ОПТИЧЕСКИЕ ЧИСТЫЕ ВИХРИ И ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЫ

Котляр В.В., Хонина С.Н., Алмазов А.А., Сойфер В.А.
Институт систем обработки изображений РАН,
Самарский государственный аэрокосмический университет

Аннотация

Получен счетный набор линейно-независимых решений параксиального волнового уравнения (типа уравнения Шредингера), которые названы гипергеометрическими модами. Эти решения описывают оптические чистые вихри и могут быть сформированы при освещении плоской волной спиральной фазовой пластины. Эти моды отличаются от известных параксиальных мод тем, что их радиус увеличивается как корень квадратный от пройденного расстояния, и что все они при распространении имеют одинаковую фазовую скорость.

Введение

Давно известны и нашли широкое применение в оптике моды Эрмита-Гаусса (ЭГ) и Лагерра-Гаусса (ЛГ), которые являются частными решениями параксиального волнового уравнения (ПВУ) (или уравнения Шредингера) в декартовых и цилиндрических координатах [1]. Они являются поперечными модами стабильных лазерных резонаторов. Эти моды сохраняют свою структуру (распределение интенсивности и фазы в поперечном сечении), изменяясь при распространении вдоль оптической оси только масштабно. Эти моды также образуют ортогональный базис, так что с помощью линейной комбинации этих мод можно строить другие решения ПВУ.

В цилиндрических координатах ПВУ имеет и другие модовые решения, которые также, как и моды ЭГ и ЛГ, сохраняют свою структуру, меняясь только масштабно. Это параксиальные моды Бесселя [2], которые надо отличать от непараксиальных бездифракционных пучков Бесселя, которые являются решениями уравнения Гельмгольца [3] и здесь не рассматриваются. В отличие от гауссовых мод моды Бесселя имеют бесконечную энергию (хотя конечную интенсивность в каждой точке пространства) и расходятся линейно. То есть эффективный диаметр пучка Бесселя линейно возрастает с увеличением расстояния вдоль оптической оси от начальной плоскости. Известно, что гауссовые моды расходятся параболически, и только при большом удалении от начальной плоскости радиус гауссового пучка растет тоже линейно с ростом расстояния вдоль оптической оси.

В последнее время были введены в рассмотрение новые модовые решения ПВУ [4-8], которые изучались теоретически [4-7] и экспериментально [8]. Это световые пучки Айнса-Гаусса. Они являются решениями ПВУ в эллиптических координатах. В этих координатах ПВУ решается методом разделения переменных, и решение получается в виде произведения гауссовой функции на многочлены Айнса. Сами же многочлены Айнса являются решениями уравнения Уиттекера-Хилла [2]. Моды Айнса-Гаусса (АГ) являются ортогональным базисом, обобщающим моды ЭГ и ЛГ. Когда эллиптические координаты переходят в цилиндрические (эллипсы переходят в окружности), то моды АГ переходят в моды ЛГ, а при стремлении эксцентриситета эллипсов к бесконечности (эллипсы переходят в отрезок прямой) моды АГ переходят в моды ЭГ.

Заметим, что в [9] исследовались астигматические лазерные пучки, названные модами Эрмита-Лагерра-Гаусса, которые также при определенном значении параметра (угла поворота цилиндрической линзы вокруг оптической оси) переходят в обычные моды ЭГ и ЛГ.

В данной работе рассмотрен еще один тип модовых решений ПВУ в цилиндрических координатах, которые также сохраняют свою структуру, изменяясь только масштабно. Расходимость этих мод гиперболическая, то есть при большом удалении от начальной плоскости эти пучки расходятся слабее, чем гауссовые и бесселевые пучки. Так как функции, описывающие эти моды, содержат вырожденную гипергеометрическую функцию, то мы назвали их гипергеометрическими (ГГ) модами. Они как и параксиальные моды Бесселя обладают бесконечной энергией. На практике их можно сформировать только на конечном расстоянии с помощью спиральной фазовой пластины [10-12], освещенной плоской волной. Так как у любой ГГ моды всегда (кроме начальной плоскости) в центре (на оптической оси) имеется нуль интенсивности, характерный для оптических вихрей [13], и ни освещающий пучок, ни сама спиральная пластинка не вносят дополнительной расходимости в пучок, то эти моды можно считать «чистыми» вихрями.

В работе установлено, что найденные решения являются однопараметрическим семейством более общего двухпараметрического класса решений ПВУ в цилиндрических координатах [2]. Впервые о гипергеометрических модах, по видимому, упоминалось в [10,14].

