

ДИФРАКЦИЯ СВЕТА НА ПРЯМОУГОЛЬНОМ ОТВЕРСТИИ СО СТАТИСТИЧЕСКИ НЕРОВНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В.А. Куделькин^{1,2,3}, Ю.Л. Ратис^{1,2,3}

¹Консорциум «Интегра-С», Самара, Россия,

²Самарский государственный аэрокосмический университет, Самара, Россия,

³Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия

Аннотация

В работе исследовано влияние нелинейности функции отклика и дифракционных поправок на интенсивность сигнала, выдаваемого оптикоэлектронным датчиком перемещений. Построены вычислительно эффективные аналитические выражения для расчета интенсивности светового потока. Показано, что учет дифракционных явлений позволяет существенно улучшить точность датчиковой аппаратуры.

Введение

При изготовлении и эксплуатации прецизионных оптикоэлектронных и электронно-оптических датчиков перемещений необходимо корректно оценивать нелинейность функции отклика и систематическую приборную погрешность измерений, возникающую из-за дифракции и несовершенства технологии изготовления датчиков [5, 7, 8, 9, 10].

Целью настоящей работы является оценка совместного влияния этих факторов на интенсивность регистрируемого сигнала в случае, когда диафрагма фотоприемника имеет прямоугольную форму.

Для этого рассмотрим задачу о дифракции плоской волны на отверстии, имеющем форму, близкую к прямоугольной. Это означает, что если прямоугольное отверстие имеет ширину a и высоту b , то для квазипрямоугольного отверстия со статистически неровной границей выполняются соотношения:

$$\left| \frac{\delta a}{a} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\delta b}{b} \right| \ll 1, \quad (1)$$

где $\delta a = \delta a(y)$ и $\delta b = \delta b(x)$ – случайные функции.

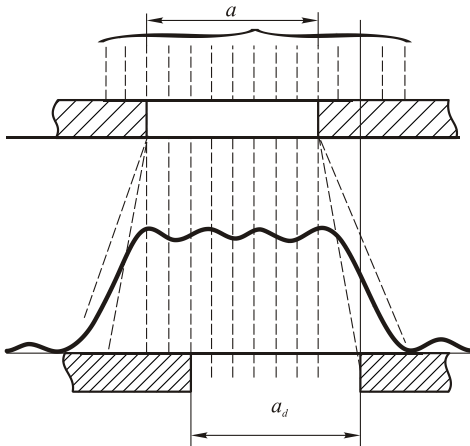


Рис. 1. Схема регистрации дифрагированного света

В случае дифракции плоской волны на отверстии произвольной формы амплитуда дифрагированной волны U_p в точке наблюдения P равна [1]:

$$U_p = \int \frac{kU}{2\pi i R} e^{ikR} \cdot df_n, \quad (2)$$

где U – амплитуда падающей волны в окрестности отверстия, k – модуль волнового вектора падающей волны, df – площадь участка волновой поверхности, df_n – проекция вектора \vec{df} на плоскость, перпендикулярную направлению падающего луча света¹, а абсолютная величина радиус-вектора R в формуле (2) выражается через координаты (X, Y, Z) точки наблюдения P и координаты точек волновой поверхности (x, y, z) :

$$R = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2}. \quad (3)$$

Соотношения (2)-(3) являются основой для формальной постановки последующих задач.

Дифракция на прямоугольном отверстии

Пусть световая волна падает по нормали на идеальное прямоугольное отверстие в плоском экране, лежащем в плоскости xy . Если отверстие имеет ширину a и высоту b , то координаты точек волновой поверхности удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} -a/2 \leq x \leq a/2, \\ -b/2 \leq y \leq b/2, \\ z = 0, \end{cases} \quad (4)$$

В этом случае амплитуда U падающей волны в формуле (2) одинакова для всех точек волновой поверхности, лежащей в плоскости экрана ($U = U_0 = const$), соотношение (2) приобретает вид:

$$U_p = \frac{kU_0}{2\pi i} \cdot \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \cdot \frac{e^{ik\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + Z^2}}}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + Z^2}}, \quad (5)$$

и амплитуда дифрагированной волны вычисляется элементарно²:

¹ Вектор \vec{df} направлен вдоль внешней нормали к волновой поверхности.

