

НАХОЖДЕНИЕ КОНСТАНТ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МЕТОДОМ КРЫЛОВА ПРИ РАСЧЕТЕ МОД ФОТОННЫХ ВОЛНОВОДОВ

Я.О. Шулюпова^{1,2}, В.В. Котляр^{1,2}

¹Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия,

²Самарский государственный аэрокосмический университет им. С.П. Королева, Самара, Россия

Аннотация

В работе численно исследована эффективность метода Крылова решения нелинейной задачи на собственные значения при расчете констант распространения собственных мод фотонного волновода. Матрица этой нелинейной задачи на собственные значения имеет размерность $N \times N$, где N пропорционально числу локальных синусоидальных мод, с помощью которых аппроксимируются собственные моды волновода.

Введение

Задача отыскания векторных мод волновода методом согласованных синусоидальных мод (ССМ-метод) [1-3, 5] состоит из нескольких этапов, среди которых наиболее вычислительно сложным является поиск констант распространения, связанный с решением нелинейной задачи на собственные значения матрицы большой размерности. В оригинальной работе по ССМ-методу [2] поиск констант распространения осуществлялся с помощью метода нахождения нулей (корней) некоторой функции, имеющей, в то же время, разрывы второго рода вблизи искомых нулей. Последнее обстоятельство приводит к пропуску нулей при их автоматическом обнаружении при разбиении области определения аргумента функции на конечное число отрезков.

В данной работе для поиска констант распространения мод волноводов применен итеративный метод Крылова решения нелинейной задачи на собственные значения [4]. Численно показана эффективность применения метода Крылова: найдено в два раза больше собственных значений при одинаковом разбиении на интервалы, чем обычным методом поиска нулей функции.

Основные положения ССМ-метода

Метод согласованных синусоидальных мод основан на представлении решения для пространственной моды в виде суперпозиции гармонических функций, которые являются собственными модами однородных частей волновода с прямоугольным сечением.

ССМ-метод позволяет решать как скалярную, так и векторную задачи отыскания мод волновода, что делает его среди прочих известных методов [6-9] универсальным средством исследования, применимым и для слабонаправляющих, и для фотонных волноводов.

Согласно методу согласованных синусоидальных мод неоднородное поперечное сечение волноводной структуры приближается системой прямоугольных областей с постоянным значением показателя преломления среды.

$$n(x, y) = n^{(n,m)} = const, \begin{cases} x^{(m)} \leq x < x^{(m+1)}, \\ y^{(n)} \leq y < y^{(n+1)}. \end{cases} \quad (1)$$

В каждой прямоугольной ячейке любая из продольных или поперечных компонент векторной моды аппроксимируется суперпозицией гармонических функций:

$$F^{(m)}(x, y) = \sum_{p=e,h} \sum_{k=1}^{\infty} [u_{pk}^{(m)}(x)F_{spk}^{(m)}(y) + \dot{u}_{pk}^{(m)}(x)F_{apk}^{(m)}(y)], \quad (2)$$

где F представляет собой любую из электрических или магнитных компонент поля моды, а внешняя сумма соответствует суммированию по поляризациям: ТЕ- $p = h$, ТМ- $p = e$. Рассмотрим подробнее локальные моды, входящие в выражение (2). Локальная x -мода имеет вид:

$$u_{pk}^{(m)}(x) = \left(\frac{k_0}{k_{pk}^{(m)}} \right)^2 u_{spk}^{(m,l)} \cos \left[k_{spk}^{(m)} (x - x^{(m)}) \right] + \frac{u_{apk}^{(m,l)}}{k_{spk}^{(m)}} \sin \left[k_{spk}^{(m)} (x - x^{(m)}) \right], \quad (3)$$

Величины $F_{sp}^{(m)}$ и $F_{ap}^{(m)}$, входящие в выражение (2), определяются через параметры волокна и локальные y -моды.