2. Чистые вихри – параксиальные световые пучки с минимальной расходимостью

ПВУ в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\left(2ik\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)E(r,\theta,z)=0\,, \qquad (1)$$

где (r,θ) - поперечные полярные координаты, z- координата, направленная вдоль оптической оси, k-волновое число. Если искать радиально-симметричное решение уравнения (1) в виде неполного разделения переменных

$$E(r,\theta,z)=E_1\left(\frac{r}{r_0\left[1+(z/z_0)^2\right]^{1/2}}\right)E_2(\theta)E_3(z)\,, \qquad (2)$$

то получатся моды ЛГ [1], которые не изменяют свою интенсивность $\left|E(r,\theta,z)\right|^2$ в системе координат

$$\begin{cases} x=r\sqrt{1+\left(\dfrac{z}{z_0}\right)^2}\cos\theta, \\ y=r\sqrt{1+\left(\dfrac{z}{z_0}\right)^2}\sin\theta, \\ z=z, \end{cases} \qquad (3)$$

где $z_0=\dfrac{kr_0^2}{2}$, r_0 -радиус гауссового пучка при z=0, k=2π/λ, λ – длина волны излучения.

Менее известно другое решение уравнения (1), которое также является решением с неполным разделением переменных, и не меняет своей интенсивности в системе координат [2]:

$$\begin{cases} x=rz\cos\theta, \\ y=rz\sin\theta, \\ z=z. \end{cases} \qquad (4)$$

Линейно-независимыми решениями уравнения (1) такого типа являются параксиальные моды Бесселя:

$$\Psi_{m\gamma}(r,\theta,z)=-\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}\frac{(-i)^m k}{z}J_m\left(\frac{k\gamma r}{z}\right)\times$$
$$\exp\left[\frac{ik}{2z}\left(r^2+\gamma^2\right)+im\theta\right]. \qquad (5)$$

где m – целое число, γ > 0 – модовый параметр (радиус узкой щели), характеризующий масштаб моды Бесселя. Из уравнения (5) видно, что параксиальный пучок Бесселя расходится линейно с увеличением расстояния z:

$$r_{0m}=\frac{\lambda z\alpha_m}{2\pi\gamma}\,, \qquad (6)$$

где r_{0m} – радиус первого нулевого кольца моды Бесселя m-го порядка, α_m – первый ненулевой корень функции Бесселя, $J_m(\alpha_m)$=0 .

Линейная расходимость характерна также для мод ЛГ в дальней зоне. Так как радиус основной моды ЛГ зависит от z известным образом:

$$r=r_0\sqrt{1+\left(\frac{z}{z_0}\right)^2}\,, \qquad (7)$$

то при $z >> z_0$ получим:

$$r\approx\frac{\lambda z}{\pi r_0}\,. \qquad (8)$$

При z, стремящемся к нулю, функция (5) стремится к функции

$$\Psi_{m\gamma}(r,\theta,z\to 0)=\frac{\delta(r-\gamma)}{\sqrt{2\pi r}}\exp(im\theta)\,. \qquad (9)$$

Из уравнения (9) видно, что световое поле (5) может быть сформировано с помощью узкой кольцевой щели радиуса γ в непрозрачном экране, а плотность световой энергии в щели должна быть бесконечно большой.

Из уравнений (5) и (6) следует, что при z , стремящемся к нулю, вблизи экрана радиус бесселевого пучка r_{0m} также стремится к нулю.

Теперь найдем еще одно решение уравнения (1) с неполностью разделенными переменными, расходимость которого при больших z будет «слабее», чем расходимость мод ЛГ (8) и параксиальных мод Бесселя (6). Будем искать решение в виде:

$$E(r,\theta,z)=E_n\left(\frac{kr^2}{4z}\right)\exp(in\theta)\,, \qquad (10)$$

где n – целое число. Для функции $E_n(t)$ где $t=\dfrac{kr^2}{4z}$, вместо уравнения (1) получим уравнение:

$$\left[t\frac{d^2}{dt^2}+(1-2it)\frac{d}{dt}-\frac{n^2}{4t}\right]E_n(t)=0\,. \qquad (11)$$

Будем искать решение уравнения (11) в виде:

$$E_n(t)=\sqrt{t}e^{it}\Psi_n(t)\,, \qquad (12)$$

тогда для функции $\Psi_n(t)$ получим уравнение:

$$\left[t\frac{d^2}{dt^2}+2\frac{d}{dt}+\left(i+t+\frac{1-n^2}{4t}\right)\right]\Psi_n(t)=0\,. \qquad (13)$$

Пусть частное решение уравнения (13) имеет вид

$$\Psi_n(t)=iJ_\nu(t)+J_{\nu+1}(t)\,, \qquad (14)$$

тогда, подставив выражение (14) в уравнение (13), получим, что $\nu=(n-1)/2$, n – целое число. Окончательно находим счетное число линейно-независимых решений уравнения (1):

$$E_n(r,\theta,z)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp\left[-i\frac{\pi(n+2)}{4}\right]\times$$
$$\sqrt{\frac{kr^2}{4z}}\exp\left[\frac{ikr^2}{4z}+in\theta\right]\times \qquad (15)$$
$$\times\left\{iJ_{(n-1)/2}\left(\frac{kr^2}{4z}\right)+J_{(n+1)/2}\left(\frac{kr^2}{4z}\right)\right\}.$$

В решении (15) постоянный нормировочный сомножитель

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp\left[-i\frac{\pi(n+2)}{4}\right]$$

добавлен из тех соображений, чтобы предел функции $E_n(r,\theta,z)$ при стремлении z к нулю был равен выражению

$$E_n(r,\theta,z)=\exp(in\theta)\,. \qquad (16)$$

В этом нетрудно убедиться, используя асимптотику функции Бесселя в выражении (15) при больших значениях x:

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \tag{17}$$

Таким образом, световое поле (15) можно сформировать, осветив плоской волной с неограниченной апертурой спиральную фазовую пластинку с функцией пропускания (16).