² Обозначения и определения см. в приложении.

$$U_p(X, Y, Z) \approx \frac{U_0 \cdot e^{ikz}}{2i} \times \left\{ E_F \left(\sqrt{\frac{k}{\pi Z}} \left(\frac{a}{2} - X \right) \right) + E_F \left(\sqrt{\frac{k}{\pi Z}} \left(\frac{a}{2} + X \right) \right) \right\} \times \left\{ E_F \left(\sqrt{\frac{k}{\pi Z}} \left(\frac{b}{2} - Y \right) \right) + E_F \left(\sqrt{\frac{k}{\pi Z}} \left(\frac{b}{2} + Y \right) \right) \right\}. \quad (6)$$

При переходе от соотношения (5) к выражению (6) мы использовали стандартное разложение величины R по малому параметру теории дифракции:

$$\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + Z^2} \approx Z + \frac{1}{2} \frac{(X-x)^2 + (Y-y)^2}{Z}. \quad (7)$$

В случае наклонного падения волны амплитуда $U = U(x, y)$ зависит от координат точек волновой поверхности, и ее нельзя выносить из-под знака интеграла. В частности, если на отверстии в экране дифрагирует плоская волна, то

$$U = U_0 \cdot \exp(i\vec{k}\vec{r}), \quad (8)$$

амплитуда световой волны в точке наблюдения P имеет вид:

$$U_p \approx \frac{kU_0 \cdot e^{ikz}}{2\pi i Z} \times \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \cdot \exp \left\{ i \left[k_x x + k \cdot \frac{(X-x)^2}{2Z} \right] \right\} \times \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \cdot \exp \left\{ i \left[k_y y + k \cdot \frac{(Y-y)^2}{2Z} \right] \right\}, \quad (9)$$

и выражается через интегралы Френеля:

$$U_p(X, Y, Z) = \frac{U_0}{2i} \cdot e^{i \left(k_x X + k_y Y + kZ - \frac{(k_x^2 + k_y^2)Z}{2k} \right)} \times \left[E_F(\tilde{X}_+) + E_F(\tilde{X}_-) \right] \cdot \left[E_F(\tilde{Y}_+) + E_F(\tilde{Y}_-) \right], \quad (10)$$

где

$$\begin{cases} \tilde{X}_{\pm} = \sqrt{\frac{k}{\pi Z}} \left[\frac{a}{2} \pm \left(X - \frac{k_x Z}{k} \right) \right], \\ \tilde{Y}_{\pm} = \sqrt{\frac{k}{\pi Z}} \left[\frac{b}{2} \pm \left(Y - \frac{k_y Z}{k} \right) \right]. \end{cases} \quad (11)$$

В сферической системе координат

$$\begin{cases} k_x = k \sin \theta \cos \varphi, \\ k_y = k \sin \theta \sin \varphi, \\ k_z = k \cos \theta, \end{cases} \quad (12)$$

где θ – угол между направлением луча и плоскостью – xy , в которой лежит экран с прямоугольным

отверстием. Поэтому $k_x^2 + k_y^2 = k^2 \sin^2 \theta$, и при $\theta \ll 1$ выполняется соотношение:

$$1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \approx \cos \theta. \quad (13)$$

Следовательно, для случая малых углов падения световой волны на экран ($\theta \ll 1$) с учетом соотношения (13) и того, что $k_z/k = \cos \theta$, получаем:

$$k_x X + k_y Y + kZ - \frac{(k_x^2 + k_y^2)Z}{2k} \approx \vec{k}\vec{R}. \quad (14)$$

Таким образом, в приближении малых углов падения световой волны ($\theta \ll 1$) амплитуда дифрагированной волны имеет вид:

$$U_p(X, Y, Z) = \frac{U_0}{2i} \cdot \exp \left[i(\vec{k} \cdot \vec{R}) \right] \times \left[E_F(\tilde{X}_+) + E_F(\tilde{X}_-) \right] \left[E_F(\tilde{Y}_+) + E_F(\tilde{Y}_-) \right]. \quad (15)$$

Из (15) следует, что интенсивность света в точке наблюдения P равна:

$$I_p(X, Y, Z) \equiv |U_p(X, Y, Z)|^2 = \frac{U_0^2}{4} \cdot \left| E_F(\tilde{X}_+) + E_F(\tilde{X}_-) \right|^2 \cdot \left| E_F(\tilde{Y}_+) + E_F(\tilde{Y}_-) \right|^2. \quad (16)$$

Выражения (15) и (16) описывают дифракцию плоской световой волны на прямоугольном отверстии.

