолжения $\psi_n(y)$ (при $\lambda_n \equiv 1$):

$$\mathfrak{F}_n(w) = \mathfrak{I}[\psi_n(y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(y) \exp(-i2\pi y w) dy. \quad (3)$$

Из (2) получаем:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_n(w) &\equiv \mathfrak{I}\left[\frac{2c}{\pi T} \operatorname{sinc}\left(\frac{2c}{\pi T} x\right) * \psi_n(x)\right] = \\ &= \mathfrak{I}\left[\frac{2c}{\pi T} \operatorname{sinc}\left(\frac{2c}{\pi T} x\right)\right] \mathfrak{F}_n(w) = \Pi\left(\frac{\pi T}{2c} w\right) \mathfrak{F}_n(w) \end{aligned}$$

где $\operatorname{sinc}(x) = \sin(\pi x) / \pi x$, *—знак свертки,

$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 0,5 \\ 0, & |x| > 0,5 \end{cases}$. Таким образом, спектр $\psi_n(x)$

практически равен нулю вне интервала $[-w_0, w_0]$:

$$\mathfrak{F}_n(w) \equiv \Pi\left(\frac{w}{2w_0}\right) \mathfrak{F}_n(w), \quad w_0 = \frac{c}{\pi T}. \quad (4)$$

ВСВФ нулевого порядка являются собственными функциями преобразования Фурье на ограниченном интервале [3, 10, 13]:

$$\alpha_n \psi_n(y) = \int_{-1}^1 \exp(icy) \psi_n(x) dx,$$

$$\lambda_n = \frac{c}{2\pi} |\alpha_n|^2, \quad (5)$$

$$i^n \sqrt{\frac{2\pi\lambda_n}{c}} \psi_n\left(\frac{y}{c}\right) = \int_{-1}^1 \exp(icy) \psi_n(x) dx, \quad (6)$$

с учетом комплексного сопряжения и замены переменных:

$$(-i)^n \sqrt{\frac{2\lambda_n}{T\omega_0}} \psi_n\left(\frac{2\omega}{T\omega_0}\right) = \int_{-T/2}^{T/2} \exp(-i2\pi x \omega) \psi_n(x) dx. \quad (7)$$

Используя правило нормировки, выбранное в [5]:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \delta_{mn} \lambda_n, \quad (8)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \delta_{mn},$$

и свойство (4), получаем выражение для преобразования Фурье на бесконечном интервале:

$$\begin{aligned} i^{-n} \sqrt{\frac{T}{\lambda_n 2w_0}} \psi_n\left(\frac{T\omega}{2w_0}\right) \Pi\left(\frac{\omega}{2w_0}\right) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi x \omega) \psi_n(x) dx \end{aligned} \quad (9)$$

и выражение для sinc-преобразования (2) на бесконечном интервале:

$$\psi_n(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[c(y-x)]}{\pi(y-x)} \psi_n(x) dx. \quad (10)$$

Все перечисленные свойства взаимосвязаны и следуют один из другого. Например, из (2) и (10) следует свойство двойной ортогональности (8):

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) \left[\frac{1}{\lambda_m} \int_{-1}^1 \psi_m(t) \frac{\sin[c(x-t)]}{\pi(x-t)} dt \right] dx = \\ &= \frac{1}{\lambda_m} \int_{-1}^1 \psi_m(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) \frac{\sin[c(x-t)]}{\pi(x-t)} dx \right] dt = \\ &= \frac{1}{\lambda_m} \int_{-1}^1 \psi_m(t) \psi_n(t) dt = \frac{1}{\lambda_m} \lambda_m \delta_{nm} = \delta_{nm}. \end{aligned}$$

Также из (5), учитывая, что:

$$\alpha_n^* \psi_n(y) = \int_{-1}^1 \exp(-icy) \psi_n(x) dx,$$

$\psi_n(x)$ — действительные, можно получить (2):

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 \exp(icy) \psi_n(x) dx = \\ &= \int_{-1}^1 \exp(icy) \left[\frac{1}{\alpha_n^*} \int_{-1}^1 \exp(-ict) \psi_n(t) dt \right] dx = \\ &= \frac{1}{\alpha_n^*} \int_{-1}^1 \psi_n(t) \left[\int_{-1}^1 \exp[icx(y-t)] dx \right] dt = \\ &= \frac{2}{\alpha_n^*} \int_{-1}^1 \psi_n(t) \frac{\sin[c(y-t)]}{c(y-t)} dt = \\ &= \frac{2\pi}{\alpha_n^* c} \int_{-1}^1 \psi_n(t) \frac{\sin[c(y-t)]}{\pi(y-t)} dt = \alpha_n \psi_n(y). \end{aligned}$$