В другом предельном случае, когда z стремится к бесконечности ($t \to 0$), функция (15) будет иметь асимптотику:

$$E_n(t \to 0, \theta) \approx \frac{i\sqrt{\pi} t^{n/2} \exp\left[-\frac{i\pi(n+2)}{4} + in\theta \right]}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2} \right)}. \tag{18}$$

При получении выражения (18) воспользовались первым членом разложения функции Бесселя в ряд при малом аргументе ($x \to 0$):

$$J_m(x) \approx \frac{\left(\frac{x}{2} \right)^m}{\Gamma(m+1)}. \tag{19}$$

Из уравнения (18) видно, что при $t \to 0$ функция $E_n(t,\theta)$ также стремиться к нулю как $t^{n/2}$.

Интенсивность моды (15) имеет вид:

$$I_n(r,z) = \left| E_n(r,\theta,z) \right|^2 = \frac{\pi t}{2} \left[J^2_{(n-1)/2}(t) + J^2_{(n+1)/2}(t) \right]. \tag{20}$$

Из уравнения (20) видно, что всегда (кроме начальной плоскости $z=0$) при $t=0$ $I_n(t)=0$, то есть на оптической оси z всегда будет ноль интенсивности. Это является характерным признаком наличия в световом поле оптического вихря или фазовой сингулярности [13].

Из уравнения (20) с помощью рекуррентных соотношений для функции Бесселя можно получить выражение для производной:

$$\frac{dI_n(t)}{dt} = \pi n \left[J^2_{(n-1)/2}(t) - J^2_{(n+1)/2} \right]. \tag{21}$$

Из уравнения (21) видно, что картина интенсивности при любом z имеет кольцевой вид *($n \neq 0$)* и радиус первого основного кольца с максимальным значением интенсивности можно найти из уравнения:

$$J_{(n-1)/2}(t) = J_{(n+1)/2}(t). \tag{22}$$

Пусть в уравнении (22) первый (наименьший) корень равен $t=t_{0n}$, тогда радиус первого светлого кольца в картине интенсивности (20) будет равен:

$$r_{0n} = \sqrt{\frac{2t_{0n}\lambda z}{\pi}}. \tag{23}$$

Из сравнения выражения (23) с (6) и (8) можно заключить, что моды (15) имеют самую слабую расходимость из известных параксиальных мод (смотри рис. 1) при $z > z_1$, где

$$z_1 = \frac{z_0}{2t_{0n}}, \tag{24}$$

и при условии, что $tg\varphi = \frac{\lambda\alpha_0}{2\pi\gamma} = \frac{\lambda}{\pi r_0}$, где φ – угол наклона к оси z прямой 2 на рис. 1.

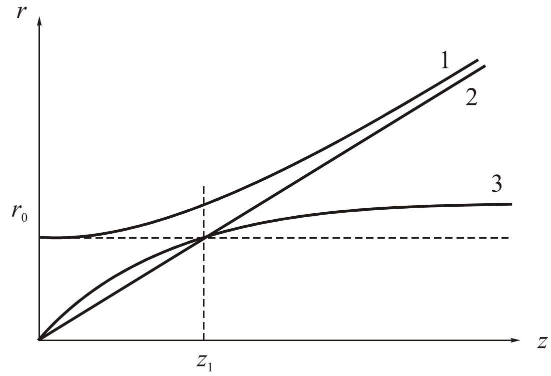


Рис. 1 Зависимость эффективного радиуса пучка от расстояния вдоль оптической оси для: гауссового пучка (кривая 1), параксиального бесселевого пучка (кривая 2) и чистого вихря (кривая 3)

Из рис. 1 видно, что при малых $z \ll z_0$, наоборот, расходимость светового поля (15) наибольшая из трех рассматриваемых полей.

3. Гипергеометрические моды

Функции (15) - частный случай (однопараметрическое семейство) двухпараметрического семейства функций, являющихся решением уравнения (1) в цилиндрических координатах. Эти ГГ моды являются полным ортогональным базисом и сохраняют свою структуру в системе координат вида

$$\begin{cases} x = r\sqrt{z}\cos\theta, \\ y = r\sqrt{z}\sin\theta, \\ z = z. \end{cases} \tag{25}$$

ГГ моды имеют следующий вид [2]:

$$E_{\gamma n}(r,\theta,z) = \frac{2^{-n+i\gamma-2}}{\pi} \exp\left[\frac{i\pi}{4}(3n - 1 + i\gamma) \right] \times \left(\frac{z}{2k} \right)^{(i\gamma-1)/2} \Gamma\left(\frac{n+i\gamma+1}{2} \right) \times \times \frac{r^n}{\Gamma(n+1)} {}_1F_1\left(\frac{n+1-i\gamma}{2}, n+1; \frac{ir^2}{4} \right) \exp(in\theta), \tag{26}$$