Локальные y -моды – есть непрерывные функции, заданные в каждой прямоугольной ячейке с номером n столбца разбиения с номером m выражениями:

$$\phi(y) = \phi_s^{(n,l)} \cos \left[k_y^{(n)} (y - y^{(n)}) \right] + \frac{\phi_a^{(n,l)}}{k_y^{(n)}} \sin \left[k_y^{(n)} (y - y^{(n)}) \right], \quad (4)$$

$$\psi(y) = \psi_s^{(n,l)} \cos \left[k_y^{(n)} (y - y^{(n)}) \right] + \frac{\psi_a^{(n,l)}}{k_y^{(n)}} \sin \left[k_y^{(n)} (y - y^{(n)}) \right], \quad (5)$$

Выражения (3)-(5) определяют форму зависимости локальных мод от соответствующих координат. Конкретизация этой зависимости производится подстановкой значений таких констант, чтобы удовлетворить граничным условиям и обеспечить минимальную невязку представления поля по формуле (2) на границах однородных областей.

Эти условия описываются нелинейной задачей на собственные значения относительно константы распространения k_z :

$$\Lambda(k_z)U = 0, \quad (6)$$

где матрица $\Lambda(k_z)$, элементы которой нелинейно зависят от параметра k_z , имеет достаточно сложную блочную структуру [1-3]. Размерность этой матрицы зависит от сложности системы однородных областей, описывающей сечение, и точности аппроксимации по формуле (2).

Метод Крылова решения нелинейных задач на собственные значения

На этапе решения нелинейной задачи на собственные значения (6) оригинальный метод согласованных синусоидальных мод [2] был модифицирован итеративным методом Крылова [4,5], позволяющим точно рассчитывать собственные значения даже для матриц большой размерности.

Интерполируя нелинейный матричный оператор $\Lambda(k_z)$ между двумя произвольными точками σ и μ следующим образом:

$$\Lambda(k_z) \approx \tilde{\Lambda}(k_z) = \frac{k_z - \sigma}{\mu - \sigma} \Lambda(\mu) + \frac{\mu - k_z}{\mu - \sigma} \Lambda(\sigma), \quad (7)$$

получаем линейную задачу на собственные значения:

$$\tilde{\Lambda}(k_z)U = 0, \quad (8)$$

которую можно представить в виде:

$$\left[\frac{\mu_{k+1} - \sigma}{\mu_k - \sigma} \Lambda(\mu_k) + \frac{\mu_k - \mu_{k+1}}{\mu_k - \sigma} \Lambda(\sigma) \right] U_k = 0, \quad (9)$$

где μ_{k+1} – приближенное значение искомого k_z , получаемое на очередном шаге итерации. Введем обозначение:

$$\theta = \frac{\mu_{k+1} - \mu_k}{\mu_{k+1} - \sigma}. \quad (10)$$

Тогда уравнение (9) можно представить как:

$$[\Lambda(\sigma)^{-1} \Lambda(\mu_k) - \theta I] U_k = 0. \quad (11)$$

Пусть μ_1 – некоторое начальное приближение для собственного числа k_z матрицы $\Lambda(k_z)$, пусть σ – некоторое фиксированное значение вблизи μ_1 , тогда итерационная процедура уточнения собственного значения k_z состоит в следующем. На k -м шаге решаем относительно θ :

$$\Lambda(\sigma)^{-1} \Lambda(\mu_k) U = \theta U, \quad (12)$$

рассчитываем новую оценку для собственного значения k_z :

$$\mu_{k+1} = \mu_k + \frac{\theta}{1 - \theta} (\mu_k - \sigma). \quad (13)$$

Итерации повторяются до тех пор, пока последовательность оценок $\{\mu_k\}$ не сойдется.

Таким образом, используя метод Крылова, можно отыскать собственные значения k_z задачи (6), для каждого из которых можно сформировать по формуле (2) поля компонент векторной моды.

Комбинированный метод решения нелинейной задачи на собственные значения

В работах [1, 2] рассматривался другой метод решения нелинейной задачи на собственные значения (6). Назовем его методом нулей функции. Суть метода состоит в следующем. Выберем произвольный вектор V с ненулевыми компонентами, например, единичный. Будем решать уравнение

$$\Lambda(k_z)U' = V \quad (14)$$

относительно U' . Для разных значений параметра k_z будем получать разные решения уравнения (14). Определим функцию

$$f(k_z) = 1/U'_p, \quad (15)$$

где U'_p есть p -ая компонента вектора U' . В окрестности искомого значения k_z функция $f(k_z)$ является непрерывной функцией скалярного аргумента, и ее нули есть искомые k_z .

Поиск нулей $f(k_z)$ осуществляется стандартными методами математического пакета Matlab.

Однако разрывы функции $f(k_z)$, которые возникают в местах нулей функции U'_p , существенно затрудняют поиск констант распространения методом нулей. Поэтому даже при достаточно малом шаге дискретизации, значительно меньшем необходимого для отделения соседних нулей функции $f(k_z)$, существует вероятность пропуска корней из-за разрывов расположенных вблизи нулей. Такая проблемная ситуация показана на рис. 1, где в районе корня $k_z = 6,9951$ мкм⁻¹ функция имеет разрыв.

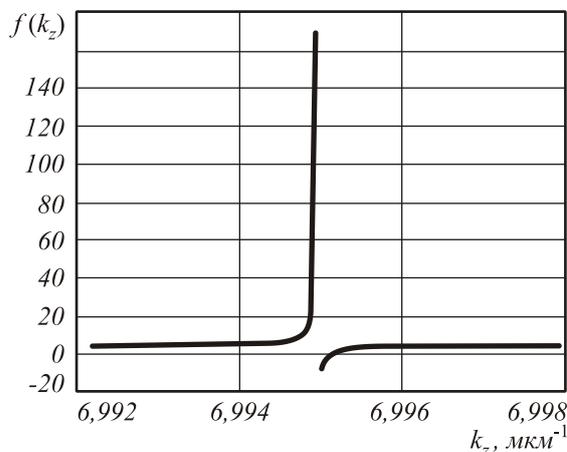


Рис. 1. Пример разрыва функции $f(k_z)$ вблизи нуля

Многочисленные разрывы также не позволяют воспользоваться статистическими оценками поведения функции на интервале, а уменьшение шага дискретизации увеличивает время, затрачиваемое на расчеты.

Рассмотрим возможности совместного использования метода (14)-(15) с методом Крылова (7)-(13). Пусть метод Крылова используется для индикации наличия корня на некотором интервале, где дальнейшее уточнение значений корней ведется при помощи функции (15). При заданной точности разделения корней, выберем шаг дискретизации в методе Крылова таким образом, чтобы минимизировать время расчета

$$t(h_k) = Mt_{ki} + Int_{si} \rightarrow \min . \tag{16}$$

В (16) $M = L/h_k$ – количество интервалов, анализируемых по методу Крылова, где:

L – длина интервала, на котором осуществляется поиск собственных значений,

t_{ki} – время на выполнение одной итерации метода Крылова,

I – предполагаемое число корней на интервале длины L ,

$n = h_k/h$ – число интервалов, рассматриваемых на интервале длины h_k при уточнении корней с шагом h ,

t_{si} – среднее время на выполнение одной итерации обнаружения нуля функции $f(k_z)$ на интервале длины h .

Оптимальным значением шага дискретизации h_k является значение:

$$h_k^{opt} = \sqrt{\frac{Lht_{ki}}{It_{si}}} . \tag{17}$$

Расчет констант распространения собственных мод фотонного волновода различными методами

Для модели фотонного волновода, показанной на рис. 2 проводился расчет констант распространения нескольких собственных мод.

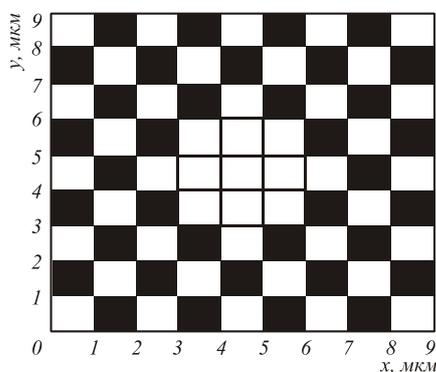


Рис. 2. Модель фотонного волновода светлым показаны области со значением показателя преломления $n^{(m,n)} = \sqrt{3}$, темным – $n^{(m,n)} = 1$

Для аппроксимации по формуле (2) использовалось 30 локальных мод, что, согласно исследованию, проведенному в работе [1], достаточно для получения оценок констант распространения мод с абсолютной ошибкой не более 10^{-4} .

В соответствии с ССМ-методом была получена задача (6), где элементы матрицы $\Lambda(k_z)$ нелинейно зависят от параметра k_z , искомые значения которого обращают $\Lambda(k_z)$ в вырожденную числовую матрицу.

Для заданной структуры сечения и количества локальных мод равного 30, размерность матрицы $\Lambda(k_z)$ составила 480×480 .

На интервале единичной длины поиск констант распространения осуществлялся тремя способами: методом определения нулей функции (15), методом Крылова и комбинированным методом с оптимальным шагом дискретизации.

Диаграмма, показывающая количество обнаруженных с точностью 10^{-4} корней для каждого метода при различных значениях точности разделения корней h , приводится на рис. 3.

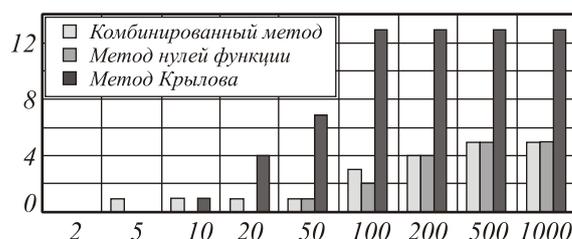


Рис. 3. Диаграмма зависимости количества найденных констант распространения нескольких первых мод фотонного волновода от величины обратно пропорциональной точности разделения корней $1/h$

Как следует из диаграммы, метод Крылова существенно лучше двух других обнаруживает искомые значения параметра k_z , но при этом, как видно из графика на рис. 4, является самым затратным по времени при заданном значении h . Так, при расчете 13 корней методом Крылова с $h = 10^{-3}$ на персональном компьютере Intel Pentium IV с частотой 3,2 ГГц и оперативной памятью 2 Гб было затрачено около 3 часов. Заметим (рис. 3), что метод Крылова находил те же 13 корней, но за время в 8 раз меньшее. В тоже время метод нулей функции и комбинированный метод имеют примерно одинаковую частоту обнаружения корней. Незначительное преимущество комбинированного метода в области малой точности разделения корней объясняется случайно лучшим позиционированием интервала длины h , на котором производятся вторичные итерации метода нулей функции, относительно корня. При этом комбинированный метод является более эффективным по времени, чем метод нулей функции, как следует из рис. 4.

Заключение

В работе численно показано, что итеративный метод Крылова решения нелинейной задачи на собственные значения в несколько раз эффективней (находит больше собственных значений при одинаковом разбиении на интервалы), чем обычный метод поиска нулей функции и даже, чем комбинированный метод, сочетающий индикацию методом Крылова наличия корня на интервале с поиском нулей функции на этом интервале. Сама нелинейная задача на собственные значения возникает при расчете мод волновода методом согласованных синусоидальных мод.

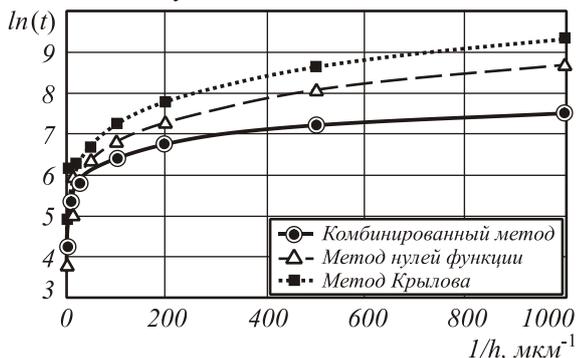


Рис. 4. График зависимости натурального логарифма времени в секундах, затраченного на расчет нулей, от величины обратно пропорциональной точности разделения корней $1/h$

Благодарности

Работа выполнена при поддержке российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (грант CRDF RUX0-014-SA-06), а также грантов РФФИ 05-08-50298 и 07-07-97601.

исследования и высшее образование» (грант CRDF RUX0-014-SA-06), а также грантов РФФИ 05-08-50298 и 07-07-97601.

Литература

1. Котляр В.В., Шуюпова Я.О. Расчет пространственных мод оптических волноводов с неоднородным поперечным сечением методом согласованных синусоидальных мод // Компьютерная оптика, 2003. № 25 P. 41-48.
2. Sudbo A.S. Film mode matching: a versatile method for mode film calculations in dielectric waveguides // Pure Appl. Opt., 1993. V. 2. P. 211-233.
3. Sudbo A.S. Improved formulation of the film mode matching method for mode film calculations in dielectric waveguides // Pure Appl. Opt., 1994. V. 3. Pp. 381-388.
4. Ruhe A., Zapiski Nauchnih Seminarov, Steklov Mathematical Institute, 2000. Pp.176 – 180.
5. Котляр В.В., Шуюпова Я.О. Расчет векторных мод оптического волновода // Компьютерная оптика, 2005. № 27 P. 89-94
6. Hadley G.R., Smith R.E. Full-vector waveguide modeling using an iterative finite-difference method with transparent boundary conditions // J. Lightwave Techn., 1995. V. 13. N. 3. P. 465-469.
7. Rogge U., Pregla R. Method of lines for the analysis of dielectric waveguides // J. Lightwave Techn., 1993. V. 11. P. 2015-2020.
8. Sztafka G., Nogling H.P. Bidirectional eigenmode propagation for large refractive index steps // IEEE Photonics Techn. Lett., 1993. V. 5. P. 554-557.
9. Rahman B.M.A., Davies J.B. Finite-Elements Solution of integrated optical waveguides // J. Lightwave Techn., 1984. V. 2. P. 682-687.

FINDING THE PROPAGATION CONSTANTS OF THE PHOTONIC CRYSTAL WAVEGUIDE MODES BY THE KRYLOV'S METHOD

Ya.O. Shuyupova^{1,2}, V.V. Kotlyar^{1,2}

¹Image Processing Systems Institute of the RAS,

²Samara State Aerospace University (SSAU)

Abstract

We numerically investigate the effectiveness of the Krylov's method in solving the nonlinear eigenvalue problem when calculating eigenmode propagation constants for photonic waveguides. A matrix for solving this nonlinear eigenvalue problem has dimensions of $N \times N$, where N is proportional to the number of local sinusoidal modes which allow the waveguide eigenmodes to be approximated.

Key words: photonic crystal waveguide, propagation constants, Krylov's method

Citation: Shuyupova YaO, Kotlyar VV. Finding the propagation constants of the photonic crystal waveguide modes by the Krylov's method [In Russian]. Computer Optics 2007; 31(1): 27-30.

Acknowledgements: The work was partly supported by the Russian-American Basic Research and Higher Education Program (grant CRDF RUX0-014-SA-06) and by the RFBR grants Nos. 05-08-50298 and 07-07-97601.

References:

- [1] Kotlyar VV, Shuyupova YaO. Calculation of the spatial optical waveguide modes with inhomogeneous cross-sections using the sinusoidal mode matching method [In Russian]. Computer Optics 2003; 25: 41-48.
- [2] Sudbo AS. Film mode matching: a versatile method for mode film calculations in dielectric waveguides. Pure Appl. Opt. 1993; 2: 211-233.
- [3] Sudbo AS. Improved formulation of the film mode matching method for mode film calculations in dielectric waveguides. Pure Appl. Opt. 1994; 3: 381-388.
- [4] Ruhe A. Zapiski Nauchnih Seminarov. Steklov Mathematical Institute 2000: 176-180.

- [5] Kotlyar VV, Shuyupova YaO. Calculation of the vector modes of an optical waveguide [In Russian]. *Computer Optics* 2005; 27: 89-94
- [6] Hadley GR, Smith RE. Full-vector waveguide modeling using an iterative finite-difference method with transparent boundary conditions. *J. Lightwave Techn.* 1995; 13(3): 465-469.
- [7] Rogge U, Pregla R. Method of lines for the analysis of dielectric waveguides. *J. Lightwave Techn.* 1993; 11: 2015-2020.
- [8] Sztafka G, Nogling HP. Bidirectional eigenmode propagation for large refractive index steps. *IEEE Photonics Techn. Lett.* 1993; 5: 554-557.
- [9] Rahman BMA, Davies JB. Finite-Elements Solution of integrated optical waveguides. *J. Lightwave Techn.* 1984; 2: 682-687.