То есть,

$$\int_{-1}^1 \psi_n(t) \frac{\sin[c(y-t)]}{\pi(y-t)} dt = \frac{|\alpha_n|^2 c}{2\pi} \psi_n(y) = \lambda_n \psi_n(y).$$

2. Численные результаты

Одним из важнейших свойств ВСВФ нулевого порядка из перечисленных в разделе 1, является инвариантность к преобразованию Фурье на ограниченном отрезке (5)–(7). То есть функция $\psi_n(x)$ воспроизводится в зоне дифракции Фраунгофера или в фокальной плоскости сферической линзы с точностью до коэффициента, определяемого размерами диафрагмы в объектной плоскости.

Известен ряд функций, инвариантных к преобразованию Фурье в бесконечных пределах. Например, в [14] рассматривается способ синтеза объектов, инвариантных к преобразованию Фурье путем композиции исходной функции и ее Фурье-образа. Однако при введении диафрагмы свойство Фурье-инвариантности таких объектов нарушается. Более удобными для диафрагмирования являются функции Гаусса-Эрмита и Гаусса-Лагерра, энергия которых как в объектной, так и частотной плоскостях сконцентрирована на ограниченном отрезке. Хотя, строго говоря, эти функции инвариантны к преобразованию Фурье в бесконечных пределах.

В [15] были использованы функции Гаусса-Эрмита (ФГЭ) как начальное приближение в итерационном расчете ВСВФ нулевого порядка:

$$g_n(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) H_n\left(\frac{x}{\sigma}\right), \quad (11)$$

где $H_n(x)$ - многочлен Эрмита, σ - радиус гауссового пучка, $\sigma = c^{-1/2}$.

В данной работе расчет одномерных ВСВФ проводился на основе алгоритма, описанного в работах [16, 17].

На рис. 1, 2 показаны графики ФГЭ и ВСВФ (рис. 1а, 2а) и модулей их Фурье-образов (рис. 1б, 2б), полученных с помощью формулы (5), при различных значениях параметра c .

Для $c=20$, $n=3$ вся энергия $\psi_n(x)$ сконцентрирована на отрезке $[-1, 1]$ ($\lambda_n(c) \cong 1,00$, $n_0=12$). Энергия $g_n(x)$ также практически вся включается в этот отрезок. На рис. 1б видно, что обе функции демонстрируют инвариантность к преобразованию Фурье: среднеквадратичное отклонение модуля спектра ФГЭ от модуля самой ФГЭ составило $\delta=0,12\%$, а для ВСВФ отклонение определялось лишь ошибкой численного интегрирования и составило $\delta=0,0001\%$.

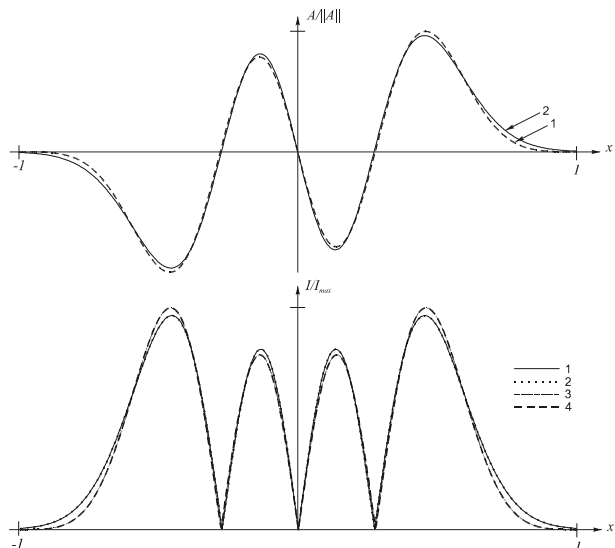


Рис. 1. Сравнение Фурье-спектров для ФГЭ и ВСВФ при $n=3$, $c=20$, $\lambda_n(c) \cong 1,00$: (а) ФГЭ (линия 1) и ВСВФ (линия 2); (б) модули ФГЭ (линия 1) и ее Фурье-образа (линия 2), ВСВФ (линия 3) и ее Фурье-образа (линия 4).