где $-\infty < \gamma < \infty$ – действительное число, $\Gamma(x)$ – гамма-функция, ${}_1F_1(a,b;x)$ – вырожденная (или конфлюэнтная) гипергеометрическая функция:

$${}_1F_1(a,b;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b)x^k}{\Gamma(a)\Gamma(b+k)k!}. \tag{27}$$

Существует связь между функцией (27) и функцией Бесселя:

$$J_\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2} \right)^\nu e^{-ix}}{\Gamma(\nu+1)} {}_1F_1(\nu + 1/2, 2\nu + 1, 2ix). \tag{28}$$

Физически световые поля с комплексной амплитудой вида (26) можно сформировать, освещая неограниченной плоской волной амплитудно-фазовый транспарант с функцией пропускания:

$$E_{\gamma n}(r,\theta,z=0)=\frac{r^{i\gamma-1}}{2\pi}\exp(in\theta)\,. \qquad (29)$$

При $r=0$ в уравнении (29) возникает особенность, во избежание которой положим $\gamma=-i$, тогда вместо (29) получим функцию пропускания фазового транспаранта, отличающуюся от функции пропускания спиральной фазовой пластинки (16) только постоянным множителем:

$$E_{-in}(r,\theta)=\frac{\exp(in\theta)}{2\pi}\,. \qquad (30)$$

Поэтому функции (15) должны совпадать с ГГ модами (26) при $\gamma=-i$ (хотя параметр γ в выражении (26) должен быть действительным). Покажем, что это действительно так. Положив в выражении (26) $\gamma=-i$, получим:

$$E_{-in}(r,\theta,z)=\frac{1}{2\pi}\exp\left[\frac{i3\pi n}{4}\right]\left(\frac{kr^2}{2z}\right)^{n/2}\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)\times$$
$$\times\frac{1}{\Gamma(n+1)}\,{}_1F_1\left(\frac{n}{2},n+1;\frac{ikr^2}{2z}\right)\exp(in\theta)\,. \qquad (31)$$

С учетом выражения (28) при

$$\nu=(n-1)/2\,,\quad t=\frac{kr^2}{4z},$$

$$J_{(n-1)/2}(x)=\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{(n-1)/2}e^{-it}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\,{}_1F_1(n/2\,,n\,;2it) \qquad (32)$$

и рекуррентного соотношения для гипергеометрической функции

$${}_1F_1(n/2,n+1;2ix)=\left(\frac{id}{dx}+2\right){}_1F_1(n/2,n;2ix)\,, \qquad (33)$$

получим вместо (31) выражение:

$$E_{-in}(t,\theta)=(2\pi)^{-1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp\left[-i\frac{\pi(3n-2)}{4}\right]\times$$
$$\sqrt{t}\exp\left(it+in\theta\right)\left[iJ_{(n-1)/2}\left(t\right)+J_{(n+1)/2}\left(t\right)\right]. \qquad (34)$$

Функция (34) отличается от функции (15) только нормировочным сомножителем $(2\pi)^{-1}(-1)^n$.

4. Свойства чистых вихрей

ГГ моды или чистые вихри обладают интересными свойствами. Все моды независимо от величины номера n распространяются с одинаковыми фазовыми скоростями. Это свойство отличает ГГ моды от мод ЭГ, ЛГ, АГ. Это означает, что любая линейная комбинация мод (15) будет сохранять свою структуру с точностью до масштаба ($z>0$):

$$I(r,\theta,z)=\left|\sum_{n=-N}^{N}C_nE_n(r,\theta,z)\right|^2=I\left(r\sqrt{\frac{k}{z}},\theta\right). \qquad (35)$$

Подбором значений комплексных коэффициентов C_n в выражении (35) можно оптически формировать распределения интенсивности заданного вида, которые при распространении вдоль оптической оси будут сохраняться с точностью до масштаба. Оптически сформировать поле с распределением интенсивности вида (35) можно, осветив неограниченной плоской волной амплитудно-фазовый транспарант с функцией пропускания вида:

$$T(r,\theta)=\sum_{n=-N}^{N}C_n\exp(in\theta)\,. \qquad (36)$$

Заметим, что световые поля в дальней зоне дифракции, ограниченные при $z=0$ одинаковой апертурой V, имеют одинаковые фазовые скорости распространения. Действительно, распределение интенсивности в дальней зоне дифракции зависит от отношения $k\xi/z$:

$$I_n(\xi,\eta)=\left|\frac{k}{z}\exp\left[\frac{ik(\xi^2+\eta^2)}{2z}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\iint_V f_n(x,y)\exp\left[\frac{-ik(x\xi+y\eta)}{2z}\right]dxdy\right|^2= \qquad (39)$$
$$=\left(\frac{k}{z}\right)^2\tilde{I}_n\left(\frac{k\xi}{z},\frac{k\eta}{z}\right).$$

Однако, в отличие от (35), эффективный радиус всех световых полей с конечной энергией и ограниченных областью V в дальней зоне, как видно из (37), расходится линейно с расстоянием ($r\sim z$), а гипергеометрические моды расходятся пропорционально квадратному корню из расстояния($r\sim\sqrt{z}$) .

