

ВРАЩЕНИЕ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ, НЕ ОБЛАДАЮЩИХ ОРБИТАЛЬНЫМ УГЛОВЫМ МОМЕНТОМ

В.В. Котляр^{1,2}, С.Н. Хонина^{1,2}, Р.В. Скиданов^{1,2}, В.А. Соифер^{1,2}

¹Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия,

²Самарский государственный аэрокосмический университет им. С.П. Королева, Самара, Россия

Показано, что среди многомодовых вращающихся лазерных пучков, комплексная амплитуда которых может быть представлена как линейная суперпозиция мод Лагерра-Гаусса с определенными номерами, имеются световые пучки с нулевым орбитальным угловым моментом. Также рассмотрены примеры вращающихся лазерных пучков с нулевым орбитальным угловым моментом, представленных в виде суперпозиции мод Бесселя и гипергеометрических мод. Впервые с помощью жидко-кристаллического микродисплея был сгенерирован вращающийся бесселевый пучок с нулевым орбитальным угловым моментом.

В последнее время возрос интерес к вращающимся модовым лазерным пучкам Лагерра-Гаусса (ЛГ) в свободном пространстве [1] или нелинейной среде [2], а так же к пустым (hollow) лазерным пучкам [3], эллиптическим пучкам Бесселя [4] и оптическим вихрям с эллиптической симметрией [5]. Вращение лазерных многомодовых пучков впервые рассматривалось в [6-8]. Известно также, что моды ЛГ, Бесселя и другие обладают орбитальным угловым моментом (ОУМ) [9]. Микрообъекты, помещенные в поперечное сечение таких пучков, будут совершать вращения по замкнутой траектории типа светового кольца [10].

Однако остается не выясненным вопрос о связи между ОУМ лазерного пучка и возможностью вращения распределения интенсивности в его поперечном сечении. Далее мы покажем, что из множества вращающихся световых пучков, комплексную амплитуду которых можно представить как линейную суперпозицию мод ЛГ с определенными номерами (n, m) , есть световые пучки с нулевым ОУМ. Также мы приведем примеры вращающихся световых пучков с нулевым ОУМ, которые являются суперпозицией мод Бесселя и Гипергеометрических мод.

Любое параксиальное световое поле, описываемое комплексной амплитудой $E(x, y)$, при $z=0$ можно разложить в ряд по базису мод ЛГ:

$$E(x, y) = \sum_{n, m} C(n, m) \Psi_{nm}(x, y), \quad (1)$$

где $C(n, m)$ – комплексные коэффициенты с номерами n и m , причем m – азимутальный индекс,

$$\Psi_{nm}(x, y) = a^{-1} \sqrt{\frac{n!}{(n+|m|)!}} \left(\frac{r}{a}\right)^{|m|} \times L_n^{|m|} \left(\frac{r^2}{a^2}\right) \exp\left[-\frac{r^2}{2a^2} + im\varphi\right], \quad (2)$$

где $a = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$, ω_0 – радиус перетяжки Гауссового пучка, (r, φ) – полярные координаты, $L_n^m(x)$ – присоединенные многочлены Лагерра. В [7] приведено условие на номера мод в уравнении (1), при которых интенсивность в поперечном сечении многомодового пучка ЛГ будет вращаться при его распространении вдоль оси z :

$$B = \frac{2(n-n') + |m| - |m'|}{m - m'} = \text{const}, \quad (3)$$

где (n, m) и (n', m') номера двух любых мод из линейной комбинации (1). Постоянная величина $B/4$ равна числу оборотов, которое совершает многомодовый пучок ЛГ от $z=0$ до $z=\infty$. Причем половину этих оборотов пучок совершит на расстоянии от $z=0$ до $z=z_0$, где $z_0 = \frac{k\omega_0^2}{2}$ – расстояние Рэлея, $k=2\pi/\lambda$ – волновое число света. В [11] получено уравнение для проекции на ось z линейной плотности орбитального углового момента линейно поляризованного лазерного пучка на единицу мощности, состоящего из суперпозиции мод ГЛ (1):

$$wJ_z = \frac{\sum_{n, m} m |C(n, m)|^2}{\sum_{n, m} |C(n, m)|^2}, \quad (4)$$

где w – циклическая частота света. Из уравнений (1)-(4) следует:

- 1) фазы коэффициентов $C(n, m)$ не влияют на значения B и J_z , но влияют на вид интенсивности светового поля из уравнения (1) $I(x, y, z) = |E(x, y, z)|^2$;
- 2) число оборотов согласно уравнению (3) при вращении пучка (1) зависит только от комбинации номеров мод (n, m) и не зависит от выбора значений коэффициентов $C(n, m)$;
- 3) ОУМ (4) определяется только азимутальными номерами m мод ЛГ и значениями модулей коэффициентов $|C(n, m)|$ и не зависит от выбора номеров n . Поэтому с помощью подходящего выбора комбинации номеров (n, m) и модулей коэффициентов $|C(n, m)|$ можно реализовать различные варианты сочетаний значений B и J_z .

На рис. 1 приведены численные примеры. В первой строке показаны распределения интенсивности 4-модового пучка ЛГ с коэффициентами $C(12, 0)=1$, $C(11, 2)=1$, $C(10, -4)=i$, $C(9, 6)=1$. Такой пучок не вращается ($B=0$), но имеет положительный ОУМ ($wJ_z=1$).

Во второй строке рис. 1 показаны распределения интенсивности 5-ти модового пучка ЛГ с коэффици-

ентами $C(2,2)=i$, $C(3,1)=1$, $C(4,0)=-1$, $C(4,-2)=1$, $C(4,-4)=1$. Такой пучок вращается влево ($B=-1$) и имеет отрицательный ОУМ ($wJ_z=-3/5$).

В третьей строке рис. 1 показаны сечения интенсивности 3-х модового пучка ГЛ с коэффициентами $C(10,-2)=1$, $C(8,0)=1$, $C(4,2)=1$. Этот пучок вращается влево ($B=-3$), но не обладает ОУМ ($wJ_z=0$).

И в четвертой строке рис.1 показан 2-х модовый пучок ЛГ с коэффициентами $C(1,-1)=1$, $C(9,1)=1$. Этот пучок вращается вправо ($B=8$) и также не обладает ОУМ ($wJ_z=0$). Параметры моделирования: длина волны света $\lambda=633$ нм; радиус перетяжки фундаментальной моды ЛГ $\omega_0=0,1$ мм; размер каждой картинки на рис. 1 – 1мм×1мм; расстояние, на котором рассчитывались интенсивности на рис. 1 (слева направо) $z=30$ мм, $z=40$ мм, $z=50$ мм.

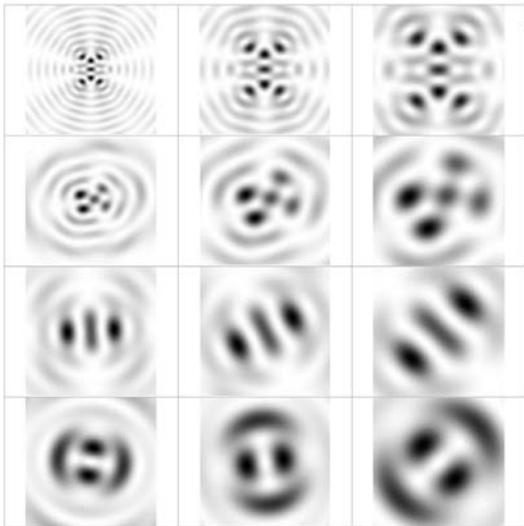


Рис. 1. Распределения интенсивности (негатив) в поперечном сечении многомодовых пучков ЛГ, рассчитанных на расстояниях $z=30$ мм (1 столбец), $z=40$ мм (2 столбец), $z=50$ мм (3 столбец) для: 4-х модового (1 строка), 5-ти модового (2-строка), 3-х модового (3 строка) и 2-х модового (4 строка)

Для суперпозиции мод Бесселя (1) вместо выражения (2) запишем:

$$\Psi_{nm}(x, y) = \left[\sqrt{\pi R} J'_m(\gamma_n) \right]^{-1} \times J_m(k\alpha_n r) \exp(im\varphi), \tag{5}$$

где $\alpha_n = \cos \theta_n = \frac{\gamma_n}{kR}$, θ_n – угол наклона к оси z конической волны, $J_m(x)$, $J'_m(x)$ – функция Бесселя и ее производная, γ_n – корень функции Бесселя. Моды Бесселя (5) нормированы на единицу в круге радиуса R . Лазерный пучок (1), состоящий из мод Бесселя будет вращаться [12] на конечном расстоянии от исходной плоскости ($z=0$) при условии, что номера мод (n, m), входящих в суперпозицию (1) будут удовлетворять условию:

$$B_1 = \frac{\alpha_n^2 - \alpha_{n'}^2}{m - m'} = const. \tag{6}$$

Число $B_1/2$ равно числу оборотов, которые совершает интенсивность в сечении пучка на расстоянии равном одной длине волны λ . Проекция на ось z линейной плотности орбитального углового момента лазерного пучка на единицу мощности, состоящего из суперпозиции мод Бесселя рассчитывается с помощью уравнения (4). Из уравнений (4) и (6) следует, что подбором номеров (n, m) можно сформировать пучки Бесселя, обладающие вращением интенсивности в поперечном сечении ($B_1 \neq 0$), но имеющие нулевой орбитальный момент ($J_z=0$). На рис. 2 показаны распределения интенсивности 2-модового пучка Бесселя с коэффициентами $C(\alpha_5,3)=1$ и $C(\alpha_{10},-3)=1$. Такой пучок вращается влево ($B_1 = -12,5 \times 10^{-8}$) и не обладает орбитальным моментом ($J_z=0$). Параметры расчета: $\lambda=633$ нм, $\alpha_5=5 \times 10^{-4}$, $\alpha_{10}=10 \times 10^{-4}$, размер картин дифракции на рис.2 – 5×5 мм.

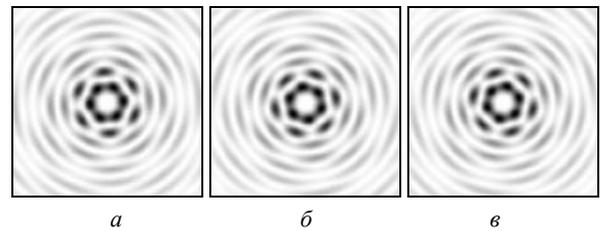


Рис. 2. Распределения интенсивности в сечении 2-модового пучка Бесселя, рассчитанные на разных расстояниях z от начальной плоскости: 1 м (а), 2 м (б) и 3 м (в)

В [13] приведен ортогональный базис функций, удовлетворяющих параксиальному уравнению распространения. Эти функции можно рассматривать как еще один тип параксиальных световых мод свободного пространства. Мы называем их гипергеометрические (ГГ) моды, так как они описываются через гипергеометрические функции. Как и моды Бесселя ГГ-моды обладают бесконечной энергией, и поэтому на практике их можно сформировать с помощью амплитудно-фазового фильтра или цифровой голограммы с кольцевой апертурой. Поэтому ГГ-моды будут сохранять свои модовые свойства только на конечном расстоянии вдоль оптической оси.

Для суперпозиции ГГ-мод (1) вместо (2) и (5) запишем ($R \gg 1$):

$$\Psi_{nm}(x, y) = (2\pi r^2 \ln R)^{-\frac{1}{2}} \times \exp\left(i \frac{\pi n}{\ln R} \ln r + im\varphi\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{7}$$

Эти моды будут ортонормированны в кольце с радиусами R и R^{-1} :

$$\int_{R^{-1}}^R \Psi_{nm}(r, \varphi) \Psi_{n'm'}^*(r, \varphi) r dr d\varphi = \delta_{nn'} \delta_{mm'}, \tag{8}$$

где $\delta_{nn'}$ – символ Кронекера. В зоне дифракции

Френеля мода (7) имеет вид ($R \rightarrow \infty$, $x = \frac{kr^2}{2z}$):

$$\Psi_{mm}(r, \varphi, z) = \frac{1}{2\pi|m|!} \left(\frac{2z}{k}\right)^{\frac{i\gamma-1}{2}} \times \exp\left[\frac{i\pi}{4}(-|m|+i\gamma-1)+ix+im\varphi\right] x^{\frac{|m|}{2}} \times \Gamma\left(\frac{|m|+i\gamma+1}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{|m|+i\gamma+1}{2}, |m|+1; -ix\right), \quad (9)$$

где $\gamma = \frac{\pi n}{\ln R}$, ${}_1F_1(a, b; x)$ – конфлюэнтная гипергеометрическая функция, $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Условие вращения для многомодового ГГ-пучка имеет вид:

$$B_2 = \frac{n-n'}{m-m'} = \text{const}, \quad (10)$$

где $B_2/4$ – число оборотов, которые совершит пучок (1) с модами (7) в промежутке от $z=1$ до $z=R$. Заметим, что в промежутке от $z=R^{-1}$ до $z=1$ ГГ-пучок совершит $B_2/4$ оборотов в обратную сторону.

Проекция на ось z линейной плотности орбитального углового момента лазерного пучка (1) с модами (7) на единицу мощности описывается по-прежнему выражением (4). Поэтому, используя условие вращения (10) и выражение для орбитального углового момента (4), можно сформировать лазерный пучок, у которого, например, будет вращаться поперечное распределение интенсивности и будет нулевой орбитальный момент. На рис. 3 показаны распределения интенсивности двухмодового ГГ-пучка с коэффициентами $C(0,2)=1$ и $C(3,-2)=1$. Такой пучок вращается влево ($B_2=-0,75$) и не обладает орбитальным момен-

том ($J_z=0$). Параметры расчета: $\lambda=633$ нм, $\gamma_0=0$, $\gamma_3=13,597$, размер картин дифракции на рис. 3 – 4×4 мм.

Заметим, что в [14] исследован частный случай ГГ-мод при $\gamma=-i$, которые формируются с помощью спиральной фазовой пластинки с пропусканием $\exp(im\varphi)$. Эти моды обладают одинаковыми фазовыми скоростями, и поэтому их линейная комбинация (1) не может вращаться при распространении. Это также следует из условия вращения (10) при $n=n'=\text{const}$ ($B_2=0$).

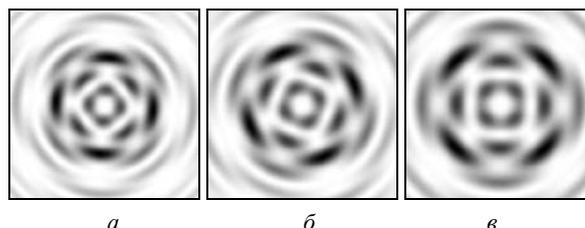


Рис. 3. Распределения интенсивности в сечении двухмодового ГГ-пучка, рассчитанные на разных расстояниях z от начальной плоскости: 1,5 м (а), 2 м (б) и 2,5 м (в)

В заключении приведем некоторые экспериментальные данные. При проведении экспериментов использовался бинарный жидко-кристаллический микродисплей CRL Opto SXGA H1 с разрешением 1280×1024 . На рис. 4 показана бинарная фаза, предназначенная для формирования двухмодового пучка Бесселя формирования светового поля, представляющего собой суперпозицию двух мод Бесселя с номерами $C(\alpha_1, 3)=C(\alpha_2, -3)=1$ ($\alpha_1=1,4 \times 10^4$, $\alpha_2=7 \times 10^3$). Размер сформированной фазы составил 7×7 мм.

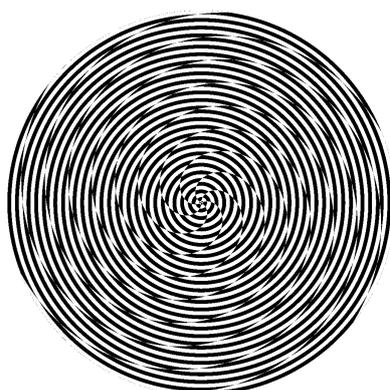


Рис. 4. Бинарная фазовая картина, сформированная на микродисплее

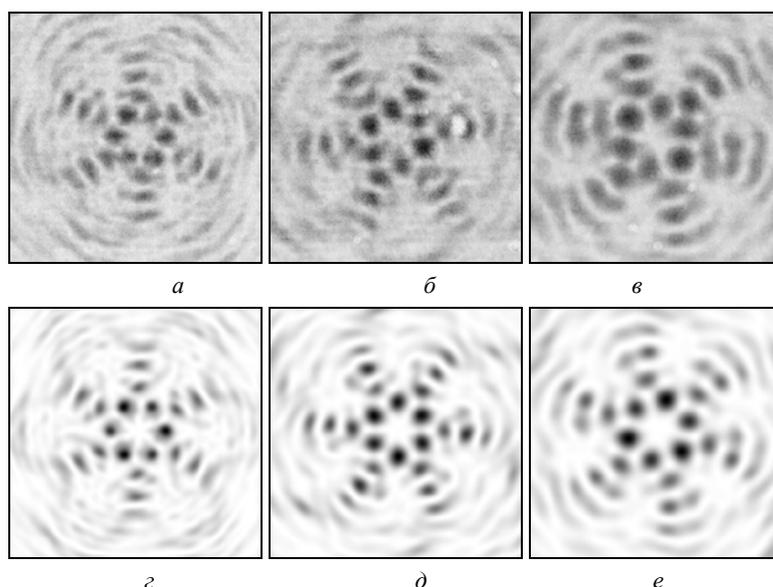


Рис. 5. Картина дифракции вращающегося двухмодового пучка Бесселя на разных расстояниях от микродисплея (а, б, в – эксперимент, г, д, е – теория): $z=720$ мм (а, г); $z=735$ мм (б, д); $z=765$ мм (в, е)

Распределения интенсивности в сечении одного из двух сформированных пучков, измеренные на разных расстояниях от микродисплея с помощью CCD-камеры, показаны на рис. 5.

Благодарность

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (грант CRDF RUXO-014-SA-06), а также гранта РФФИ 05-08-50298 и 07-07-97600, и при поддержке «Фонда содействия отечественной науке».

Литература

1. A. Y. Bekshaev, M. S. Soskin, and M. V. Vasnetsov, "Centrifugal transformation of the transverse structure of freely propagating paraxial light beams," *Opt. Lett.*, v. 31, no.6, pp. 694-696 (2006).
2. S. Lopez-Aguayo, A.S. Desyatnikov, Y.S. Kivshar, S. Skupin, W. Krolikowski, O.Bang, "Stable rotating dipole solitons in nonlocal optical media", *Opt. Lett.*, v. 31, no. 8, pp. 1100-1102 (2006).
3. F. K. Fatemi, M. Bashkansky, "Generation of hollow beams by using a binary spatial light modulator," *Opt. Lett.*, v. 31, no. 7, pp. 864-866 (2006).
4. R. Chakraborty and A. Ghosh, "Generation of an elliptic Bessel beam," *Opt. Lett.*, v. 31, no.1, pp. 38-40 (2006)
5. M. R. Dennis, "Rows of optical vortices from elliptically perturbing a high-order beam," *Opt. Lett.*, v. 31, no. 9, pp. 1325-1327 (2006).
6. E. Abramochkin, V. Volostnikov "Spiral-type beams", *Opt. Commun.*, v.102, no. 3-4, pp. 336-350 (1993).
7. Y.Y. Schechner, R. Piestun, J. Shamir, "Wave propagation with rotating intensity distributions", *Phys. Rev. E*, v. 54, no.1, R50-R53 (1996).
8. V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, S.N. Khonina "Rotation of multimode Gauss-Laguerre light beams in free space" *Techn. Phys. Lett.*, v. 23, no. 9, pp. 657-658 (1997).
9. L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, J.P. Woerdman "Orbital angular momentum of light and the transformations of Laguerre-Gaussian laser modes", *Phys. Rev. A*, v. 45, no. 11, pp. 8185-8189 (1992).
10. H. He, M.E.J. Friese, W.R. Hechenberg, H.Rubinztain-Dunlop "Direct observation of transfer of angular momentum to absorptive particles from a laser beam with a phase singularity", *Phys. Rev. Lett.*, v.75, no. 5, pp. 826-829 (1995).
11. S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, P. Paakkonen, J. Turunen "Measuring the light field orbital angular momentum using DOE", *Optical Memory and Neural Networks*, v.10, no.4, pp.241-255 (2001).
12. V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer "An algorithm for the generation of laser beams with longitudinal periodicity: rotating images", *J. Mod. Opt.*, v.44, no.7, p.1409-1411 (1997).
13. W. Miller, Jr. *Symmetry and Separation of Variables*, Addison-Wesley Pub. Com., MA, 1977
14. V.V. Kotlyar, A.A. Almazov, S. N. Khonina, V.A. Soifer, H. Elfstrom and J. Turunen, "Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate", *J. Opt. Soc. Am. A*, v. 22, no. 5, p.849-861 (2005).

ROTATION OF LASER BEAMS WITH ZERO OF THE ORBITAL ANGULAR MOMENTUM

V.V. Kotlyar^{1,2}, S.N. Khonina^{1,2}, R.V. Skidanov^{1,2}, V.A. Soifer^{1,2}

¹Image Processing Systems Institute of the RAS, Samara, Russia,

²Samara State Aerospace University (SSAU), Samara, Russia

Abstract:

It is shown that among multimode rotating laser beams, whereby the complex amplitude can be represented as a linear superposition of Laguerre-Gauss modes with particular numbers, there are some light beams with zero of the orbital angular momentum. Besides, we look into examples of rotating laser beams with the zero orbital angular momentum represented as a superposition of Bessel modes and hypergeometric modes. A rotating Bessel beam with the zero orbital angular momentum was first generated by a liquid crystal microdisplay.

Keywords: orbital angular momentum (OAM), Laguerre-Gauss modes, Bessel modes, hypergeometric modes, superposition, optical rotation with zero OAM

Citation: Kotlyar VV, Khonina SN, Skidanov RV, Soifer VA. Rotation of laser beams with zero of the orbital angular momentum [In Russian]. *Computer Optics* 2007; 31(1): 35-38.

Acknowledgements: The work was financially supported by the Russian-American Basic Research and Higher Education Program (grant CRDF RUXO-014-SA-06), the RFBR grants Nos. 05-08-50298 and 07-07-97600, and by the Russian Science Support Foundation.

References:

- [1] Bekshaev AY, Soskin MS, Vasnetsov MV. Centrifugal transformation of the transverse structure of freely propagating paraxial light beams. *Opt. Lett.* 2006; 31(6): 694-696.
- [2] Lopez-Aguayo S, Desyatnikov AS, Kivshar YS, Skupin S, Krolikowski W, Bang O. Stable rotating dipole solitons in nonlocal optical media. *Opt. Lett.* 2006; 31(8): 1100-1102.
- [3] Fatemi FK, Bashkansky M. Generation of hollow beams by using a binary spatial light modulator. *Opt. Lett.* 2006; 31(7): 864-866.
- [4] Chakraborty R, Ghosh A. Generation of an elliptic Bessel beam. *Opt. Lett.* 2006; 31(1): 38-40.
- [5] Dennis MR. Rows of optical vortices from elliptically perturbing a high-order beam. *Opt. Lett.* 2006; 31(9): 1325-1327.
- [6] Abramochkin E, Volostnikov V. Spiral-type beams. *Opt. Commun.* 1993; 102(3-4): 336-350.
- [7] Schechner YY, Piestun R, Shamir J. Wave propagation with rotating intensity distributions. *Phys. Rev. E* 1996; 54(1): R50-R53.
- [8] Kotlyar VV, Soifer VA, Khonina SN. Rotation of multimode Gauss-Laguerre light beams in free space. *Techn. Phys. Lett.* 1997; 23(9): 657-658.

- [9] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular momentum of light and the transformations of Laguerre-Gaussian laser modes. *Phys. Rev. A* 1992; 45(11): 8185-8189.
- [10] He H, Friese MEJ, Hechenberg WR, Rubinztein-Dunlop H. Direct observation of transfer of angular momentum to absorptive particles from a laser beam with a phase singularity. *Phys. Rev. Lett.* 1995; 75(5): 826- 829.
- [11] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Paakkonen P, Turunen J. Measuring the light field orbital angular momentum using DOE. *Optical Memory and Neural Networks* 2001; 10(4): 241-255.
- [12] Kotlyar VV, Khonina SN, Soifer VA. An algorithm for the generation of laser beams with longitudinal periodicity: rotating images. *J. Mod. Opt.* 1997; 44(7): 1409-141.
- [13] Miller WJr. *Symmetry and Separation of Variables*. Addison-Wesley Pub. Com., MA, 1977.
- [14] Kotlyar VV, Almazov AA, Khonina SN, Soifer VA, Elfstrom H, Turunen J. Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate. *J. Opt. Soc. Am. A* 2005; 22(5): 849-861.