Для $c=10$, $n=5$ за отрезком $[-1, 1]$ находится менее 18% энергии $\psi_n(x)$ ($\lambda_n(c)=0,825$, $n_0=6$), аналогично и для $g_n(x)$. Однако на рис. 2б видно существенное нарушение свойства Фурье-инвариантности для ФГЭ ($\delta=28,24\%$) и его сохранение для ВСВФ ($\delta=1,02\%$).

Двумерные ВСВФ нулевого порядка могут быть получены как произведение одномерных $\psi_{nm}(x, y) = \psi_n(x) \cdot \psi_m(y)$. На рис. 3 показана двумерная ВСВФ (3,5) для $c=10$ (а) и $c=7$ (б) и их Фурье-образы (соответственно рис. 3в и 3г).

В [8] было сделано предположение, что ВСВФ обладают также свойством самовоспроизведения при распространении в пространстве. Параксиальное рас-

пространство световых полей в свободном пространстве описывается преобразованием Френеля:

$$F(y) = \sqrt{\frac{k}{z}} \exp(ikz) \times \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \exp\left[\frac{ik}{2z}(y-x)^2\right] dx \quad (12)$$

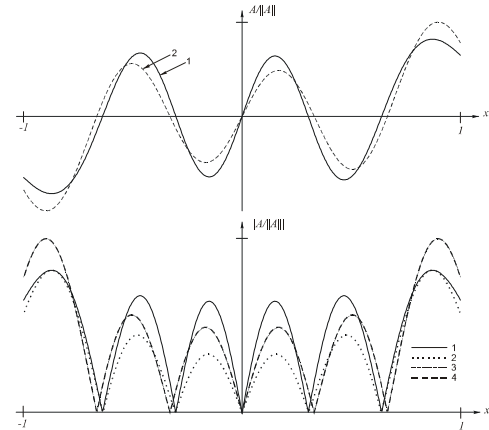


Рис. 2. Сравнение Фурье-спектров для ФГЭ и ВСВФ при $n=5$, $c=10$, $\lambda_n(c)=0,825$: (а) ФГЭ (линия 1) и ВСВФ (линия 2); (б) модули ФГЭ (линия 1) и ее Фурье-образа (линия 2), ВСВФ (линия 3) и ее Фурье-образа (линия 4).

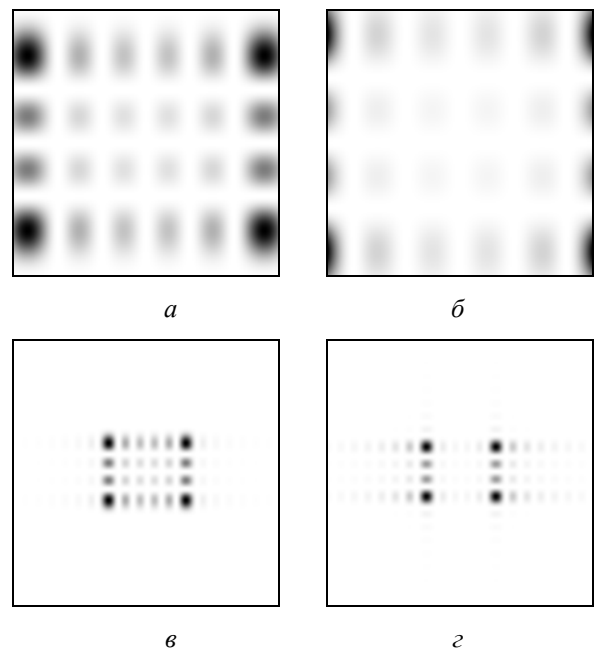


Рис. 3. Двумерная ВСВФ (3,5) для $c=10$ (а) и $c=7$ (б) и их Фурье-образы, (в) и (г), соответственно.

На рис. 4, 5 показаны графики ВСВФ и модулей их Френель-образов, полученных с помощью формулы (12), при различных значениях параметра c . Видно, что $\psi_n(x)$, собственные числа λ_n которых практически равны единице (то есть на отрезке $[-T/2, T/2]$ заключена вся энергия), примерно сохраняет свой вид (с точностью до масштаба) на всей оптической оси (рис. 4). Если же $\lambda_n < 1$, то $\psi_n(x)$ в зоне дифракции Френеля претерпевает значительные изменения, затем с ростом расстояния z посте-

пенно восстанавливается и самовоспроизводится в зоне дифракции Фраунгофера (рис. 5).

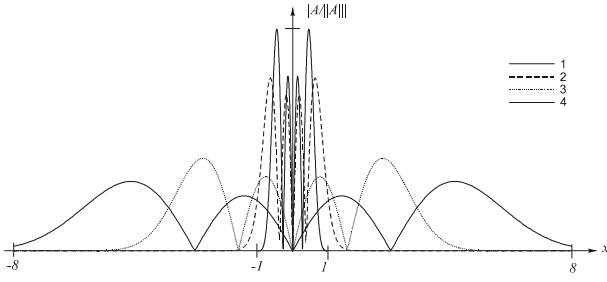


Рис. 4. Распространение ВСВФ при $n=3$, $c=20$, $\lambda_n(c) \approx 1.00$ в свободном пространстве: модули при $z=0$ (линия 1), $z=500$ мм (линия 2), $z=2750$ мм (линия 3), $z=5000$ мм (линия 4).

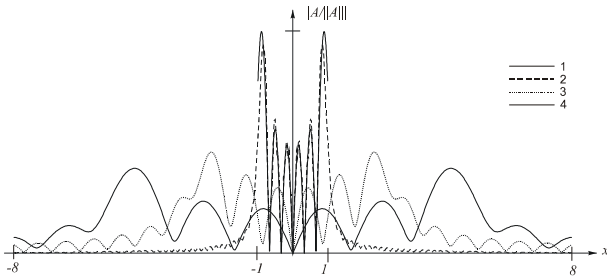


Рис. 5. Распространение ВСВФ при $n=5$, $c=10$, $\lambda_n(c)=0,825$ в свободном пространстве: модули при $z=0$ (линия 1), $z=500$ мм (линия 2), $z=2750$ мм (линия 3), $z=5000$ мм (линия 4).

На рис. 6 показаны графики среднеквадратичного отклонения модулей Френель-образов от модулей исходных ВСВФ для различных значений собственных чисел. Видно, что для $\psi_n(x)$ с $\lambda_n \approx 1$ отклонения значительно ниже, и самовоспроизведение наступает гораздо раньше, чем для $\psi_n(x)$ с $\lambda_n < 1$.

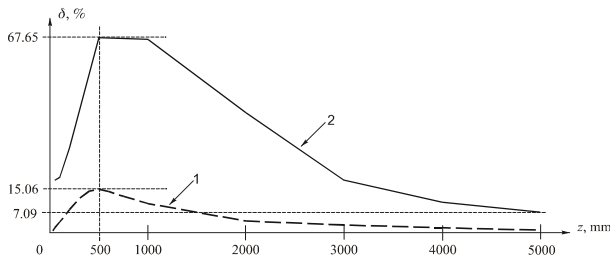


Рис. 6. Среднеквадратичное отклонение при распространении ВСВФ при $n=3$, $c=20$, $\lambda_n(c) \approx 1,00$ (линия 1) и при $n=5$, $c=10$, $\lambda_n(c)=0,825$ (линия 2) в свободном пространстве в зависимости от расстояния z .

Благодаря свойству (7) изображение, согласованное с ВСВФ, будет обладать модовым характером при прохождении через оптические линзовые системы с ограниченной апертурой. То есть, такое изображение будет устойчиво к дифракционным эффектам, связанным с ограниченными размерами апертуры оптической системы.

ВСВФ представляют собой полный набор ортогональных функций с ограниченной спектральной полосой. Таким образом, бесконечным рядом по ВСВФ можно представить любое световое поле:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \psi_n(x), \quad (13)$$

где

$$f_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \psi_n(x) dx. \quad (14)$$

В [7] показано, что существенными являются первые $M \leq n_0$ членов ряда (14). Именно $n_0 = 2c/\pi = 2Tw_0$ определяет число Шеннона для ВСВФ [3]. Кроме того, при вычислении коэффициентов (14) для $n > n_0$ будет происходить деление на $\lambda_n \approx 0$, что может вносить существенные ошибки. Поэтому будем далее рассматривать некоторую аппроксимацию заданного светового поля:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^M f_n \psi_n(x). \quad (15)$$

Заметим, что выражение (2) можно рассматривать как коэффициенты (14) ряда (13) для функции:

$$\frac{\sin\left[\frac{2c}{T}(y-x)\right]}{\pi(y-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y) \psi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \psi_n(y) \psi_n(x) \quad (16)$$

Т. к. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то

$$\frac{2c}{\pi T} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \psi_n^2(x). \quad (17)$$

и пользуясь свойством ортогональности (8), получаем:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \psi_n^2(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \int_{-T/2}^{T/2} \psi_n^2(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 = \frac{2c}{\pi} = n_0 \quad (18)$$

Чтобы повысить точность аппроксимации (15), нужно увеличивать значение параметра c , так как $n_0 = 2c/\pi$. На рис. 7 показаны аппроксимации прямоугольника ВСВФ для различных значений параметра c и Фурье-спектры этих аппроксимаций. Видно, что ростом параметра c точность аппроксимации повышается: $\delta = 14,98\%$ (рис. 7а), $\delta = 13,46\%$ (рис. 7в), $\delta = 11,88\%$ (рис. 7д). Однако за это приходится платить расширением спектра (сравни рис. 7б, г, е). Если ряд (15) содержит только $\psi_n(x)$ с собственными числами, практически равными 1 (то есть $\lambda_n \approx 1$), то спектр изображения $\tilde{f}(x)$ будет находиться внутри отрезка $[-w_0, w_0]$, $w_0 = c/T\pi$. Если же $\lambda_n < 1$, то спектр выйдет за этот отрезок. Так как $\lambda_{12}(20) = 0,588$, $\lambda_{18}(30) = 0,707$, $\lambda_{30}(50) = 0,865$, то нет гарантии, что спектры полученных аппроксимаций не выйдут за частоту w_0 .

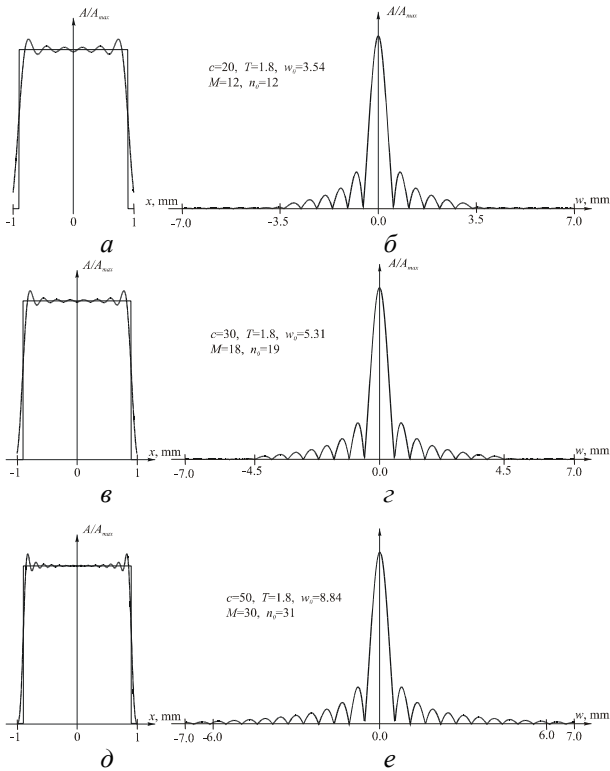


Рис. 7. Аппроксимации прямоугольника ВСВФ для различных значений параметра c (а, в, д) и соответствующие им модули спектров (б, г, е).

Однако при соблюдении условия $M \leq n_0$, количество энергии в спектре за отрезком $[-w_0, w_0]$ будет немного, и потери информации при таком диафрагмировании будут невелики. На рис. 8 приведены результаты моделирования прохождения сигнала через линзовую систему с ограниченным зрачком.

При моделировании рассматривалась аппроксимация косинусного сигнала $f(x)$ рядом (15) по ВСВФ и, для сравнения, по ФГЭ. При $M=16$, $c=30$ среднеквадратичная ошибка аппроксимации составила $\delta=7,19\%$ для ВСВФ и $\delta=11,29\%$ для ФГЭ (рис. 8а и 8б соответственно линия 1 – исходный сигнал, линия 2 – аппроксимация). На рис. 8ж показаны графики модулей спектров каждой из аппроксимаций: линия 1 – для ВСВФ, линия 2 – для ФГЭ. Далее спектры подвергались усечению до частоты w_c .

Учитывая, что $\lambda_{16}(30)=0,985$, усечение до частоты $w_c=5$ ($w_0=5,31$) не должно привести к потере информации в изображении. Действительно, в этом случае среднеквадратичное отклонение интенсивности изображения от интенсивности аппроксимации составило $\delta=0,02\%$ для ВСВФ (рис. 8в) и $\delta=0,93\%$ для ФГЭ (рис. 8г). При уменьшении размеров диафрагмы ошибка будет расти. Так, при усечении спектра до частоты $w_c=1,5$ отклонение составило $\delta=24,17\%$ для ВСВФ (рис. 8д) и $\delta=34,67\%$ для ФГЭ (рис. 8е).

На рис. 9 приведены графики среднеквадратичного отклонения интенсивности изображения от интенсивности аппроксимации косинусного сигнала по ВСВФ (линия 1) и по ФГЭ (линия 2) в зависимости от частоты усечения спектра w_c . Видно, линия 1,

за исключением некоторых точек, лежит ниже линии 2. То есть ВСВФ обеспечивают меньшие искажения для изображающих систем с ограниченным зрачком, чем ФГЭ.

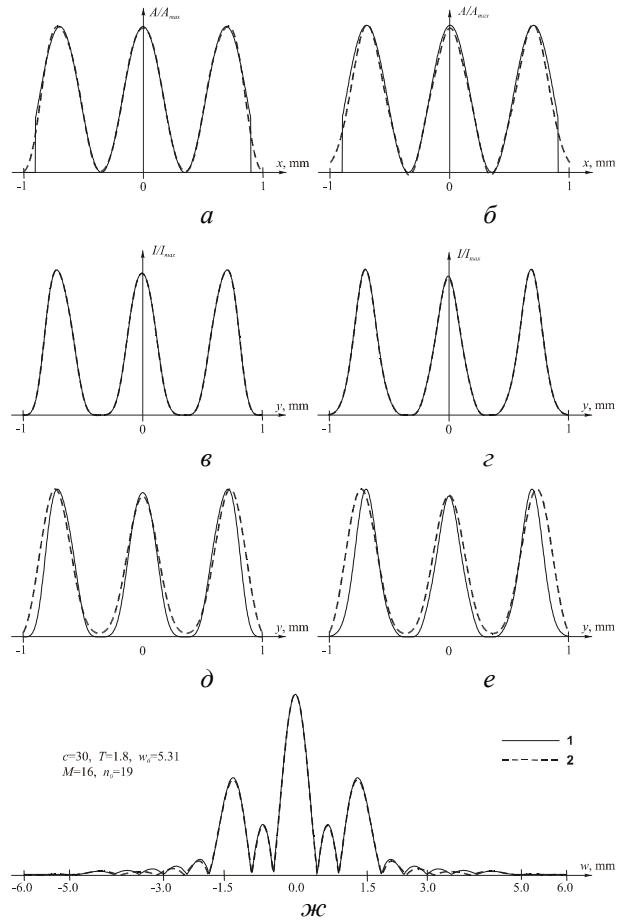


Рис. 8. Аппроксимации косинусной функции рядом (16) по ВСВФ (а) и по ФГЭ (б) при $M=16$, $c=30$, и восстановление этих аппроксимаций по спектру (ж), усеченному до частоты $w_c=5$ (в, г) и $w_c=1,5$ (д, е).

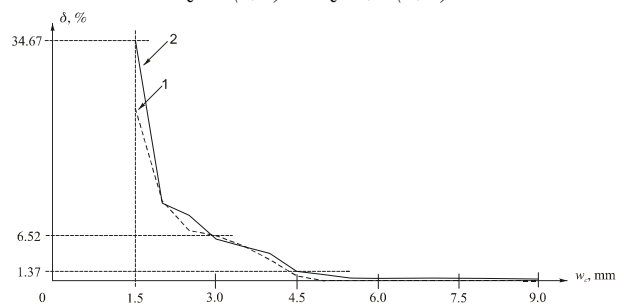


Рис. 9. Ошибка изображения при аппроксимации косинусной функции рядом (15) по ВСВФ (линия 1) и по ФГЭ (линия 2) в зависимости от частоты усечения спектра w_c .

На рис. 10 приведены графики эффективности, то есть количества энергии, сохранившейся в изображении, при прохождении через линзовую систему аппроксимации косинусного сигнала по ВСВФ (линия 1) и по ФГЭ (линия 2) в зависимости от ширины диафрагмы $2w_c$ в частотной плоскости. Видно, что линия 1 практически достигает 100% на частоте

$w_c=4,5$ и лежит выше линии 2 вплоть до частоты $w_c=3,3$.

Таким образом, на основании рис. 9 и 10 можно говорить, скорее, о выигрыше ВСВФ, по сравнению с ФГЭ в смысле меньших искажений сигнала, чем энергетических потерь.

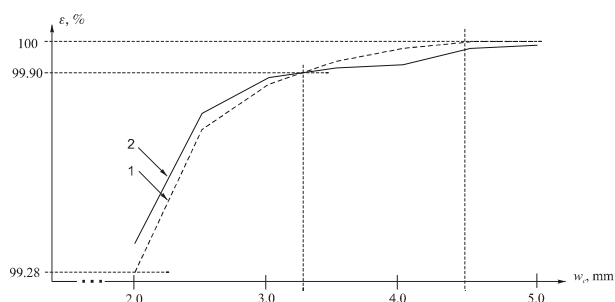


Рис. 10. Эффективность изображения при аппроксимации косинусной функции рядом (15) по ВСВФ (линия 1) и по ФГЭ (линия 2) в зависимости от частоты усечения спектра w_c .

Заключение

В данной работе получены следующие результаты.

На численных примерах подтверждена устойчивость дифракционной картины Фраунгофера вытянутых сфероидальных волновых функций нулевого порядка к введению диафрагмы в объектной плоскости. Для сравнения показано, что при экранировании части энергии функций Гаусса-Эрмита их свойство Фурье-инвариантности нарушается.

На численных примерах показано самовоспроизведение сфероидальных функций на некотором расстоянии при распространении в свободном пространстве. При этом, чем собственные числа λ_n ближе к единице, тем раньше наступает самовоспроизведение.

Проведено численное моделирование прохождения сигнала, согласованного со сфероидальными функциями и, для сравнения, с функциями Гаусса-Эрмита, через линзовую систему с ограниченным зрачком. Исследование влияния размеров диафрагмы в спектральной плоскости на точность и эффективность передачи изображения показало, что выигрыш сфероидальных функций, по сравнению с функциями Гаусса-Эрмита достигается, скорее, в смысле меньших искажений сигнала, чем энергетических потерь.

Благодарность

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 00-15-96114, 00-01-00031).

Литература

1. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике // М., Физматгиз. 1962.

2. Комаров И.В., Пономарев Л. И., Славянов С. Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции // М., Наука. 1976.
3. M. Bertero, E. R. Pike Resolution in diffraction-limited imaging, a singular value analysis // I. The case of coherent illumination, Optica Acta, 29(6), P. 727-746. (1982).
4. M. Piche, P. Lavigne, F. Martin, P.A. Belanger Modes of resonator with internal apertures // Appl. Opt., 22(13), P. 1999-2006 (1983).
5. D. Slepian, H.O. Pollak, Prolate spheroidal wave functions. Fourier Analysis and Uncertainty – I, The Bell System Technical Journal, 40, P. 43-46 (1961).
6. H.J. Landau, H.O. Pollak Prolate spheroidal wave functions // Fourier Analysis and Uncertainty – II, The Bell System Technical Journal, 40, P. 65-84 (1961).
7. D. Slepian, H.O. Pollak Prolate spheroidal wave functions // Fourier analysis and uncertainty – III: The dimension of essentially time-and band-limited signals, Bell Syst. Tech. J., 41, P. 1295-1336. (1962).
8. W.D. Montgomery Algebraic formulation of diffraction applied to self-imaging // J. Opt. Soc. Am., 58(8), P. 1112-1124. (1968).
9. D. Slepian Prolate spheroidal wave functions. Fourier Analysis and Uncertainty – IV: Extensions to many dimensions; generalized prolate spheroidal functions, The Bell System Technical Journal, 43, P. 3009-3057 (1964).
10. D. Slepian Some asymptotic expansions for prolate spheroidal wave functions // J. Math. & Phys., 44, P. 99-140. (1965).
11. Фламмер К. Таблицы волновых сфероидальных функций // М., ВЦ АН СССР, (БМТ. В. 17). 1962.
12. Лоуэн А. Сфероидальные волновые функции, в кн // «Справочник по специальным функциям» под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М., Наука. 1979. 832 с.
13. P. De Santis, C. Palma Degrees of freedom of aberrated images // Optica Acta, 23(9), 743-752 (1976).
14. A.W. Lohmann, D. Mendlovic Self-Fourier objects and other self-transform objects // J. Opt. Soc. Am. A, 9(11), 2009-2012, (1992).
15. Хонина С.Н., Котляр В.В. Вытянутые сфероидальные функции в дифракционной оптике // Материалы международной молодежной школы по оптике, лазерной физике и биофизике. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. С. 50-51, (2000).
16. Хонина С.Н. Приближение сфероидальных волновых функций конечными рядами // Компьютерная оптика, Самара, ИСОИ РАН, 19, С. 65-70, (1999).
17. Волоотовский С.Г., Казанский Н.Л., Хонина С.Н. Анализ и разработка методов вычисления собственных значений вытянутых сфероидальных функций нулевого порядка // Труды 5-й международной конференции РОАИ-5-2000. Самара. Россия. № 4. С. 697-700, (2000).

Effect of diffraction on images matched with prolate spheroidal wave functions

S.N. Khonina, V.V. Kotlyar

Image Processing Systems Institute of RAS, Samara

Abstract

The paper considers the properties of prolonged zero-order spheroidal wave functions, important for the diffractive optics: invariance to the Fourier transform, resistance to diaphragming in optical systems, and self-reproduction at a certain distance in free space. The paper investigates the influence of the diaphragm size on the accuracy of transmission of a signal matched by lens systems with prolonged spheroidal wave functions. A comparison with the Gauss-Hermite functions is performed.

Citation: Khonina SN, Kotlyar VV. Effect of diffraction on images matched with prolate spheroidal wave functions. *Computer Optics* 2001; 21: 58-63.

References

- [1] Khurgin YI, Yakovlev VP. *Methods of the theory of entire functions in radio physics, communications theory, and optics*. Moscow: Fizmatgiz; 1962.
- [2] Komarov IV, Ponomarev LI, Slavyanov SY. *Spheroidal and coulombian spheroidal functions*. Moscow: Nauka Publisher; 1976.
- [3] M. Bertero, E. R. Pike Resolution in diffractionlimited imaging, a singular value analysis // I. The case of coherent illumination, *Optica Acta*, 29(6), P. 727-746. (1982).
- [4] M. Piche, P. Lavigne, F. Martin, P.A. Belanger Modes of resonator with internal apertures // *Appl.Opt.*, 22(13), P. 1999-2006 (1983).
- [5] D. Slepian, H.O. Pollak, Prolate spheroidal wave functions. *Fourier Analysis and Uncertainty – I*, The Bell System Technical Journal, 40, P. 43-46 (1961).
- [6] H.J. Landau, H.O. Pollak Prolate spheroidal wave functions // *Fourier Analysis and Uncertainty – II*, The Bell System Technical Journal, 40, P. 65-84 (1961).
- [7] D. Slepian, H.O. Pollak Prolate spheroidal wave functions // *Fourier analysis and uncertainty – III: The dimension of essentially time-and band-limited signals*, *Bell Syst. Tech. J.*, 41, P. 1295-1336. (1962).
- [8] W.D. Montgomery Algebraic formulation of diffraction applied to self-imaging // *J. Opt. Soc. Am.*, 58(8), P. 1112-1124. (1968).
- [9] D. Slepian Prolate spheroidal wave functions. *Fourier Analysis and Uncertainty – IV: Extensions to many dimensions; generalized prolate spheroidal functions*, The Bell System Technical Journal, 43, P. 3009-3057 (1964).
- [10] D. Slepian Some asymptotic expansions for prolate spheroidal wave functions // *J. Math. & Phys.*, 44, P. 99-140. (1965).
- [11] Flammer K. *Tables of spheroidal wave functions*, Vych. Tsentr Akad. Nauk SSSR; Moscow; 1962.
- [12] Lowan A. *Spheroidal wave functions* in Reference book on special functions edited by Abramovits M, Stigan I. Moscow: Nauka Publisher; 1979: 830.
- [13] P. De Santis, C. Palma Degrees of freedom of aberrated images // *Optica Acta*, 23(9), 743-752 (1976).
- [14] A.W. Lohmann, D. Mendlovic Self-Fourier objects and other self- transform objects // *J. Opt. Soc. Am. A*, 9(11), 2009-2012, (1992).
- [15] Khonina SN, Kotlyar VV. *Prolate spheroidal functions in diffractive optics*. Proceedings of the International Youth School on Optics, Laser Physics and Biophysics. Saratov: Saratov University Publishing House; 2000; 50-51.
- [16] Khonina SN. A finite series approximation of spheroidal wave functions. *Computer Optics*; 1999; 19: 65-70.
- [17] Volotovskiy SG, Kazanskiy NL, Khonina SN. Analysis and development of the methods for calculating eigenvalues of prolonged spheroidal functions of zero order. Proceedings of the 5th International Conference PRIA-5-2000; Samara; 2000; 4: 697-700.