Линейная комбинация гипергеометрических мод (35) обладает угловым орбитальным моментом (УОМ) [15,16].Проекция на оптическую ось z вектора углового орбитального момента сохраняется при изменении z, и ее можно вычислить при z=0. В соответствии с выражением для УОМ [16] для проекции на ось z получим:

$$J_z=\frac{i\iint E(r,\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}E^*(r,\theta)rdrd\theta}{\omega\iint\left|E(r,\theta)\right|^2rdrd\theta}\,, \qquad (38)$$

где $E(r,\theta)$ – комплексная амплитуда светового поля, удовлетворяющая уравнению (1), ω - циклическая частота света. Подставляя выражение (36) в уравнение (38), получим проекцию вектора УОМ для суперпозиции гипергеометрических мод:

$$J_z=\frac{\sum_{n=-N}^{N}n\left|C_n\right|^2}{\omega\sum_{n=-N}^{N}\left|C_n\right|^2}\,. \qquad (39)$$

Из уравнений (38) и (39) видно, что хотя гипергеометрические моды обладают бесконечной энергией, нормированный угловой орбитальный момент у них конечен.

Ненормированный УОМ гипергеометрических мод – бесконечный, но плотность момента в каждой точке пространства – конечна. Измерить УОМ светового поля можно с помощью специального дифракционного оптического элемента, функция пропускания которого пропорциональная линейной комбинации угловых гармоник (36) [17].

5. Результаты численного моделирования распространения чистых вихрей и их суперпозиций

Моделировать распространение световых полей вида (35), представляющих собой чистые вихри и их суперпозиции, сложно из-за бесконечного радиального размера таких полей.

Однако, если взять радиус поля достаточно большим, то фактическая ограниченность поля не будет существенно сказываться на его центральной части. Кроме того, моделирование распространения ограниченных вихрей [14] позволяет предсказать поведение полей, формируемых с помощью спиральных фазовых пластинок и дифракционных оптических элементов.

Моделирование непараксиального распространения поля (36) проводилось на основе разложения входного поля по сферическим волнам:

$$F(u,v,z)=-\frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int f(x,y)\times$$
$$\times\frac{\exp(ikR)}{R^2}\left(ik-\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

$$R=\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2+z^2}\,. \tag{40}$$

При моделировании использовались следующие параметры: размер поля 5 × 5 мм, число отсчетов в выходном поле 512x512. На рис. 2 показаны результаты моделирования распространения чистых вихрей различных порядков.