Дифракция на отверстии со статистически неровной границей

Рассмотрим случай дифракции на прямоугольном отверстии со статистически неровной границей. Для этого представим выражение для амплитуды U_p световой волны, дифрагированной на идеальном прямоугольном отверстии в непрозрачном экране в следующем виде:

$$U_{p0}(X, Y, Z) = \frac{k_z}{2\pi i} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx \theta \left(\frac{a}{2} - x \right) \theta \left(x + \frac{a}{2} \right) \cdot U(x, y, z) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dy \theta \left(\frac{b}{2} - y \right) \theta \left(y + \frac{b}{2} \right) \cdot \frac{e^{ik\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + Z^2}}}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + Z^2}}. \quad (17)$$

Наблюдаемая амплитуда содержит вклад от дифракции на рельефе границы кодирующего элемента:

$$U_p(X, Y, Z) = \frac{k}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot U(x, y, 0) \cdot \theta \left(\frac{a}{2} + \delta_a a(y) - x \right) \cdot \theta \left(x + \frac{a}{2} + \delta_a a(y) \right) \cdot \theta \left(\frac{b}{2} + \delta_b b(x) - y \right) \cdot \theta \left(y + \frac{b}{2} + \delta_b b(x) \right) \cdot \frac{e^{ik\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + Z^2}}}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + Z^2}}. \quad (18)$$

Для вычисления амплитуды (18) воспользуемся свойствами обобщенных функций:

$$\theta\left(\frac{a}{2} + \delta l - x\right) \approx \theta\left(\frac{a}{2} - x\right) + \delta\left(\frac{a}{2} - x\right) \delta l, \quad (19)$$

где $l = a, b$, $\delta l = \delta a_r, \delta a_l, \delta b_u, \delta b_d$.

Подставляя (19) в (18) и пренебрегая поправками второго порядка, получаем:

$$\delta U_p(X, Y, Z) = \sum_{i=1}^4 \delta U_i, \quad (20)$$

Где явное выражение для каждой парциальной амплитуды δU_i будет приведено ниже.

Воспользуемся основной идеей теории дифракции (см. формулу (7), и представим первое слагаемое в разложении (20) в следующем виде:

$$\delta U_1 = \frac{k}{2\pi i} \frac{e^{ikZ}}{Z} U_0 e^{ik \frac{a}{2}} \cdot e^{ik \left[\frac{(X-a/2)^2}{2Z} \right]} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \delta_r a(y) e^{iky + ik \frac{(Y-y)^2}{2Z}}. \quad (21)$$

Для оценки априорной приборной погрешности, связанной с дифракцией на статистически неровной границе диафрагмы, необходимо провести усреднение по статистическому ансамблю датчиков. В соответствии с этим введем величину $\langle \delta U_i \rangle$. В этом случае $\langle \delta_r a(y) \rangle = const$, и этот множитель можно вынести из под знака интеграла. В результате получаем:

$$\langle \delta U_1 \rangle = \langle \delta a_r \rangle \cdot \sqrt{\frac{k}{\pi Z}} \cdot \frac{U_0}{2i} e^{ikZ} e^{ik \frac{a}{2} + ik \left[\frac{(X-a/2)^2}{2Z} \right]} \times [E_F(\tilde{Y}_+) + E_F(\tilde{Y}_-)]. \quad (22)$$

В рамках используемых приближений

$$k_x \approx k \frac{X}{Z}, \quad (23)$$

поэтому целесообразно ввести величину $\Delta k_x = k_x - k_x$. Тогда из (22) и (23) следует, что:

$$\langle \delta U_1 \rangle \approx \langle \delta a_r \rangle \cdot \sqrt{\frac{k}{\pi Z}} \cdot \frac{U_0}{2i} e^{ikZ} \cdot e^{-i\Delta k_x \frac{a}{2} + ik \left[\frac{4X^2 + a^2}{8Z} \right]} \times [E_F(\tilde{Y}_+) + E_F(\tilde{Y}_-)], \quad (24)$$

