

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ХРУСТАЛИКА, АДЕКВАТНО ВОСПРОИЗВОДЯЩАЯ ЕГО АНАТОМИЧЕСКУЮ СТРУКТУРУ И ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СИСТЕМЫ ГЛАЗА

С.Е. Курушина, Ю.Л. Ратис

Самарский государственный аэрокосмический университет

## Аннотация

Предложена новая модель хрусталика, учитывающая асферичность преломляющих поверхностей и распределение показателя преломления его среды. Модель основана на биометрических данных в предположении о подобии профиля распределения показателя преломления профилю преломляющих поверхностей. Проанализированы гауссовы и абберационные свойства оптической системы глаза с включенной в нее предложенной моделью хрусталика.

## Введение

Современные успехи в биометрических измерениях глаза дают возможность точно моделировать оптические характеристики глаза. Это может быть полезным для оценки визуальных характеристик глаз, которые подвергаются различным хирургическим процедурам, корректирующим недостатки зрения, а также для решения ряда научных, технических и медицинских задач. Выбор подходящей модели для такого рода задач осуществляется на основе ее соответствия анатомическим и оптическим характеристикам естественного глаза.

Известная модель схематического глаза Gullstrand 'a [1], основанная на более старой модели Listing 'a и позднее модернизированная Le Grand 'ом [2], воспроизводит только гауссовы свойства усредненного глаза, но до сих пор используется благодаря своей простоте.

В настоящее время существуют две тенденции развития этой модели. Некоторые авторы считают, что необходимо строить модели редуцированного глаза, которые хорошо предсказывают параксиальные свойства глаза, его сферические и хроматические абберации [3, 4], и даже развивают широкоугольные модели, достаточно точно воспроизводящие внеосевые абберации [5]. Такие модели обладают достаточной простотой, но недостаточной анатомической точностью. Они не могут быть использованы для моделирования хирургических операций, когда одна или более преломляющих поверхностей оказываются изменены.

Другие авторы, следуя анатомической точности, включают в свои модели линзы с параболическим распределением показателя преломления, моделирующим оболочечную структуру хрусталика [6,7], смещение центров хрусталика и зрачка относительно друг друга [6] и другие неосесимметричные особенности глаза. Недостатком этих моделей является наличие подгоночных параметров.

Очевидно, идеальной была бы модель, точно воспроизводящая и анатомические и оптические свойства глаза.

Цель настоящей работы – на основании эмпирических данных об оптических параметрах глаза построить модель, которая как можно более точно воспроизводит анатомические и оптические свойства глаза. Авторы используют гипотезу о подобии профиля распределения показателя преломления хрусталика соответствующим преломляющим по-

верхностям. При таком предположении не возникает необходимость введения подгоночных параметров.

## Оптическая система глаза.

### Биометрические данные

Оптическая система глаза может быть представлена как совокупность четырех групп элементов: роговой оболочки, передней глазной камеры, хрусталика и задней глазной камеры. Роль апертурной диафрагмы выполняет круглое отверстие посередине радужной оболочки – зрачок.

### 1. Толщина передней глазной камеры и длина оси глаза

Расстояния между оптическими преломляющими поверхностями внутри глаза, включающие толщину роговицы, глубину передней глазной камеры, толщину хрусталика, глубину задней глазной камеры и длину оси глаза, называются интраокулярными размерами.

Известно, что с возрастом интраокулярные размеры постепенно изменяются. Так глубина передней глазной камеры уменьшается, а толщина хрусталика увеличивается к старости. В своих исследованиях Jansson [8] нашел, что толщина передней глазной камеры в возрасте 20–29 лет имеет среднее значение 3,86 мм и к 40–49 годам уменьшается до 3,58 мм. Более поздние биометрические измерения [9, 10] подтверждают этот результат.

Для моделирования оптической системы глаза, несомненно, важную роль играют данные измерений длины оси глаза. Н. L. Liou и N. A. Brennan провели литературные изыскания по этому вопросу и представили результаты в работе [6]. Как следует из представленных ими таблиц, длина оси глаза зависит от пола субъекта. Для мужчин среднее значение этой величины – 24 мм и изменяется от 23,76 мм до 24,08 мм. У женщин длина оси глаза изменяется от 23,14 мм до 23,89 мм и имеет среднее значение 23,55 мм.

### 2. Роговица

В 1971 году W. Lotmar впервые создал теоретическую модель глаза, учитывающую асферичность преломляющих поверхностей роговицы [11]. В своей работе он, опираясь на экспериментальные данные, имевшиеся в то время, получил выражения, описывающие форму поверхностей роговицы и зависимости меридионального и сагиттального радиусов кривизны от расстояния от оптической оси. В

настоящее время большинство теоретических моделей разных исследователей учитывает асферичность профилей всех преломляющих поверхностей глаза, что соответствует анатомии и позволяет описывать aberrации системы глаза как можно точнее к измеренным.

Проведенные исследования показывают, что в оптической системе глаза в целом и у роговой оболочки в частности [12] наблюдаются отклонения от осевой симметрии, что приводит к зависимости сферической aberrации от ориентации глаза и наличию астигматизма менее чем в  $\pm 0,5 D$  для приосевых лучей. Мы будем считать, что для большой совокупности глаз неосесимметричные особенности и другие локальные дефекты, которые могут существенно повлиять на aberrационные свойства конкретного глаза, носят случайный характер, и средний глаз будет иметь тенденцию к осевой симметрии. Поэтому роговицу представим как осесимметричную поверхность второго порядка, параметр асферичности которой конкретизирует ее тип.

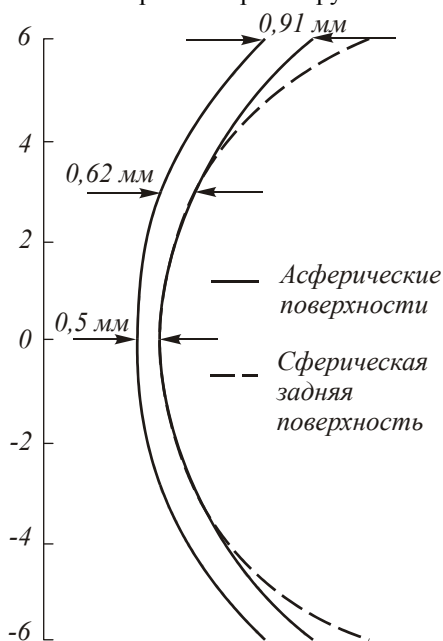


Рис. 1. На рисунке изображена зависимость толщины роговицы от расстояния от центра в мм.

Для моделирования оптической системы глаза возьмем экспериментальные данные о передней преломляющей поверхности роговицы из работы Guillon'a *et al.* [13]. Радиус кривизны в вершинной точке равен  $7,77 \pm 0,25$  мм, среднее значение параметра асферичности — 0,18. Эти данные хорошо коррелируют с измерениями других исследователей. Таким образом, передняя поверхность роговицы — эллипсоид вращения с эксцентриситетом 0,42.

Для задней преломляющей поверхности роговицы имеются биометрические данные для радиуса кривизны в вершинной точке. Среднее значение радиуса кривизны по результатам разных исследователей равно 6,4 мм [14, 15].

Одним из менее изученных экспериментально параметров оптической системы глаза является коэффициент асферичности задней преломляющей по-

верхности роговицы. Авторы данной работы провели аналитический расчет асферичности задней преломляющей поверхности роговицы на основании биометрических данных о ее толщине. Известно, что толщина роговой оболочки в ее центральной части 0,5 мм и увеличивается к периферии (рис. 1). На расстоянии 6 мм от центра ее толщина равна 0,91 мм, на расстоянии 3 мм —  $0,6 \pm 0,05$  мм и  $0,57 \pm 0,03$  мм в носовой и височной областях соответственно [16]. Соответствующий расчет дал значение  $-0,278$ . При такой асферичности  $Q$  на расстоянии 3 мм от центра толщина равна  $\approx 0,62$  мм, что соответствует результатам работы [16]. В работе [6] приводится значение  $Q$ :  $-0,18 - 0,26$ .

### 3. Хрусталик

Наиболее важным компонентом оптической системы глаза является хрусталик. Хрусталик представляет собой прозрачное бесцветное тело, напоминающее двояковыпуклую линзу, передняя поверхность которой менее выпукла, чем задняя. Его вещество состоит преимущественно из прозрачных волокон, представляющих собой вытянутые клетки. Хрусталик состоит из слоев различной плотности. Центральная более плотная часть хрусталика называется ядром, а периферийный слой, мягкий и почти студенистый, называется корой хрусталика. Снаружи хрусталик покрыт прозрачной капсулой.

Как уже было упомянуто выше, с возрастом происходят заметные изменения хрусталика. Так, толщина хрусталика в возрасте 20-29 лет приблизительно равна глубине передней глазной камеры, но к 40-49 годам достигает среднего значения 4,02 мм. Согласно биометрическим данным Lowe и Clark'a [17], среднее значение радиуса кривизны в вершинной точке передней преломляющей поверхности хрусталика с возрастом уменьшается (при среднем возрасте 61,4 года оно равно 10,29 мм, при среднем возрасте 45 лет — 11,26 мм). Область изменения составляет 7,5–15,38 мм. Очевидно, уменьшение с возрастом глубины передней глазной камеры происходит за счет увеличения выпуклости передней части хрусталика в область водянистой влаги (при этом происходит увеличение его толщины). Задняя преломляющая поверхность изменяется менее радикально.

Для моделирования хрусталика были выбраны результаты работы [18]. Радиус кривизны в вершинной точке передней преломляющей поверхности хрусталика имеет значение  $12,4 \pm 2,6$  мм, его величина для задней поверхности равна  $8,1 \pm 1,6$  мм. По эмпирическим данным [18], авторами работы [6] были вычислены параметры асферичности для обеих поверхностей хрусталика. Они равны соответственно  $-0,94$  и  $+0,96$  (для среднего возраста 46 лет). Таким образом, форму хрусталика можно моделировать двумя эллипсоидами вращения с заданными значениями эксцентриситета и вершинного радиуса кривизны.

Распределение показателя преломления хрусталика изучалось интерференционным методом на его тонких срезах. Полученное значение показателя

преломления для ядра изменяется от 1,403 до 1,409. Campbell [19] предложил неdestructивный метод, который использовали Pierscionek и Chan [20] для определения профиля показателя преломления. На рис. 2 приведен график зависимости показателя преломления от нормированного расстояния от центра для хрусталика шестнадцатилетнего молодого человека ( $\lambda = 555$  нм). Экспериментальные точки обозначены окружностями, соединенными сплошной линией. Вблизи преломляющих поверхностей значение показателя преломления определено неточно (три крайние окружности справа) из-за близости к хрусталиковой капсуле. Результаты работы [20] были использованы для моделирования градиентной среды хрусталика.

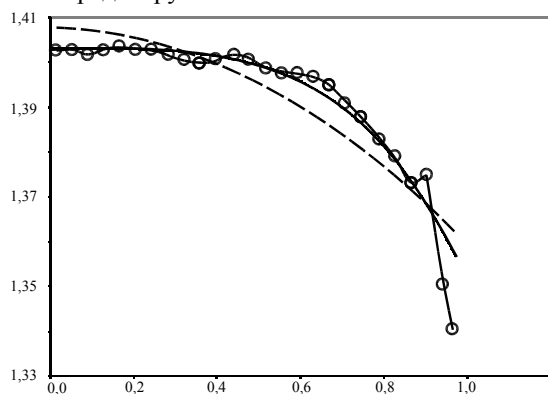


Рис. 2. На рисунке изображена зависимость показателя преломления от нормированного расстояния от центра хрусталика. Экспериментальная кривая, по данным Pierscionek'a и Chan'a, изображена окружностями, соединенными сплошной линией. Пунктирной линией изображен параболический профиль показателя преломления, предложенный авторами работы [6], для аппроксимации экспериментальной кривой. Сплошной линией изображен эллиптический профиль показателя преломления, предложенный авторами данной работы.

Приведенные значения показателя преломления в ядре и коре хрусталика совпадают со значениями, приводимыми в работах [21, 22].

С возрастом происходит уплотнение вещества хрусталика, что отражается на значениях показателя преломления.

#### 4. Показатели преломления собственного вещества роговицы, водянистой влаги и стекловидного тела.

Хорошо известно, что кривая видности среднего нормального глаза при дневном зрении имеет максимум в желто-зеленой части спектра при длине волны 555 нм. Так как все окулярные среды обладают дисперсионными свойствами, значения показателей преломления собственного вещества роговицы, водянистой влаги и стекловидного тела выбраны соответствующими максимуму кривой видности (значения смотреть в таблице 1).

Модель глаза, учитывающая дисперсию окулярных сред и описывающая хроматические aberrации в согласии с экспериментальными данными, представлена в работе [6].

#### **Моделирование оптической системы глаза**

Моделирование оптической системы глаза осуществлялось на языке Object Pascal в среде Delphi 5. Авторами разработан пакет программ для определения траекторий произвольных лучей, главных лучей и aberrаций. Программа для определения траекторий главных лучей базируется на принципе обратимости хода лучей. Программа для определения траекторий произвольных лучей составлена в виде совокупности процедур, каждая из которых осуществляет расчет отдельной компоненты оптической системы глаза. Это дает возможность оценить параaxиальные и aberrационные свойства роговой оболочки, хрусталика и всей системы глаза отдельно друг от друга.

Точность вычисления траекторий лучей проверялась следующим образом. Все асферические поверхности были заменены сферическими поверхностями с соответствующим радиусом кривизны, а градан, моделирующий хрусталик – рефракционной линзой, соответствующей толщины с показателем преломления 1,403. Расчет модифицированной системы осуществлялся аналитически на основе методов, изложенных в работах [23, 24, 25]. Далее аналитический результат сравнивался с численными результатами. Следующим этапом проверки работы программы была замена преломляющих поверхностей на асферические, а рефракционной линзы – на линзу с цилиндрическим распределением показателя преломления и сферическими преломляющими поверхностями. Ход параaxиальных лучей для такой линзы хорошо известен [26, 28] и поддается аналитическому расчету. Далее опять осуществлялось сравнение аналитического расчета хода параaxиальных лучей с численным результатом (естественно, сравнивались лучи с одинаковыми входными параметрами). Третьим этапом проверки был расчет лучей, идущих симметрично относительно оптической оси и имеющих соответствующие симметричные входные параметры. Так проверялось сохранение осевой симметрии задачи. Авторы полагают, что после такой поэтапной проверки точность расчета траекторий произвольных лучей можно гарантировать.

Моделирование среды хрусталика осуществляется на основе биометрических данных работы [20] (рис. 2) для шестнадцатилетнего молодого человека, так как в связи с недостатком экспериментальных исследований нет усредненных данных по возрастам. Опираясь на приведенные выше сведения о зависимости оптических параметров глаза от возраста, авторы считают, что для адекватного описания оптической системы глаза необходимо использовать биометрические данные, соответствующие возрастному интервалу 20–29 лет.

Биометрические данные, отобранные для создания и анализа модели, приведены в таблице 1 (см. ниже).

Хрусталик представляется в виде дублета, состоящего из градиентных сред, ограниченных эллиптическими поверхностями с заданным эксцентриситетом и вершинным радиусом кривиз-

ны. Каждая из компонент дублета (градиентная среда со своей преломляющей поверхностью) представляет собой градиентную оптическую систему, обладающую вращательной симметрией.

Исходя из соображений симметрии, предположим, что профиль распределения показателя преломления должен быть подобен профилю преломляющих поверхностей. На рисунке 3 схематически изображена предлагаемая модель хрусталика. Таким образом, форма распределения показателей преломления градиентных сред – эллиптическая.

Разделение хрусталика на две области осуществлялось следующим образом. В системе координат, связанной с центром хрусталика, уравнения его первой и второй поверхностей имеют вид:

$$\frac{x^2}{b_3^2} + \frac{y^2}{b_3^2} + \frac{(z+a_3-c_1)^2}{a_3^2} - 1 = 0, \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{b_4^2} + \frac{y^2}{b_4^2} + \frac{(z+a_4-c_2)^2}{a_4^2} - 1 = 0,$$

где  $a_3, b_3, a_4, b_4$  - полуоси эллипсоидов первой и второй поверхностей по осям  $OZ$  и  $OX$  ( $OY$ ), соответственно,  $c_1$  и  $c_2$  – искомые толщины.

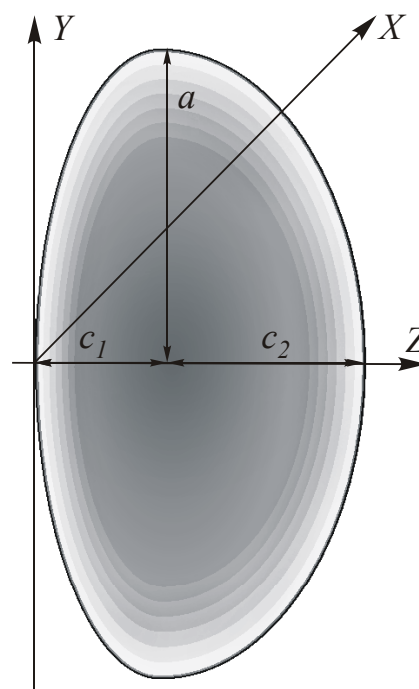


Рис. 3. На рисунке схематически показана слоистая структура хрусталика.

Т а б л и ц а 1.

<b>Оптические параметры</b>		
Наименование	Обозначение	Значение
<b><i>Роговица</i></b>		
Показатель преломления	$n_1$	1,376
Радиус кривизны первой преломляющей поверхности	$R_1$	7,77 мм
Асферичность первой преломляющей поверхности	$Q_1$	-0,18
Радиус кривизны второй преломляющей поверхности	$R_2$	6,4 мм
Асферичность второй преломляющей поверхности	$Q_2$	-0,278
Толщина на оси	$d_1$	0,5 мм
<b><i>Передняя глазная камера</i></b>		
Показатель преломления водянистой влаги	$n_2$	1,336
Толщина	$d_2$	3,36 мм
<b><i>Хрусталик</i></b>		
Показатель преломления (центральная область)	$n_0$	1,403
Радиус кривизны первой преломляющей поверхности	$R_3$	13,99 мм
Радиус кривизны второй преломляющей поверхности	$R_4$	-9,06 мм
Асферичность первой преломляющей поверхности	$Q_3$	-0,93
Асферичность второй преломляющей поверхности	$Q_4$	+0,96
Толщина	$d_3 = c_1 + c_2$	3,87 мм
<b><i>Задняя глазная камера</i></b>		
Показатель преломления стекловидного тела	$n_2$	1,336
Толщина	$d_4$	16,27 мм
<b>Полная система глаза</b>		
Длина оси глаза		24,00 мм
Положение входного зрачка		3,04 мм
Радиус кривизны сетчатки		-12 мм
Угол между линией прямого зрения и осью симметрии глаза	$\alpha$	0,08726646

Очевидно,  $d_3 = c_1 + c_2$ . Полуоси вычислены из соотношений (2):

$$R_3 = \frac{b_3^2}{a_3}; R_4 = \frac{b_4^2}{a_4}; \quad (2)$$

$$e_3^2 = \frac{a_3^2 - b_3^2}{a_3^2}; e_4^2 = \frac{a_4^2 - b_4^2}{a_4^2};$$

где  $e$  – эксцентриситет эллипсоидов. Он связан с параметром асферичности:  $Q = -e^2$ . Так как система обладает симметрией вращения, положим  $x=0$ . В центре хрусталика  $z = 0$ . Из вышеприведенных выражений следует, что

$$c_2 = \left[ - \left( \frac{b_3^2}{a_3^2} (a_3 - d_3) + \frac{b_4^2}{a_4} \right) \pm \sqrt{ \left( \frac{b_3^2}{a_3^2} (a_3 - d_3) + \frac{b_4^2}{a_4} \right)^2 - \left( \frac{b_3^2}{a_3^2} - \frac{b_4^2}{a_4^2} \right) \left( \frac{b_3^2}{a_3^2} (a_3 - d_3)^2 - b_3^2 \right) } \right] / \left( \frac{b_3^2}{a_3^2} - \frac{b_4^2}{a_4^2} \right), \quad (3)$$

а  $c_1 = d_3 - c_2$ . Очевидно решение  $c_2 < 0$  не имеет физического смысла. Вычисленные значения  $c_1 = 1,518961045$  мм и  $c_2 = 2,351038955$  мм.

Чтобы проверить правильность полученного результата, мы использовали формулу 3 для вычисления компонент хрусталика при параметрах, приведенных в работе [6]. Результаты совпали с высокой степенью точности.

Система координат, в которой описывается распределение показателя преломления, совмещена с системой координат первой преломляющей поверхности, ограничивающей градиентную среду хрусталика. Функцию распределения показателя преломления для каждой из компонент можно представить в виде:

$$n = n_0 + n_{11}(x^2 + y^2) + n_{12}(z - c_1)^2 + n_{21}(x^2 + y^2)^2 + n_{22}(z - c_1)^2(x^2 + y^2) + n_{23}(z - c_1)^4 \quad (4)$$

где  $n_0 = 1,403$  – значение показателя преломления в центре хрусталика. Для первой градиентной среды с непрерывным эллиптическим распределением показателя преломления  $n_{11} = -1,414387 * 10^{-3}$ ,  $n_{12} = 9,492293 * 10^{-4}$ ,  $n_{21} = 7,775961 * 10^{-6}$ ,  $n_{22} = -6,469414 * 10^{-4}$ ,  $n_{23} = -9,042730 * 10^{-3}$ ; для второй градиентной среды:  $n_{11} = -1,417010 * 10^{-3}$ ,  $n_{12} = 3,962276 * 10^{-4}$ ,  $n_{21} = 7,837970 * 10^{-6}$ ,  $n_{22} = -2,689787 * 10^{-4}$ ,  $n_{23} = -1,575603 * 10^{-3}$ . Показатель преломления хрусталика вблизи капсулы равен 1,357. При таком выборе значений коэффициентов распределения показателя преломления зависимость  $n$  от нормированного расстояния от центра хрусталика достаточно хорошо аппроксимирует экспериментальную кривую (сплошная линия на рис. 2). Для сравнения на рис. 2. пунктирной линией показана аппроксимация этой же экспериментальной кривой непрерывным параболическим распределением

$$\vec{N}_{3,4} = \frac{-a_{3,4} \sin \theta \cos \varphi \vec{i} - a_{3,4} \sin \theta \sin \varphi \vec{j} - b_{3,4} \cos \theta \vec{k}}{(b_{3,4}^2 \cos^2 \theta + a_{3,4}^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}, \quad (7)$$

где  $\theta$  и  $\varphi$  – полярный и азимутный углы.

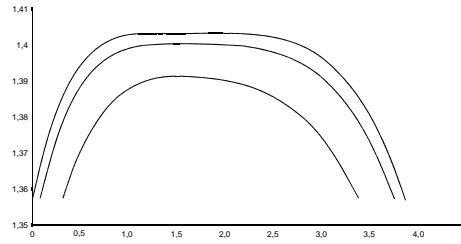


Рис. 4. На рисунке изображена зависимость показателя преломления вдоль оси  $z$  от высоты от оптической оси. По оси абсцисс отложено расстояние от вершинной точки передней преломляющей поверхности хрусталика, выраженное в мм, по оси ординат – значения показателя преломления.

показателя преломления, примененная авторами работы [6].

На рисунке 4 проиллюстрировано распределение показателя преломления в толще хрусталика (вдоль оси  $z$ ) от высоты от оптической оси.

Зрачок глаза моделируется как круг переменного радиуса с центром на оптической оси, расположенный в плоскости, перпендикулярной к оптической оси, напротив передней преломляющей поверхности хрусталика.

Прямая, проходящая через середину центральной ямки и центр выходного зрачка глаза, вместе с параллельной ей прямой, проходящей через центр входного зрачка, определяет линию прямого зрения [27]. Линия прямого зрения и оптическая ось составляют угол около 5 градусов (угол  $\alpha$  на рис. 4). Этот анатомический факт учитывается при моделировании оптической системы глаза.

Моделируемая оптическая система глаза схематически представлена на рис. 4.

#### Расчет хода лучей

Расчет хода лучей на границе раздела сред производится на основе закона Снеллиуса–Декарта

$$\vec{\alpha}' = v \vec{\alpha} + \chi \vec{N}. \quad (5)$$

Здесь  $\vec{\alpha}$  и  $\vec{\alpha}'$  – направляющие векторы падающего и преломленного лучей,  $\vec{N}$  – направляющий вектор нормали к преломляющей поверхности в точке падения луча,  $n$  и  $n'$  – показатели преломления неоднородных сред слева и справа от границы раздела в точке падения луча [26].

$$v = n / n' \quad (6)$$

$$\chi = -v(\vec{N} \cdot \vec{\alpha}) + \sqrt{1 - v^2(1 - (\vec{N} \cdot \vec{\alpha})^2)},$$

В системе координат, связанной с центром оптической поверхности, единичный вектор нормали для эллипсоидов можно получить, используя работу [29]:

Форма траектории луча при прохождении через неоднородную среду хрусталика определяется из лучевого уравнения. В декартовой системе координат векторное лучевое уравнение распадается на систему двух скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} n \frac{d^2 x}{dz^2} + \left[ \frac{\partial n}{\partial z} \frac{dx}{dz} - \frac{\partial n}{\partial x} \right] * \\ * \left( \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right) = 0 ; \\ n \frac{d^2 y}{dz^2} + \left[ \frac{\partial n}{\partial z} \frac{dy}{dz} - \frac{\partial n}{\partial y} \right] * \\ * \left( \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

а луч является кривой, заданной в параметрическом виде  $x = x(z), y = y(z)$  [10].

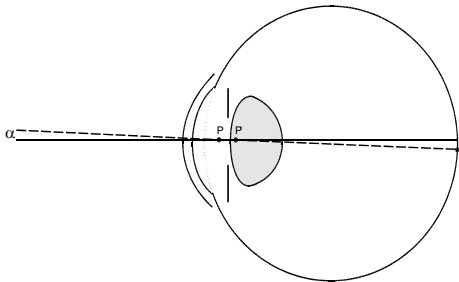


Рис. 5. На рисунке схематически показана рассматриваемая модель глаза. Схематическая модель хрусталика изображена на рис. 3.

Для сред каждой из компонент дублета эта система уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned} (n_0 + n_{11}(x^2 + y^2) + n_{12}(z - c_1)^2 + n_{21}(x^2 + y^2)^2 + \\ + n_{22}(z - c_1)^2(x^2 + y^2) + n_{23}(z - c_1)^4) \frac{d^2 x}{dz^2} + \\ + ((2n_{12}(z - c_1) + 4n_{23}(z - c_1)^3 + 2n_{22}(z - c_1)(x^2 + y^2)) \frac{dx}{dz} - \\ - (2n_{11}x + 4n_{21}(x^2 + y^2)x + 2n_{22}(z - c_1)^2 x)) * \\ * \left( \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right) = 0; \\ (n_0 + n_{11}(x^2 + y^2) + n_{12}(z - c_1)^2 + n_{21}(x^2 + y^2)^2 + \\ + n_{22}(z - c_1)^2(x^2 + y^2) + n_{23}(z - c_1)^4) \frac{d^2 y}{dz^2} + \\ + ((2n_{12}(z - c_1) + 4n_{23}(z - c_1)^3 + \\ + 2n_{22}(z - c_1)(x^2 + y^2)) \frac{dy}{dz} - \\ - (2n_{11}y + 4n_{21}(x^2 + y^2)y + 2n_{22}(z - c_1)^2 y)) * \\ * \left( \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Анализ траекторий произвольных лучей в оптической системе глаза осуществлялся численно на основании выражений (5), (6), (7) и системы уравнений (9). Сравнение различных методов численного решения лучевого уравнения показало [30, 31, 32], что метод Рунге-Кутты дает оптимальное соотношение ме-

жду точностью вычислений и затратами машинного времени. Для решения системы уравнений (9) была использована схема четвертого порядка точности, распространенная на систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка. Для анализа траекторий произвольных лучей кроме формы траектории нужно определить точки пересечения луча с поверхностями раздела сред. Для этого после каждого шага вычисления координат точки луча, найденные значения координат необходимо подставить в уравнение ближайшей поверхности (расположенной по ходу луча), заданное в неявной форме ( $F(x,y,z)=0$ ), и проверить знак функции  $F(x,y,z)$ . Смена знака укажет на то, что траектория пересекла данную поверхность. Далее по координатам соседних точек, расположенных по разные стороны от поверхности, находится точка пересечения луча с поверхностью.

### Результаты расчетов

Компьютерное моделирование траекторий произвольных лучей показало, что лучи, распространяющиеся параллельно линии прямого зрения рассматриваемой системы (покой аккомодации глаза), собираются в фовеальной области сетчатки глаза. При длине оси глаза 24,0 мм оптическая сила рассматриваемой модели составляет 60,0 D.

В результате расчета хода лучей через градиентный дублет, моделирующий структуру естественного хрусталика, установлено, что его оптическая сила составляет около 21 D.

На рис. 6 представлен график зависимости продольной сферической аберрации (LSA) рассматриваемой модели глаза, выраженной в диоптриях [5], от высоты входа луча. График зависимости поперечной сферической аберрации (TSA), выраженной в мм, от высоты входа луча, представлен на рисунке 7. Полученные значения сферической аберрации хорошо согласуются со средними экспериментальными данными [5, 6, 22].

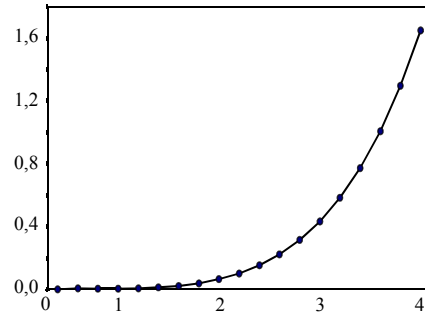


Рис. 6. График зависимости LSA, выраженной в D, от высоты входа луча (мм).

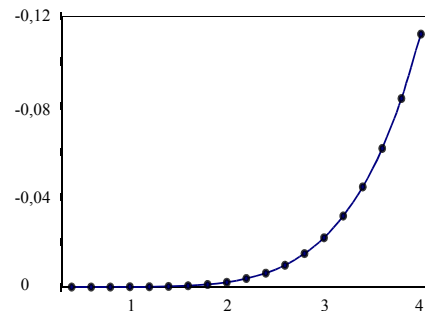


Рис. 7. График зависимости TSA (мм) от высоты входа луча (мм).

### Заклучение

Предложенная авторами математическая модель основана на биометрических данных и не содержит подгоночных параметров. Она адекватно воспроизводит параксиальные и абберационные характеристики среднего эметропического глаза при покое аккомодации.

Авторы выражают благодарность члену-корреспонденту РАМТН, профессору, доктору медицинских наук, заведующему кафедрой глазных болезней СГМУ В.М. Малову за консультации и помощь в работе.

### Литература

1. A. Gullstrand Appendix II in *Handbuch der Physiologischen Optik*, H. von Helmholtz, ed., 3rd ed. (Voss, Hamburg, 1909), Bd. 1, P. 299.
2. Y. Le Grand, *La Dioptrique de l'Oeil et sa Correction* // Tome I of *Optique Physiologique* (Masson, Paris, 1956); rev. ed. translated into English: Y. Le Grand and S. G. El Hage, *Physiological Optics* (Springer-Verlag, Berlin, 1989).
3. L. N. Thibos, M. Ye. X. Zhang and A. Bradley The chromatic eye: a new reduced-eye model of ocular chromatic aberration in humans // *Appl. Opt.* 31, P. 3594-3600 (1992).
4. L. N. Thibos, M. Ye. X. Zhang and A. Bradley Spherical aberration of the reduced schematic eye with elliptical refraction surface // *Optom. Vision Sci.* 74, 548-556 (1997).
5. I. Escudero-Sanz and R. Navarro Off-axis aberrations of a wide-angle schematic eye model // *JOSA, A* V. 16, N 8. P. 1881-1891, (1999).
6. H.-L. Liou and N. A. Brennan Anatomically accurate, finite model eye for optical modeling // *JOSA, A* V. 14, N 8. P. 1881-1891 (1997).
7. G. Smith, B.K. Pierscionec and D. A. Atchison The optical modeling of the human lens // *Ophthalmic. Physiol. Opt.* 11, P. 359-569 (1991.)
8. F. Jansson Measurements of intraocular distances by ultrasound // *Acta Ophthalmol. Suppl.*, 74, P. 1-49 (1963).
9. C.S. Yu, D. Kao, C.T. Chang Measurement of the length of the visual axis by ultrasonography in 1789 eyes // *Chin. J. Ophthalmol.* 15, P. 45-47, (1979).
10. J.F. Koretz, P.L. Kaufman, M.W. Neider, P.A Goeckner Accommodation and presbyopia in the human eye-aging of the anterior segment // *Vision Res.* 29, 1685-1692 (1989).
11. W. Lotmar Theoretical eye model with aspherics // *JOSA.* 1971. V. 61, №11. P. 1522.
12. A. Sorsby, M. Sheridan, A. G. Leary, B. Benjamin. Vision, visual acuity and ocular refraction in young men // *Brit. Med. J. V. 1.* P. 1394-1398 (1960).
13. M. Guillon, P. M. Lydon, C. Wilson Corneal topography: a clinical model // *Ophthalmic. Physiol. Opt.*, V. 6. P. 47-56 (1986.)
14. J. M. Royston, M.C. Dunne, D.A. Barnes. Measurement of the posterior corneal radius using slit lamp and Purkinje image techniques // *Ophthalmic. Physiol. Opt.* 10, P. 385-388 (1990.)
15. M. C. Dunne, J. M. Royston, D.A. Barnes Normal variations of the posterior corneal surface // *Acta Ophthalmol.* 70. P. 255-261 (1992).
16. N.K. Hirji, J.R. Larke Thickness of human cornea measured by topographic tachometry // *Am. J. Optom. Arch. Am. Acad. Optom.* 55. P. 97-100. (1978).
17. R.F. Lowe, B.A.J. Clark Radius of curvature of the anterior lens surface // *Br. J. Ophthalmol.* V. 57. P. 471 474 (1973).
18. N. Brown The change in lens curvature with age // *Exp. Eye Res.* 19, 175-183. (1974).
19. M.C. Campbell Measurement of refractive index in an intact crystalline lens // *Vision Res.* 24, P. 409-415 (1984).
20. B.K. Pierscionec, D.Y.C. Chan Refractive index gradient of human lenses // *Optom. Vis. Sci.* 1989.V. 66. P. 822-829.
21. Федоров С.Н Имплантация искусственного хрусталика // *М., Медицина.* 1977.
22. Овчинников Б.В., Полонская А.А., Полякова И.П. Оптическая модель глаза человека // *Оптический журнал.* 1996. №3. С. 74-77.
23. Чуриловский В.Н. Теория оптических приборов // *М.-Л., Машиностроение.* 1966.
24. Герцбергер М. Современная геометрическая оптика // *М., Изд-во иностр. лит.,* 1962. 487 с.
25. Апенко М.И., Дубовик А.С. Прикладная оптика // *М., «Наука»,* 1982.
26. Грейсух Г.И., Ефименко И.М., Степанов С.А. Оптика градиентных и дифракционных элементов // *М., Радио и связь,* 1990.
27. A.G. Bennett, R.B. Rabbetts. *Clinical Visual Optics* 2nd ed. (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1989). P. 17-18.
28. P.J. Sands Inhomogeneous lenses, III. Paraxial optics // *J. Opt. Soc. Am.* 1971. V. 61, № 7. P. 879-885.
29. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике // *М., Наука,* 1968. 832 с.
30. Ильин В.Г., Меланьина Е.М., Ремизов Н.В. Расчет хода лучей в градах. Сравнение двух методов // *Оптико-механическая промышленность.* 1984. №12. С. 29-31.
31. Puchalski J. Numerical determination of ray tracing: a new method // *Applied Optics.* 1992. V. 31, № 31. P. 6789-6799.
32. A. Sharma, D.V. Kumar, A.K. Ghatak Tracing rays through graded-index media: a new method // *Applied Optics.* 1982. V.21, № 6. P. 984-987.

# Mathematical model of the eye lens adequately reproducing its atomic structure and optical properties of the eye system

*S.E. Kurushina, Y.L. Ratis  
Samara State Aerospace University*

## *Abstract*

A new model of the eye lens is proposed that takes into account the asphericity of the refracting surfaces and the distribution of the refractive index of its medium. The model is based on biometric data and the assumption that the refractive index distribution profile is similar to the profile of the refractive surfaces. The Gaussian and aberration properties of the eye optical system with the proposed lens model included into it are analyzed.

*Citation:* Kurushina SE, Ratis YL. Mathematical model of the eye lens adequately reproducing its atomic structure and optical properties of the eye system. *Computer Optics* 2001; 21: 81-87.

## *References*

- [1] Gullstrand A. Appendix II. In Book: von Helmholtz H, ed. *Handbuch der physiologischen optic*. 3rd ed. Hamburg: Voss; 1909; Bd 1.
- [2] Le Grand Y, El Hage SG. *Physiological Optics*. Berlin: Springer-Verlag; 1989.
- [3] Thibos LN, Ye M, Zhang X, Bradley A. The chromatic eye: a new reduced-eye model of ocular chromatic aberration in humans. *Appl Opt* 1992; 31: 3594-3600.
- [4] Thibos LN, Ye M, Zhang X, Bradley A. Spherical aberration of the reduced schematic eye with elliptical refraction surface. *Optom Vision Sci* 1997; 74: 548-556.
- [5] Escudero-Sanz I, Navarro R. Off-axis aberrations of a wide-angle schematic eye model. *J Opt Soc Am A* 1999; 16(8): 1881-1891.
- [6] Liou H-L, Brennan NA. Anatomically accurate, finite model eye for optical modeling. *J Opt Soc Am A* 1997; 14(8): 1684-1695.
- [7] Smith G, Pierscionec BK, Atchison DA. The optical modeling of the human lens. *Ophthalmic Physiol Opt* 1991; 11: 359-569.
- [8] Jansson F. Measurements of intraocular distances by ultrasound. *Acta Ophthalmol Suppl* 1963; 74: 1-49.
- [9] Yu CS, Kao D, Chang CT. Measurement of the length of the visual axis by ultrasonography in 1789 eyes. *Chin J Ophthalmol* 1979; 15: 45-47.
- [10] Koretz JF, Kaufman PL, Neider MW, Goeckner PA. Accommodation and presbyopia in the human eye-aging of the anterior segment. *Vision Res* 1989; 29: 1685-1692.
- [11] Lotmar W. Theoretical eye model with aspherics. *J Opt Soc Am* 1971; 61(11): 1522-1529.
- [12] Sorsby A, Sheridan M, Leary AG, Benjamin B. Vision, visual acuity and ocular refraction in young men. *Brit Med J* 1960; 1: 1394-1398.
- [13] Guillon M, Lydon PM, Wilson C. Corneal topography: a clinical model. *Ophthalmic Physiol Opt* 1986; 6: 47-56.
- [14] Royston JM, Dunne MC, Barnes DA. Measurement of the posterior corneal radius using slit lamp and Purkinje image techniques. *Ophthalmic Physiol Opt* 1990; 10: 385-388.
- [15] Dunne MC, Royston JM, Barnes DA. Normal variations of the posterior corneal surface. *Acta Ophthalmol* 1992; 70: 255-261.
- [16] Hirji NK, Larke JR. Thickness of human cornea measured by topographic tachometry. *Am J Optom Arch Am Acad Optom* 1978; 55: 97-100.
- [17] Lowe RF, Clark BAJ. Radius of curvature of the anterior lens surface. *Brit J Ophthalmol* 1973; 57: 471-474.
- [18] Brown N. The change in lens curvature with age. *Exp Eye Res* 1974; 19(2): 175-183.
- [19] Campbell MC. Measurement of refractive index in an intact crystalline lens. *Vision Res* 1984; 24: 409-415.
- [20] Pierscionec BK, Chan DYC. Refractive index gradient of human lenses. *Optom Vis Sci* 1989; 66: 822-829.
- [21] Fedorov SN. *Implantation of artificial lens [In Russian]*. Moscow: "Medicina" Publisher; 1977.
- [22] Ovchinnikov BV, Polonskaya AA, Polyakova IP. Optical model of the human eye. *J Opt Technol* 1996; 3: 74-77.
- [23] Churilovsky VN. *Theory of optical instruments*. Moscow, Leningrad: "Mashinostroenie" Publisher; 1966.
- [24] Herzberger M. *Modern geometrical optics*. Interscience Publishers; 1958.
- [25] Apenko MI, Dubovik AS. *Applied optics [In Russian]*. Moscow: "Nauka" Publisher; 1982.
- [26] Greisukh GI, Efimenko IM, Stepanov SA. *Optics of gradient and diffractive elements [In Russian]*. Moscow: "Radio i Svyaz" Publisher; 1990.
- [27] Bennett AG, Rabbetts RB. *Clinical visual optics*. 2nd ed. Oxford: Butterworth-Heinemann; 1989: 17-18.
- [28] Sands P.J. Inhomogeneous lenses, III. Paraxial optics. *J Opt Soc Am* 1971; 61(7): 879-885.
- [29] Korn GA, Korn TM. *Mathematical handbook for scientists and engineers: Definitions, theorems, and formulas for reference and review*. McGraw-Hill; 1968.
- [30] Ilyin VG, Melanina EM, Remizov NV. Ray path calculation in grins. Comparison of the two methods [In Russian]. *Sov J Opt Technol* 1984; 12: 29-31.
- [31] Puchalski J. Numerical determination of ray tracing: a new method. *Appl Opt* 1992; 31(31): 6789-6799.
- [32] Sharma A, Kumar DV, Ghatak AK. Tracing rays through graded-index media: a new method. *Appl Opt* 1982; 21(6): 984-987.