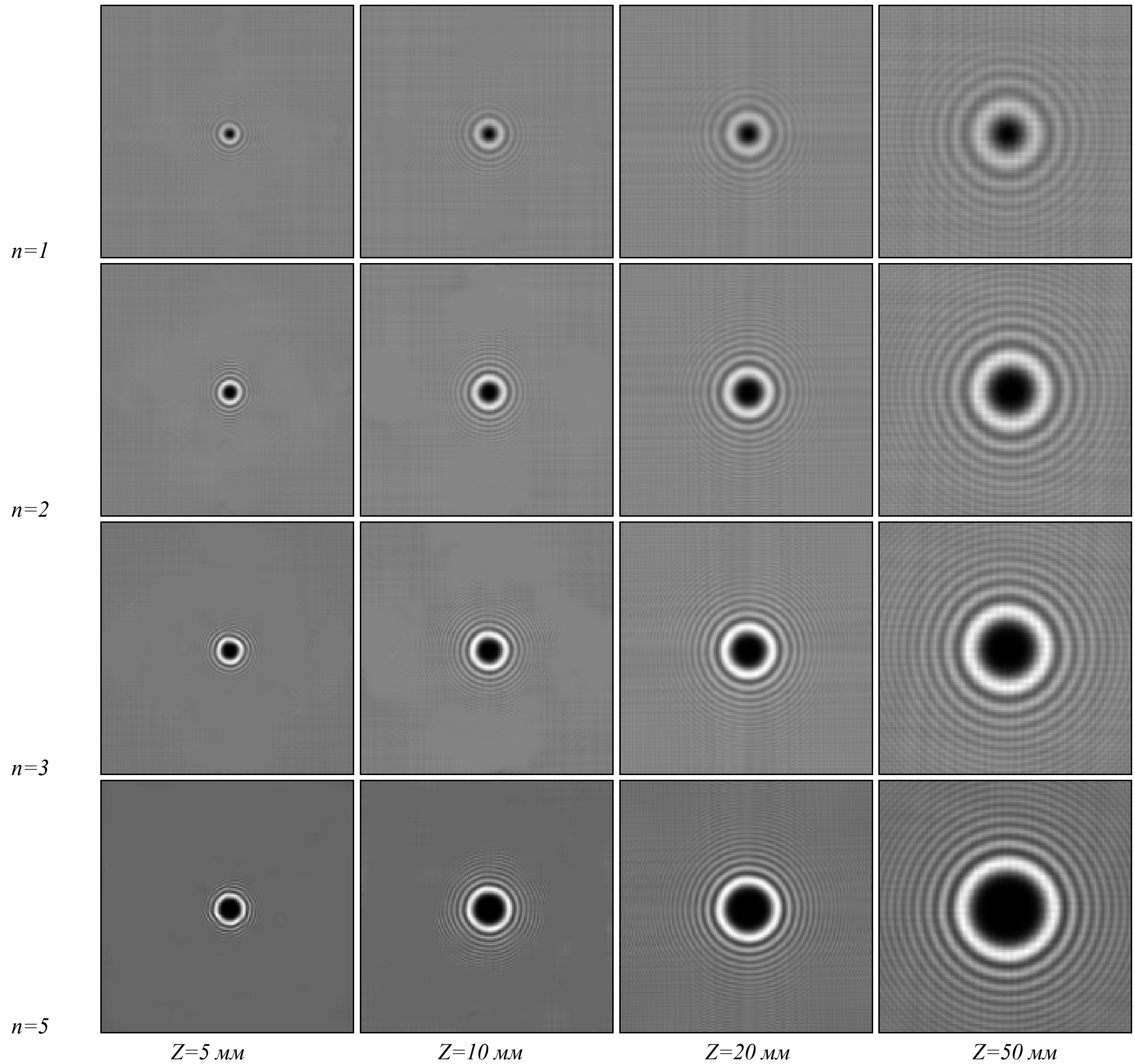
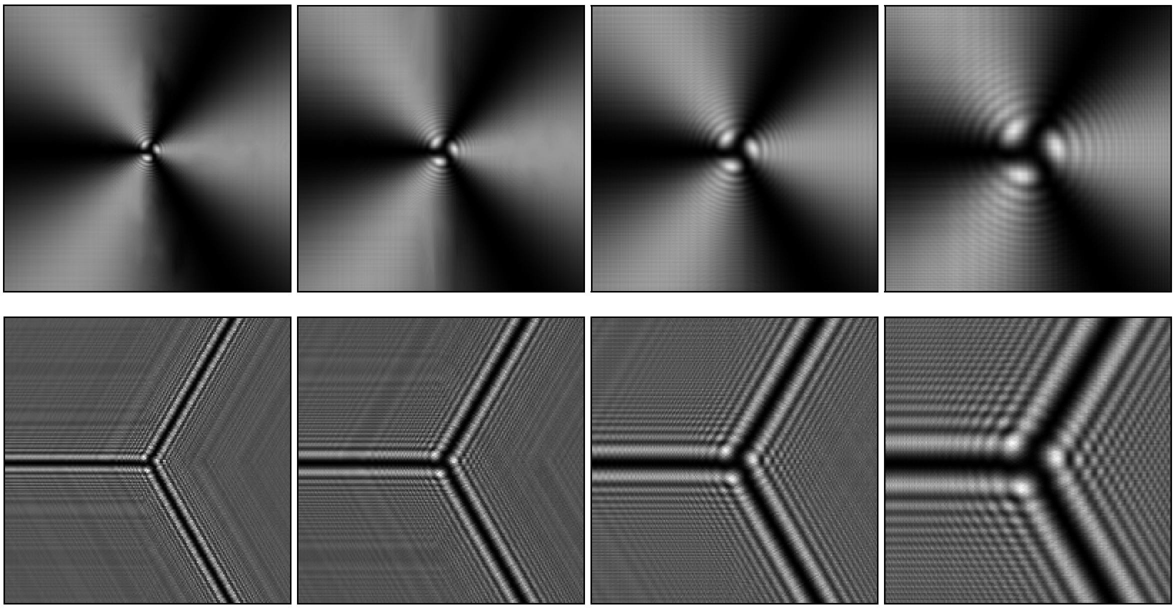


Рис. 2. Распределение интенсивности при распространении чистых вихрей порядков n=1, 2, 3, 5 на расстояниях z=5, 10, 20 и 50 мм

На рис. 2 видно, что чем больше порядок вихря, тем шире формируемая им воронка, что согласуется с формулой (23) для радиуса первого светлого кольца поля. Напомним, что радиус воронки пропорционален первому корню функции Бесселя, значение которого возрастает с ростом индекса n. Кроме того, на рис. 2 видно, что растет и яркость первого кольца, а также энергия, которая в нем сосредоточена.

В работе [18] исследовался вопрос использования пучков ЛГ с различными азимутальными индексами для формирования тороидных оптических дипольных ловушек. Было показано, что моды ЛГ с «винтом» более высокого порядка обеспечивают более глубокую потенциальную яму и более компактную концентрацию при фиксированных радиусе тороида и мощности лазера. Анологичные свойства присущи и чистым оптическим вихрям.