и, аналогично,

$$\langle \delta U_2 \rangle \approx \langle \delta a_l \rangle \cdot \sqrt{\frac{k}{\pi Z}} \cdot \frac{U_0}{2i} e^{ikZ} \cdot e^{+i\Delta k_x \frac{a}{2} + ik \left[\frac{4X^2 + a^2}{8Z} \right]} \times [E_F(\tilde{Y}_+) + E_F(\tilde{Y}_-)]. \quad (25)$$

Введем характеристическую величину, описывающую флуктуации эффективной ширины щели для заданной длины падающей волны:

$$\langle \delta a(k, k_x, X) \rangle \equiv \left[\langle \delta a_r \rangle e^{-i\Delta k_x \frac{a}{2}} + \langle \delta a_l \rangle e^{i\Delta k_x \frac{a}{2}} \right] \times e^{ik \left[\frac{4X^2 + a^2}{8Z} \right]}. \quad (26)$$

Тогда из формул (24)-(26) вытекает, что

$$\langle \delta U_1 \rangle + \langle \delta U_2 \rangle \approx \langle \delta a(k, k_x, X) \rangle \times \sqrt{\frac{k}{\pi Z}} \cdot e^{ikZ} \cdot \frac{U_0}{2i} \cdot [E_F(\tilde{Y}_+) + E_F(\tilde{Y}_-)]. \quad (27)$$

Для второй пары границ отверстия аналогичным образом получаем:

$$\langle \delta U_3 \rangle + \langle \delta U_4 \rangle \approx \langle \delta b(k, k_y, Y) \rangle \times \sqrt{\frac{k}{\pi Z}} \cdot e^{ikZ} \cdot \frac{U_0}{2i} \cdot [E_F(\tilde{X}_+) + E_F(\tilde{X}_-)], \quad (28)$$

где

$$\langle \delta b(k, k_y, Y) \rangle \equiv \left[\langle \delta b_u \rangle e^{-i\Delta k_y \frac{b}{2}} + \langle \delta b_d \rangle e^{i\Delta k_y \frac{b}{2}} \right] \cdot e^{ik \left[\frac{4Y^2 + b^2}{8Z} \right]}. \quad (29)$$

Соотношения (26)-(29) дают полное решение задачи о нахождении амплитуды световой волны, дифрагированной на прямоугольном отверстии со статистически неровной границей.

Дифракция на узкой щели со статистически неровной границей

Рассмотрим узкую щель со статистически неровной границей. В этом случае поправкой $\langle \delta U_3 \rangle + \langle \delta U_4 \rangle$ можно пренебречь, и выражение для полной амплитуды световой волны в точке наблюдения принимает вид:

$$U_p(X, Y, Z) = \frac{U_0}{2i} \cdot [E_F(\tilde{Y}_+) + E_F(\tilde{Y}_-)] \times \left\{ e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R})} \cdot [E_F(\tilde{X}_+) + E_F(\tilde{X}_-)] + e^{ikZ} \cdot \langle \delta a(k, k_x, X) \rangle \cdot \sqrt{\frac{k}{\pi Z}} \right\}. \quad (30)$$

Для оценки относительной априорной погрешности датчика перемещений необходимо рассчитать величину отношения $\delta I_p / I_p$.

Из соотношений (16) и (30) следует, что:

$$\frac{I_p}{I_{p_0}} = \left| e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R})} + e^{ikZ} \cdot \frac{\langle \delta a(k, k_x, X) \rangle}{E_F(\tilde{X}_+) + E_F(\tilde{X}_-)} \cdot \sqrt{\frac{k}{\pi Z}} \right|^2. \quad (31)$$

В рамках используемых приближений без ограничения общности можно ограничиться рассмотрением случая:

$$\left| \langle \delta a(k, k_x, X) \rangle \right| \ll 1. \quad (32)$$

Тогда, удерживая члены первого порядка малости по $\langle \delta a \rangle$, получаем:

$$\frac{\delta I_P}{I_{P_0}} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{\frac{k}{\pi Z}} \cdot \frac{e^{i[kZ - (\bar{k} \cdot \bar{R})]}}{E_F(\tilde{X}_+) + E_F(\tilde{X}_-)} \cdot \langle \delta a(k, k_x, X) \rangle \right\}. \quad (33)$$

Соотношение (33) позволяет дать априорную оценку минимальной неустранимой приборной погрешности показаний датчика перемещений.

Функция отклика оптикоэлектронного датчика перемещений

Функция отклика оптического датчика $h(X_d)$ по определению имеет вид:

$$h(X_d) = \int_{S_d} \varphi(X, Y) I_p(X, Y, Z) ds_n, \quad (34)$$

где $\varphi(X, Y)$ – аппаратная функция, а ds_n – проекция элемента светочувствительной поверхности датчика на плоскость, нормальную к направлению падения светового луча.

В рамках настоящей работы предполагается, что $\varphi(X, Y) = 1$ на фотоэлементе датчика, и $\varphi(X, Y) = 0$ за его пределами. При этом a_d и b_d – ширина и высота входной диафрагмы фотоэлемента, соответственно, а X_d – величина смещения щели-осветителя относительно щели - диафрагмы фотоэлемента, т. е. искомое перемещение, измеряемое с помощью оптикоэлектронного датчика.

Для важного частного случая щелевидной диафрагмы фотоэлемента, входящего в состав датчика перемещений, заведомо выполняется условие $b_d \gg a_d$, и, следовательно, для интегралов Френеля можно использовать приближение $|E_F(\tilde{Y}_+) + E_F(\tilde{Y}_-)|^2 \approx 2$. В этом приближении функция отклика выражается через полную энергию светового потока, падающего на входную диафрагму фотоэлемента $h(X_d) \cong W_d(X_d)$:

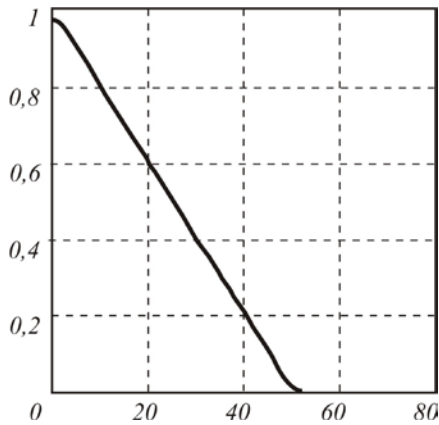


Рис. 2. Типичная функция отклика оптикоэлектронного датчика

$$W_d(X_d) = \frac{U_0^2}{2} b_d \int_{X_d - a/2}^{X_d + a/2} |E_F(\tilde{X}_+) + E_F(\tilde{X}_-)|^2 dX. \quad (35)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \xi &= \sqrt{\frac{k}{\pi Z}} X; \quad \xi_0 = \sqrt{\frac{k}{\pi Z}} \frac{a}{2}; \\ \xi_{\pm} &= \sqrt{\frac{k}{\pi Z}} \left(X_d \pm \frac{a_d}{2} \right); \quad \Delta \xi = \sqrt{\frac{k}{\pi Z}} \frac{k_x Z}{k}. \end{aligned} \quad (36)$$

В данных обозначениях функция отклика принимает вид:

$$\begin{aligned} W_d(X_d) &= \frac{W_0}{2} \times \\ &\times \int_{\xi_-}^{\xi_+} |E_F(\xi_0 + \xi - \Delta \xi) + E_F(\xi_0 - \xi - \Delta \xi)|^2 d\xi, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\text{где } W_0 = U_0^2 b_d \cdot \sqrt{\frac{\pi Z}{k}}.$$

Для дальнейшего анализа удобно ввести безразмерную функцию отклика $\bar{W}_d(X_d)$, связанную с оптической функцией отклика $W_d(X_d)$ очевидным соотношением:

$$W_d(X_d) = W_0 \cdot \bar{W}_d(X_d). \quad (38)$$

Легко видеть, что $\bar{W}_d(X_d)$ выражается через вспомогательную функцию $V(\xi_0, \eta)$:

$$\bar{W}_d(X_d) = \frac{1}{4} [V(\xi_0, \bar{\xi}_+) - V(\xi_0, \bar{\xi}_-)], \quad (39)$$

где $\bar{\xi}_{\pm} = \xi_{\pm} - \Delta \xi$, причем:

$$V(\xi_0, \eta) = \int_{-\eta}^{\eta} |E_F(\xi_0 + \xi) + E_F(\xi_0 - \xi)|^2 d\xi, \quad (40)$$

Выражение (39) представим в следующем виде:

$$V(\xi_0, \eta) = V_0(\xi_0, \eta) - \Delta V(\xi_0, \eta), \quad (41)$$

где

$$V_0(\xi_0, \eta) = 2\eta \cdot |E_F(\xi_0 + \xi) + E_F(\xi_0 - \xi)|^2, \quad (42)$$

и

$$\Delta V(\xi_0, \eta) = 2 \int_{-\eta}^{\eta} F(\xi_0, \xi) \xi d\xi. \quad (43)$$

Подынтегральная функция $F(\xi_0, \xi)$ в формуле (43) выражается через интегралы Френеля:

$$\begin{aligned} F(\xi_0, \xi) &= [C(\xi_0 + \xi) + C(\xi_0 - \xi)] \times \\ &\times \left[\cos \frac{\pi}{2} (\xi_0 + \xi)^2 - \cos \frac{\pi}{2} (\xi_0 - \xi)^2 \right] + \\ &+ [S(\xi_0 + \xi) + S(\xi_0 - \xi)] \times \\ &\times \left[\sin \frac{\pi}{2} (\xi_0 + \xi)^2 - \sin \frac{\pi}{2} (\xi_0 - \xi)^2 \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Несложно показать, что поправочная функция $\Delta V(\xi_0, \eta)$ может быть представлена в виде линейной комбинации интегралов специального вида:

$$\Delta V(\xi_0, \eta) = \frac{2\xi_0^3}{\alpha} \times \{B_1(\alpha, \beta) - B_1(\alpha, -\beta) - B_2(\alpha, \beta) + B_2(\alpha, -\beta)\}, \quad (45)$$

где $\alpha = \frac{\pi}{2} \xi_0^2$, $\beta = \frac{\eta}{\xi_0}$, а интегралы $B_{1,2}(\alpha, \beta)$ определены ниже:

$$\begin{cases} B_1(\alpha, \beta) = \int_0^2 dt \sin[\alpha t(t - 2 + 2\beta)], \\ B_2(\alpha, \beta) = \int_0^2 \frac{dt}{t} \sin[\alpha t(t - 2 + 2\beta)]. \end{cases} \quad (46)$$

Интегралы $B_1(\alpha, \beta)$ элементарно выражаются через интегралы Френеля:

$$B_1(\alpha, \beta) = \frac{\cos[\alpha(\beta - 1)^2]}{\xi_0} \times [S(\xi_0(1 + \beta)) + S(\xi_0(1 - \beta))] - \frac{\sin[\alpha(\beta - 1)^2]}{\xi_0} \cdot [C(\xi_0(1 + \beta)) + C(\xi_0(1 - \beta))]. \quad (47)$$

Процедура вычисления интегралов $B_2(\alpha, \beta)$ существенно сложнее. Проблема состоит в том, что прямой расчет интегралов (46) по квадратурным формулам Симпсона, Гаусса и т.п. возможен далеко не при любых значениях параметров α и β . Эта проблема является общей проблемой нахождения численных квадратур от быстро осциллирующих функций. Она связана с быстрым накоплением погрешности при численном сложении большого числа знакопеременных слагаемых, имеющих один порядок величины.

В целях преодоления проблемы накопления погрешности вычислений представим интеграл $B_2(\alpha, \beta)$ виде суммы:

$$B_2(\alpha, \beta) = A_s(p, q) + A_c(p, q), \quad (48)$$

где $p = 4\alpha$, $q = 4\alpha(\beta - 1)$, а вспомогательные функции $A_s(p, q)$ и $A_c(p, q)$ определены соотношениями (49) и (50).

$$A_s(p, q) \equiv \int_0^1 \frac{dt}{t} \sin(pt^2) \cos(qt), \quad (49)$$

$$A_c(p, q) \equiv \int_0^1 \frac{dt}{t} \cos(pt^2) \sin(qt). \quad (50)$$

Таким образом, проблема нахождения функции отклика оптикоэлектронного датчика сводится к задаче вычисления интегралов специального вида $A_s(p, q)$ и $A_c(p, q)$. Рассмотрению этой проблемы посвящена отдельная работа [12].

Результаты расчетов

На рис. 3, 4 представлены результаты численных расчетов интенсивности I_p и суммарного сигнала

$W_d(X_d)$ для случая падения зеленого света ($\lambda = 0,55$ мкм) на бесконечно длинную щель шириной $a = 50$ мкм при наличии зазора между кодирующей шкалой и фотоэлементом $d = 50$ мкм.

Из рисунков хорошо видно, что дифракционная картина носит ярко выраженный френелевский характер. Оптическая функция отклика $W_d(X_d)$ нелинейна при малых X_d , что позволяет сделать вывод об актуальности рассматриваемой в статье задачи, поскольку наибольшие относительные погрешности датчиковая аппаратура выдает именно для малых значений угловых или линейных перемещений, наиболее интересных с прикладной точки зрения.

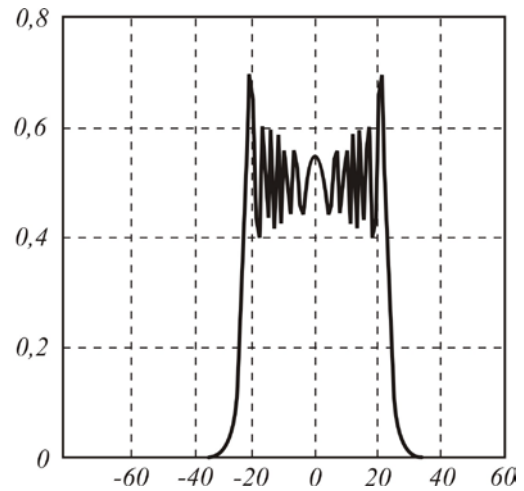


Рис.3. Амплитуда световой волны на поверхности фотоэлемента

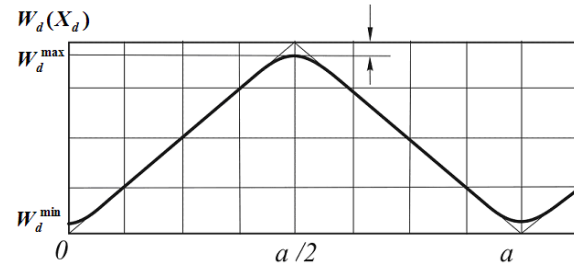


Рис. 4. Реальная функция отклика оптикоэлектронного датчика

Заключение

- Резюмируем вышесказанное следующим образом:
1. Полученные выражения имеют прозрачный физический смысл. Вся информация о влиянии качества механической обработки границы окна кодирующей шкалы оптикоэлектронного датчика на уровень сигнала содержится в функциях $\langle \delta a(k, k_x, X) \rangle$ и $\langle \delta b(k, k_y, Y) \rangle$.
 2. Показано, что при анализе и синтезе оптикоэлектронных датчиков перемещений дифракция светового потока на кодирующей шкале является дифракцией Френеля.

3. Построены вычислительно эффективные аналитические выражения для расчета интенсивности светового потока и интегрального сигнала $W_d(X_d)$.
4. Проведен численный анализ совместного влияния дифракционных и инструментальных погрешностей на работу оптикоэлектронных датчиков перемещений.
5. Показано, что учет дифракционных явлений позволяет существенно улучшить точность датчиковой аппаратуры.

Представляется весьма перспективным использование разработанного формализма для решения задачи синтеза оптикоэлектронных датчиков перемещений с контролируемой нелинейностью оптической функции отклика.

Приложение

Определения и обозначения, используемые в работе

В работе используются стандартные определения интегралов Френеля:

$$C(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt, \quad (\text{п1})$$

$$S(z) = \int_0^z \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt, \quad (\text{п2})$$

быстрый алгоритм расчета которых построен в работах [3, 4, 6, 11].

Введем комплексный интеграл Френеля:

$$E_f(z) = C(z) + iS(z) = zM\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, i\frac{\pi}{2} z^2\right), \quad (\text{п3})$$

где $M(a, b, z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция.

Интегралы Френеля связаны со вспомогательными функциями $f(z)$ и $g(z)$ стандартными соотношениями:

$$C(z) = \frac{1}{2} + f(z) \sin\left(\frac{\pi}{2} z^2\right) - g(z) \cos\left(\frac{\pi}{2} z^2\right), \quad (\text{п4})$$

$$S(z) = \frac{1}{2} - f(z) \cos\left(\frac{\pi}{2} z^2\right) - g(z) \sin\left(\frac{\pi}{2} z^2\right). \quad (\text{п5})$$

Из соотношений (п1) – (п5) следует, что

$$E_f(z) = \frac{1+i}{2} + [f(z) - ig(z)] \sin\left(\frac{\pi}{2} z^2\right) - [g(z) + if(z)] \cos\left(\frac{\pi}{2} z^2\right). \quad (\text{п6})$$

В асимптотике $|z| \gg 1$

$$\pi z f(z) = 1 - \frac{3}{(\pi z^2)^2} + \dots; \quad \pi z g(z) = \frac{1}{\pi z^2}, \quad (\text{п7})$$

и, следовательно,

$$E_f(z) \propto \frac{1+i}{2} - \frac{i}{\pi z} \exp\left(i\frac{\pi}{2} z^2\right) + \dots \quad (\text{п8})$$

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Курс теоретической физики. Теория поля. - М. Наука, 1973. - Т. 2. - 504 с.
2. Абрамовитц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. - М. Наука. 1979. - 832 с.
3. Ratis Yu.L., de Cordoba P.F. A code to calculate (high order) Bessel functions based on the continued fractions method. // Preprint University of Valencia FTUV 92-26 and IFIC 92-27, Burjassot, Spain, 1992.
4. Ratis Yu.L., de Cordoba P.F. A code to calculate (high order) Bessel functions based on the continued fractions method // Computer physics communications. 76 (1993) 381.
5. Ратис Ю.Л., Леонович Г.И. Дифракция светового потока на чувствительных элементах электронно-оптических и оптикоэлектронных датчиков механических перемещений // Компьютерная оптика, 1996. - №16. - С. 74-77.
6. Ratis Yu.L., Segura J., de Cordoba P.F. A code to evaluate Modified Bessel function based on the continued fractions method // Computer Physics Communications, v.105 1997. P. 263-272.
7. Ratis Yu.L., Leonovich G.I., Melnikov A.Yu. Light flux diffraction of fiber - optical and optical electronic transducers of mechanical displacement, Proceedings of SPIE, volume 3348 // Computer and Holographic Optics and Image Processing. 1997. - P. 336-343.
8. Ратис Ю.Л., Леонович Г.И., Мельников А.Ю. Быстрый алгоритм расчета интегралов специального вида при решении задач обработки оптических сигналов // Актуальные проблемы анализа и обеспечения надежности и качества приборов, устройств и систем: Тез. докл. МНТК 26-31 мая 1997 г. - Пенза, 1997. - С. 39-40.
9. Ратис Ю.Л., Леонович Г.И., Конюхов Н.Е., Мельников А.Ю. Фотоэлектрические преобразователи перемещений с линеаризованной функцией отклика оптического канала // Актуальные проблемы анализа и обеспечения надежности и качества приборов, устройств и систем: Тез. докл. МНТК 26-31 мая 1997 г. - Пенза, 1997. - С. 39-40.
10. Ратис Ю.Л., Леонович Г.И., Курушина С.Е., Мельников А.Ю. Нелинейные дифракционные искажения оптической функции отклика в кодирующих сопряжениях оптикоэлектронных датчиков // Компьютерная оптика. - Самара-Москва. 1998. - Т. 18.
11. Ratis Yu.L., Bastardo J.L., Abraham Ibrahim S., de Cordoba P.F., Urchueguia J.F.S., Evaluation of Fresnel integrals based on the continued fractions method // Applied Mathematics Letters, 18 (2005) - P.23-28.
12. Ратис Ю.Л. Куделькин В.А. Быстрый алгоритм расчета интегралов специального вида. Направлена в печать.

LIGHT DIFFRACTION ON A RECTANGULAR HOLE WITH A STATICALLY ROUGH BOUNDARY

V.A. Kudelkin^{1,2,3}, Yu.L. Ratis^{1,2,3}

¹*Integra-S Consortium, Samara, Russia,*

²*Samara State Aerospace University (SSAU), Samara, Russia,*

³*Image Processing Systems Institute of the RAS, Samara, Russia*

Abstract:

The paper studies the influence of nonlinearity of the response function and diffraction corrections by signal intensity produced by an optoelectronic sensor of mechanical displacements. Computationally efficient analytical expressions are built to calculate the light flux intensity. It is shown that introduction of diffractive effects can significantly improve the accuracy of sensor equipment.

Keywords: diffraction, optoelectronic sensor, influence of nonlinearity

Citation: Kudelkin VA, Ratis YuL. Light diffraction on a rectangular hole with a statically rough boundary [In Russian]. *Computer Optics* 2007; 31(3): 14-19.

References:

- [1] Landau LD, Lifshits EM. Course of Theoretical Physics. The Classical Theory of Fields [In Russian]. Moscow: "Nauka" Publisher, 1973; 2: 504 p.
- [2] