РАСЧЕТ СОСТАВНОГО ГРАДИЕНТНОГО ОПТИЧЕСКОГО ЭЛЕМЕНТА, ФОРМИРУЮЩЕГО ЗАДАННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ

В.В. Котляр, А.С. Мелёхин
Институт систем обработки изображений РАН, г. Самара
e–mail: *ipsi@smr.ru*

Аннотация

Рассматриваются аналитические выражения для расчета в рамках геометрической оптики показателя преломления двухмерной среды, переводящей заданное амплитудно-фазовое распределение на входе в заданное амплитудно-фазовое распределение на выходе. Приведены примеры расчета составных ГОЭ для формирования некоторых заданных распределений интенсивности.

Введение

Впервые обратная задача в геометрической оптике неоднородных сред была поставлена и частично решена в [1, 2]. В [1] найдено аналитическое решение для двумерного волновода, периодически фокусирующего лучи, исходящие из осевой точки. В [2] по заданному двумерному семейству лучей в ГОЭ построено общее решение для показателя преломления, зависящее от некоторой произвольной функции. Однако это решение не учитывает физические ограничения.

В данной работе общее решение уточнено и обобщено для случая плоского входного фронта и фокусировки лучей в произвольной осевой точке. На основе аналитического решения рассмотрены составные ГОЭ, состоящие из отдельных зон удовлетворяющих полученному решению. Подобные ГОЭ могут быть использованы для формирования заданного распределения интенсивности в выходной плоскости.

1. Аналитическое решение

Запишем уравнение луча [3] в среде с показателем преломления n:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}S}n\right)=\nabla n\,. \tag{1}$$

Полагая, $x=x(z)$, $y=y(z)$, $\mathrm{d}S=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}$ – малое расстояние вдоль луча, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}-\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\left[1+\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)^2\right]+n\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2}=0\\ \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}-\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}\right)\cdot\left[1+\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)^2\right]+n\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}=0\end{cases}, \tag{2}$$

Рассмотрим среду с непрерывно меняющимся в направлении x показателем преломления $n(x)$. Предполагая среду бесконечно протяженной вдоль оси y, приходим к:

$$n\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2}-\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2-\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}=0\ , \tag{3}$$

или:

$$\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}z^2}{1+\left(\mathrm{d}x/\mathrm{d}z\right)^2} \tag{4}$$

В работе [1] найдено решение для подобного уравнения в виде:

$$n(x)=\frac{n_0}{\mathrm{ch}\left(\pi/2\,x\right)} \tag{5}$$

При этом уравнение семейства лучей примет вид:

$$x(z,v)=\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Arsh}\left[\mathrm{sh}\frac{\pi}{2}v\cdot\sin\frac{\pi}{2}z\right], \tag{6}$$

где v – параметр, определяющий конкретный луч.

Данное решение найдено для случая, когда в точке z=0 находится источник цилиндрической волны, при этом в точках z=2k+1, где $k\in$N, все выходящие из источника лучи становятся параллельны, то есть фронт волны становится плоским, а в точках z=2k все лучи вновь собираются в точке x=0 (рис. 1).

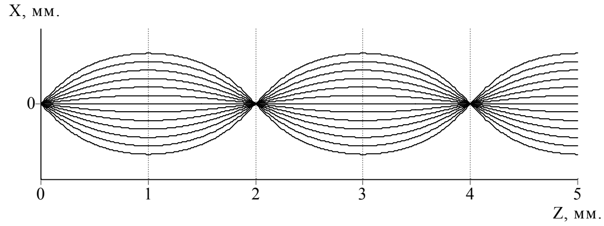


Рис. 1. Цилиндрический фронт. Сходимость в точках z=2k, k∈N

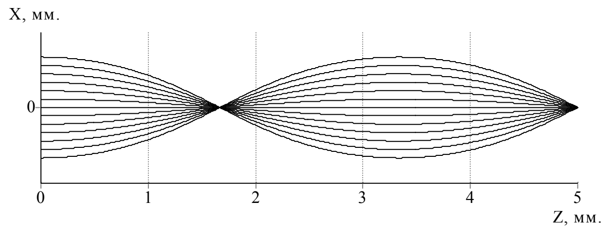


Рис. 2. Плоский фронт. Сходимость в точке z=d, d=1,65

Модифицируем это решение так, чтобы для случая плоского фронта в точке z=0 лучи сходились бы в некоторой точке z=d (рис. 2). Тогда уравнения (5 и 6) следует переписать в виде:

$$n(x)=\frac{n_0}{\mathrm{ch}\left(\pi/2d\,x\right)}, \tag{7}$$

$$x(z,v)=\frac{2d}{\pi}\,\mathrm{Arsh}\left[\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{2d}v\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2d}z\right)\right]. \tag{8}$$

Очевидно, что при возрастании x значение $n(x)$ будет быстро убывать. В результате при некотором определенном значении x мы получим значение $n(x)<1$, что физически некорректно.

Для устранения некорректности необходимо выражение (7) дополнить условием:

$$n(x) \ge n_{\min} . \quad (9)$$

С учетом последнего условия из выражения (7) можно получить следующее неравенство:

$$x_{\max} \le \frac{2d}{\pi}\operatorname{Arch}\left[\frac{n_0}{n_{\min}}\right]. \quad (10)$$

Таким образом, мы получили выражение для апертуры реального оптического элемента при заданных величинах d, n_0 и $n_{\min}$.

2. Численное решение

Для численного решения уравнения (4) перепишем его в виде:

$$\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2\right]\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}z^2} . \quad (11)$$

Заметим, что для сходимости лучей на оси требуется, чтобы: $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} < 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}z^2} < 0$ – то есть все лучи сходятся к оси “выпукло” (рис. 1, 2).

Зададим сетку с узлами в точках $(x, z)=(kh, l\tau)$, где $h = \frac{x_{\max}}{N}$, $\tau = \frac{d}{M}$ – шаги сетки, $k = \overline{0,N}$, $l = \overline{0,M}$.

Запишем разностную схему:

$$\left[1+\left(\frac{x_k^{l+1}-x_k^l}{\tau}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n_k^l}\frac{n_k^l - n_{k-1}^l}{h} = \frac{x_k^{l-1}-2x_k^l+x_k^{l+1}}{\tau^2}, \quad (12)$$

$$x_k^0 = x_k^1,$$

$$n_0^l = n_0(kh) .$$

Для удобства записи переобозначим:

$$\frac{1}{n_k^l}\frac{n_k^l - n_{k-1}^l}{h} \equiv A_k , \quad (13)$$

Заметим, что $A_k < 0$, так как $n_k^l > n_{k-1}^l$, для сходимости лучей на оси x=0. Тогда:

$$A_k \cdot \left(x_k^{l+1}\right)^2 - \left(2A_k x_k^l + 1\right)\cdot x_k^{l+1} + \left(A_k \tau^2 + A_k\left(x_k^l\right)^2 + 2x_k^l - x_k^{l-1}\right) = 0 . \quad (14)$$

Введем обозначения:

$$a \equiv A_k ,$$
$$b \equiv 2A_k x_k^l + 1 , \quad (15)$$
$$c \equiv A_k\tau^2 + A_k\left(x_k^l\right)^2 + 2x_k^l - x_k^{l-1} .$$

Тогда:

$$a\cdot\left(x_k^{l+1}\right)^2 - b\cdot x_k^{l+1} + c = 0 . \quad (16)$$

При этом необходимо выполнение условия:

$$D \equiv b^2 - 4\cdot a\cdot c > 0 . \quad (17)$$

Проведя несложные преобразования, учитывая, что величина $A_k < 0$, а также выбирая единственный корень из соображений направления луча, можно получить:

$$x_k^{l+1} = x_k^l - \frac{1}{2|A_k|} + \frac{\sqrt{1-4A_k^2\tau^2 - 4|A_k|\left(x_k^{l-1}-x_k^l\right)}}{2|A_k|}, \quad (18)$$

и

$$4A_k^2\tau^2 + 4|A_k|\left(x_k^{l-1}-x_k^l\right) < 1 . \quad (19)$$

Из уравнения (18) следует, что при начальном условии $x_k^0 = x_k^1$ (плоский фронт волны на входе): $x_k^2 < x_k^1$. И далее следует, что при $\forall\ l$ будет выполняться неравенство:

$$0 < x_k^{l+1} < x_k^l \quad (20)$$

Следует заметить, что величину A_k с учетом выражения (7) можно определить и в аналитическом виде, а именно:

$$A_k(x) = -\frac{\pi}{2d}\operatorname{th}\left[\frac{\pi}{2d}x\right]. \quad (21)$$

3. Численное моделирование

Для исследования хода лучей внутри рассматриваемой среды было разработано программное обеспечение, реализующее численное решение (18). На рис. 3 показан ход лучей с различными начальными координатами на входе (соответственно 1, 2 и 3 мм). Параметры расчета: ширина элемента x_{max} = 3 мм, расстояние до точки схождения лучей d = 3,1 мм, минимальный и максимальный коэффициенты преломления соответственно $n_{\min}$ = 1 и n_0 = 2,5; количество отсчетов: по вертикали – 100, по горизонтали – 1000.

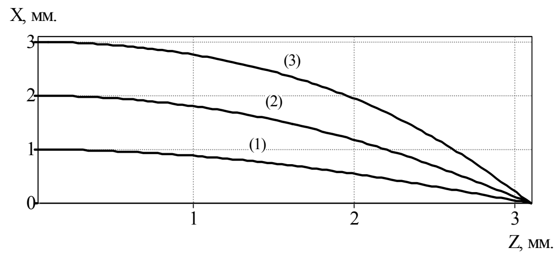


Рис. 3. Рассчитанный ход для лучей с координатами на входе: 1 мм (1); 2 мм (2); 3 мм (3).

Для экспериментального подтверждения сходимости численного решения (18) были проведены различные исследования поведения ошибки ε. На рис. 4 для соответствующих лучей показаны зависимости СКО от изменения количества отсчетов по горизонтальной оси z (то есть от измельчения шага τ) при фиксированном количестве отсчетов по оси x. Данная ошибка показывает отклонение хода лучей рассчитанных по численной схеме (18) от аналитического решения (8). На рис. 5 показаны зависимости СКО при одновременном изменении количества отсчетов по осям x и z, при этом сохраняется соотношение: $\chi \equiv \tau/h = \text{const}$. Приведенные графики демонстрируют хорошую устойчивость полученного решения.

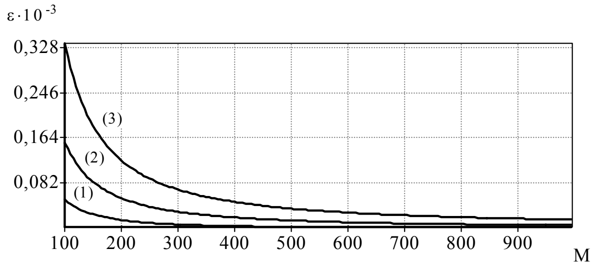


Рис. 4. Исследование зависимости ошибки от количества разбиений по оси z для лучей с координатами на входе: 1 мм (1); 2 мм (2); 3 мм (3).

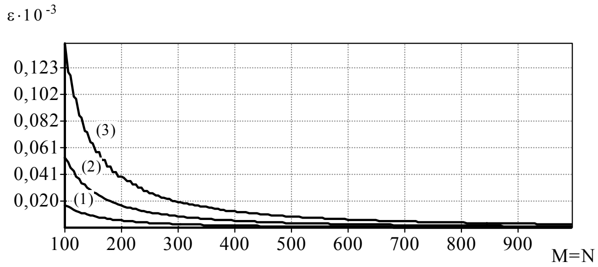


Рис. 5. Исследование зависимости ошибки от количества разбиений по осям x и z, при $\chi \equiv \tau/h = const$ для лучей с координатами на входе: 1 мм (1); 2 мм (2); 3 мм (3).

Также было проведено исследование распределения интенсивности по вертикальной оси x на различных расстояния от входной плоскости z=0. На рис. 5 показаны профили интенсивности в точках z = 2,9 мм (1); z = 3,0 мм (2); z = 3,05 мм (3). Параметры расчета совпадают с параметрами предыдущих экспериментов (то есть общее число лучей во входной плоскости равно 100).

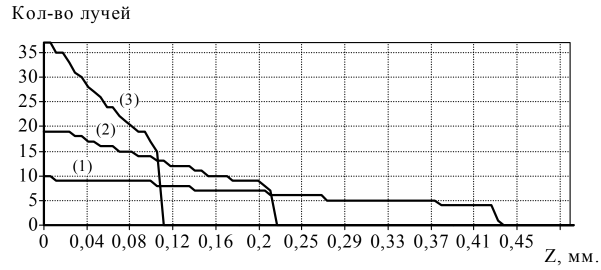


Рис. 6. Исследование профиля интенсивности в точках: z = 2,9 мм (1); 3,0 мм (2); 3,05 мм (3).

4. Расчет ГОЭ для фокусировки в заданное распределение интенсивности

Для расчета ГОЭ, фокусирующего лучи в заданное распределение интенсивности в выходной плоскости, можно разбить элемент на зоны, число которых будет соответствовать количеству отсчетов в выходной плоскости. Внутри каждой такой зоны (рис. 7) лучи будут идти в соответствии с уравнением (8), В подобном составном ГОЭ коэффициент преломления n уже будет зависеть от переменных x и z, то есть $n \equiv n(x,z)$, но внутри зон он будет удовлетворять выражению (7).

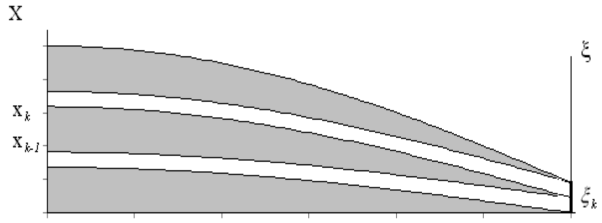


Рис. 7. Разбиение составного ГОЭ на зоны.

Число лучей N_1 - N_M , где M – количество отсчетов на входе, которые должны придти в конкретный отсчет выходной плоскости ("ширина" зоны), можно итеративно определить в соответствии с заданным распределением интенсивности $I_B(\xi)$ на выходе по следующим формулам:

$$I_B(\xi_p) \cong \sum_{k=N_{p-1}+1}^{N_p} I_0(x_k), \quad p = \overline{1,M}\,, \quad N_0 = 0, \quad (22)$$

где x_k, ξ_p – координаты точек во входной и выходной плоскостях, Np–Np₋₁ – число лучей пришедших в точку (отсчет) ξ_p, $\sum_{p=1}^{M} N_p = N$ – общее число лучей.

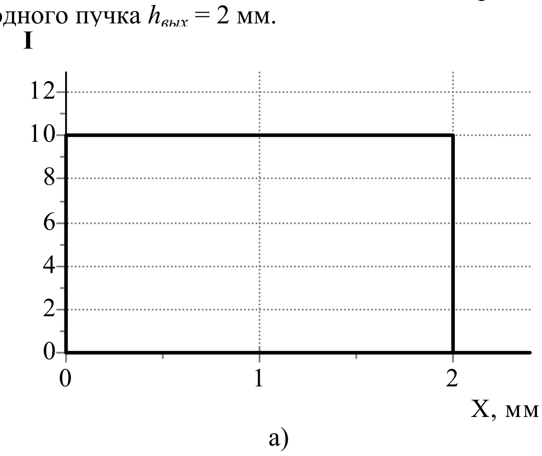
Очевидно, что в результате дискретизации в некоторых отсчетах суммарная интенсивность окажется несколько больше требуемого значения, в других – меньше, однако необходимым является выполнение равенства:

$$\sum_{k=1}^{M} I_B(\xi_k) = \sum_{k=1}^{N} I_0(x_k)\,, \quad (23)$$

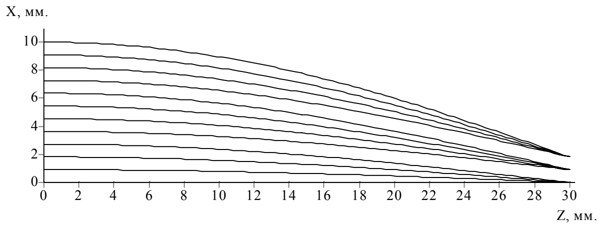
Здесь и далее предполагаем, что $\Delta x = \Delta\xi$ – шаги сетки на входе и выходе одинаковы.

Для иллюстрации метода на рис. 8-10 приведены примеры расчета ГОЭ формирующих различные распределения интенсивности в выходной плоскости. На рис. 8a, 8b, 8c показаны профили интенсивности формируемые элементами; на рис. 9a, 9b, 9c показан ход лучей в зонах соответствующих элементов; на рис. 10a, 10b, 10c показан коэффициент преломления элементов на расстоянии l=10 мм от входной плоскости.

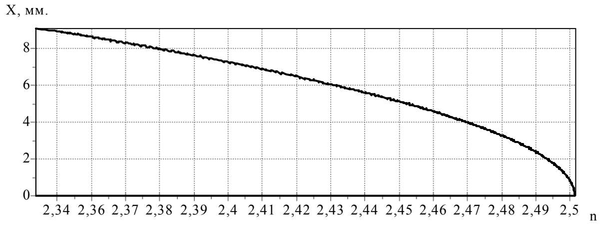
Параметры расчета: ширина элемента $H_{вх}$ = 10 мм, длина элемента L = 30 мм, ширина выходного пучка $h_{вых}$ = 2 мм.



а)

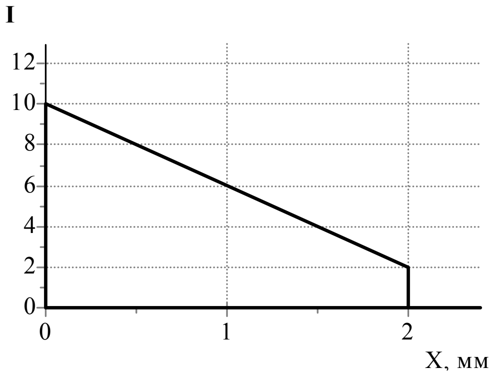


б)

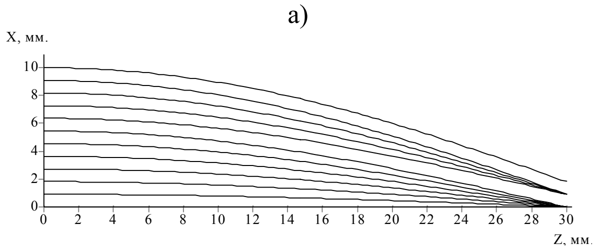


в)

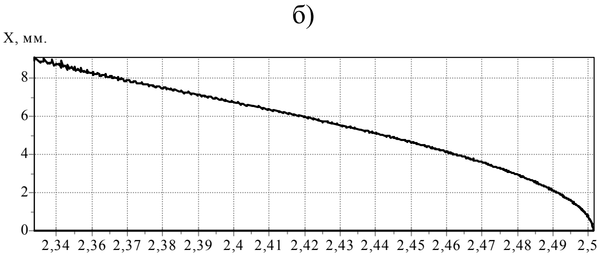
Рис. 8. Исследование составного ГОЭ, формирующего равномерное распределение интенсивности:
а) распределение интенсивности в выходной плоскости; б) ход лучей в зонах (всего 12 лучей); в) показатель преломления n на расстоянии l=10 мм от входной плоскости.



а)

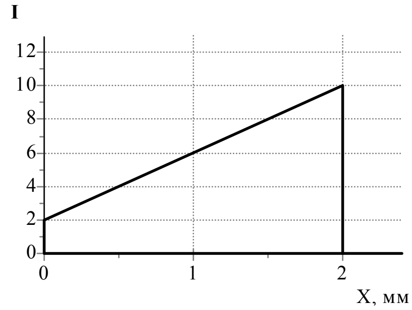


б)

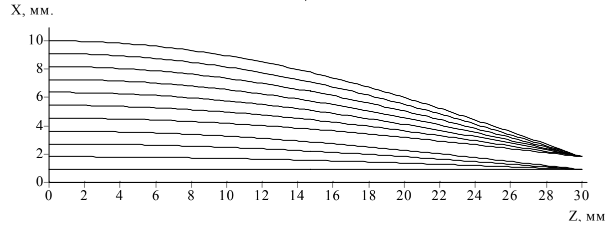


в)

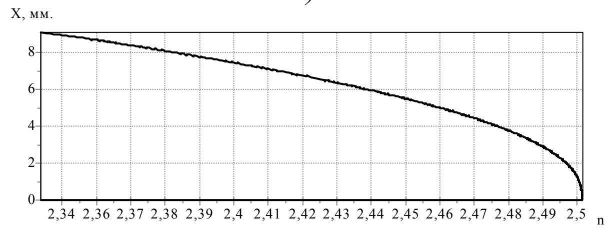
Рис. 9. Исследование составного ГО, формирующего линейно убывающее к краю элемента распределение интенсивности: а) распределение интенсивности в выходной плоскости; б) ход лучей в зонах (всего 12 лучей); в) показатель преломления n на расстоянии l=10 мм от входной плоскости.



а)



б)



в)

Рис. 10. Исследование составного ГОЭ, формирующего линейно возрастающее к краю элемента распределение интенсивности: а) распределение интенсивности в выходной плоскости; б) ход лучей в зонах (всего 12 лучей); в) показатель преломления n на расстоянии l=10 мм от входной плоскости.

Заключение

Получены следующие результаты:

- получено ограничение на апертуру ГОЭ, фокусирующего плоский пучок в точку;
- обобщено решение для случая плоского входного фронта и фокусировки лучей в произвольной осевой точке;
- проведено численное моделирование и исследована зависимость СКО от изменения параметров разностной схемы, для расчета лучей в ГОЭ, показатель преломления которого зависит от одной поперечной переменной;
- предложен метод расчета составных ГОЭ, формирующих заданное распределение интенсивности в выходной плоскости.

Литература

1. Микаэлян А.Л. Применение слоистой среды для фокусирования волн // Доклады академии наук СССР. 1951. Том LXXXI. С. 569–571.
2. Микаэлян А.Л. Общий метод определения параметров неоднородных сред по заданным траекториям лучей // Доклады академии наук СССР. 1952. Том LXXXIII. С. 219–220.
3. G.I. Greishuk, S.T. Bobrov, S.A. Stepanov Optics of diffractive and gradient–index elements and systems // SPIE Press, Bellington. 1997.

Design of complex gradient optical element to form determined intensity distribution

V.V. Kotlyar, A.S. Melekhin
Image Processing Systems Institute of RAS, Samara

Abstract

The paper considers analytical expressions for calculating the refractive index of a two-dimensional medium, which converts the target amplitude-phase distribution at the input into the target amplitude-phase distribution at the output within the framework of ray optics. Examples of the design of composite gradient optical elementsfor the generation of several target intensity distributions are provided.

Citation: Kotlyar VV, Melekhin AS. Design of complex gradient optical element to form determined intensity distribution. Computer Optics 2001; 21: 92-95.

References

[1] Mikaelyan AL. Application of a layered medium to focusing of waves [In Russian]. Dokl Akad Nauk SSSR 1951; 81: 569-571.
[2] Mikaelyan AL. A general method for determining the parameters of inhomogeneous media based on the given ray paths [In Russian]. Dokl Akad Nauk SSSR 1952; 83: 219-220.
[3] Greishuk GI, Bobrov ST, Stepanov SA. Optics of diffractive and gradient–index elements and systems. Bellington: SPIE Press; 1997.