На рис. 3 показано распространение линейной комбинации (суперпозиции) чистых вихрей вида $\exp(i\theta)+\exp(-2i\theta)$. В первой строке приведены результаты для исходного амплитудно-фазового поля, а во второй строке – для только фазового, т.е. в плоскости z=0 было поле $\exp\{I \arg\,[\exp(i\theta)+\exp(-2i\theta)]\}$. Последний случай достаточно легко реализовать с помощью фазовых дифракционных оптических элементов. Видно что, как и было предсказано в разделе 4, распределения интенсивности для суперпозиций чистых вихрей сохраняются при распространении вдоль оптической оси с точностью до масштаба. Интересно, что в случае, когда на входе чисто фазовая суперпозиция чистых вихрей, то картина выглядит как уходящие в бесконечность темные каналы постоянной ширины, вместо расходящихся темных клинов как в случае амплитудно-фазового поля на входе.



Z=5 мм Z=10 мм Z=20 мм Z=50 мм

Рис. 3. Распространение линейной комбинации чистых вихрей вида $\exp(i\theta)+\exp(-2i\theta)$*: распределение интенсивности на расстояниях z=5, 10, 20 и 50 мм для амплитудно-фазового поля на входе (верхняя строка) и только фазового (нижняя строка).*

Заключение

В заключении кратко сформулируем полученные результаты.

- Получено новое семейство радиально-симметричных линейно-независимых решений параксиального волнового уравнения, которые названы чистыми вихрями и которые обладают слабой расходимостью и одинаковой фазовой скоростью (15).
- Сформировать чистые вихри можно, освещая плоской волной с неограниченной апертурой спиральную фазовую пластинку (16).
- Показано, что радиус кольца с максимальным значением интенсивности чистого вихря растет как корень квадратный от расстояния вдоль оптической оси (23).
- Показано, что найденные модовые решения являются частным случаем двухпараметрического семейства решений ПВУ, названных гипергеометрическими модами ((26) и (34)).
- Результаты численного моделирования подтверждают теоретические выкладки.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (грант CRDF REC-SA-014-02) и гранта Президента РФ НШ-1007.2003.01, а также гранта РФФИ 05-01-96505.

Литература

1. Siegman A.E. *Lasers*, University Science, Mill Valley, CA, 1986.
2. Miller W. Jr. *Symmetry andSeparation of Variables*, Addison-Wesley Pub., MA, 1977.
3. Durnin J., Miceli J.J., Eberly J.H. Diffraction-free beams, Phys. Rev., v.58, p.1499-1501 (1987).
4. Bandres M.A., Gutierrez-Vega J. Ince-Gaussian beams, Opt. Lett., v.29, no.2, p.144-146 (2004).
5. Bandres M.A., Gutierrez-Vega J. Ince-Gaussian modes of the paraxial wave equation and stable resonators, J. Opt. Soc. Am. A, v.21, no.5, p.873-880 (2004).
6. Bandres M.A. Elegant Ince-Gaussian beams, Opt. Lett., v.29, no.15, p.1724-1726 (2004).
7. Bandres M.A., Gutierrez-Vega J. Higher-order complex source for elegant Laguerre-Gaussian waves, Opt. Lett., v.29, no.19, p. 2213-2215 (2004).
8. Schwarz U.T., Bandres M.A., Gutierrez-Vega J. Observatiob of Ince-Gaussian modes in stable resonators, Opt. Lett., v.29, no.16, p.1870-1872 (2004).
9. Abramochkin E.G., Volostnikov V.G. Generalized Gaussian beams, J. Opt. A: Pure Appl. Opt., v.6, p.5157-5161 (2004).
10. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Shinkaryev M.V., Soifer V.A., Uspleniev G.V. The phase rotor filter, J. Mod. Opt., v.39, no.5, p.1147-1154.
11. Beijersbergen M.W., Coerwinkel R.P.C., Kristiensen M., Woerdman J.P. Helical-wave front laser beams produced with a spiral phase plate, Opt. Commun., v.112, p.321-327 (1994).
12. Oemrawsingh S.S.R., Van Houwelingen J.A.M., Eliel E.R., Woerdman J.P., Verstegen E.J.K., Kloosterboer J.G., Hooft G.W. production and characterization of spiral phase plates for optical wavelengths, Appl.Opt., v.43, no.3, p.688-694 (2004).
13. Soskin M.S., Gorshkov U.N., Vasnetsov M.V. Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortices, Phys. Rev. A, v.56, no.5, p.4064-4075 (1997).
14. Kotlyar V.V., Almazov A.A., Khonina S.N., Soifer V.A., Elfstrom H., Turunen J. Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate, J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 22, No. 5, pp.(2005).
15. Allen L., Beijersbergen M.V., Spreeuw R.J.C., Woerdman J.P. Orbital angular-momentum of light and the transformation of laguerre_gaussian laser modes, Phys. Rev. A, v.45, p.8185-8189 (1992).
16. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A., Paakkonen P., Simonen J., Turunen J. An analysis of the angular momentum of a light field in terms of angular harmonics, J. Mod. Opt., v.48, no.10, p.1543-1557 (2001).
17. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A., Paakkonen P., Turunen J. Measuring the light field orbital angular momentum using DOE", Optical Memory and Neural Networks, v.10, no.4, pp.241-255 (2001).
18. Wright E.M., Arlt J., and Dholakia K. “Toroidal optical dipole traps for atomic Bose-Einstein condensates using Laguerre-Gaussian beams”, Physical Review A 63, 013608 (2000).

Optical pure vortices and hypergeometrical modes

V.V. Kotlyar[1,2], S.N. Khonina[1,2], A.A. Almazov[1,2], V.A. Soifer[1,2]
[1]Image Processing Systems Institute of RAS
[2]Samara State Aerospace University(SSAU)

Abstract:

A countable set of linearly independent solutions of a paraxial wave equation (such as the Schrödinger equation), which are called hypergeometric modes, is obtained. These solutions describe pure optical vortices and can be formed by illumination of a spiral phase plate by a plane wave. These modes differ from the known paraxial modes in that their radius increases as a square root of the distance covered, and that they all propagate with the same phase velocity.

Keywords: hypergeometrical mode, paraxial wave equation, Schrödinger equation, optical vortex.

Acknowledgments: This work was financially supported by the Russian-American program "Basic Research and Higher Education" (grant CRDF REC-SA-014-02) and a grant from the President of the Russian Federation NSh1007.2003.01, as well as a grant from the Russian Foundation for Basic Research 05-01-96505.

Citation: Kotlyar VV, Khonina SN, Almazov AA, Soifer VA. Optical pure vortices and hypergeometrical modes. Computer Optics 2005; 27: 21-27.

References:

[1] Siegman AE. Lasers. Sausalito, CA, University Science Books; 1986. ISBN: 0-935702-11-3.
[2] Miller W Jr. Symmetry and separation of variables. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Pub; 1977.
[3] Durnin J, Miceli JJ, Eberly JH. Diffraction-free beams. Phys Rev Lett 1987; 58: 1499-1501. DOI: 10.1103/PhysRevLett.58.1499.
[4] Bandres MA, Gutiérrez-Vega JC. Ince-Gaussian beams. Opt Lett 2004; 29(2): 144-146. DOI: 10.1364/OL.29.000144.
[5] Bandres MA, Gutiérrez-Vega JC. Ince-Gaussian modes of the paraxial wave equation and stable resonators. J Opt Soc Am A 2004; 21(5): 873-880. DOI: 10.1364/JOSAA.21.000873.
[6] Bandres MA. Elegant Ince-Gaussian beams. Opt Lett 2004; 29(15): 1724-1726. DOI: 10.1364/OL.29.001724.
[7] Bandres MA, Gutiérrez-Vega JC. Higher-order complex source for elegant Laguerre-Gaussian waves. Opt Lett 2004; 29(19): 2213-2215. DOI: 10.1364/OL.29.002213.
[8] Schwarz UT, Bandres MA, Gutiérrez-Vega JC. Observation of Ince-Gaussian modes in stable resonators. Opt Lett 2004; 29(16): 1870-1872. DOI: 10.1364/OL.29.001870.
[9] Abramochkin EG, Volostnikov VG. Generalized Gaussian beams. J Opt A: Pure Appl Opt 2004; 6: S157-S161. DOI: 10.1088/1464-4258/6/5/001.
[10] Khonina SN, Kotlyar VV, Shinkaryev MV, Soifer VA, Uspleniev GV. The phase rotor filter. J Mod Opt 1992; 39(5): 1147-1154. DOI: 10.1080/09500349214551151.
[11] Beijersbergen MW, Coerwinkel RPC, Kristiensen M, Woerdman JP. Helical-wave front laser beams produced with a spiral phase plate. Opt Commun 1994; 112(5-6): 321-327. DOI: 10.1016/0030-4018(94)90638-6.
[12] Oemrawsingh SSR, Van Houwelingen JAM, Eliel ER, Woerdman JP, Verstegen EJK, Kloosterboer JG, Hooft GW. Production and characterization of spiral phase plates for optical wavelengths. Appl Opt 2004; 43(3): 688-694. DOI: 10.1364/AO.43.000688.
[13] Soskin MS, Gorshkov UN, Vasnetsov MV. Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortices. Phys Rev A 1997; 56(5): 4064-4075. DOI: 10.1103/PhysRevA.56.4064.
[14] Kotlyar VV, Almazov AA, Khonina SN, Soifer VA, Elfstrom H, Turunen J. Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate. J Opt Soc Am A 2005; 22(5): 849-861. DOI: 10.1364/JOSAA.22.000849.
[15] Allen L, Beijersbergen MV, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular-momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. Phys Rev A 1992; 45: 8185-8189. DOI: 10.1103/physreva.45.8185.
[16] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Pääkkönen P, Simonen J, Turunen J. An analysis of the angular momentum of a light field in terms of angular harmonics. J Mod Opt 2001; 48(10): 1543-1557. DOI: 10.1080/09500340108231783.
[17] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Paakkonen P, Turunen J. Measuring the light field orbital angular momentum using DOE. Optical Memory and Neural Networks 2001; 10(4): 241-255.
[18] Wright EM, Arlt J, Dholakia K. Toroidal optical dipole traps for atomic Bose-Einstein condensates using Laguerre-Gaussian beams. Phys Rev A 2000; 63: 013608. DOI: 10.1103/PhysRevA.63.013608.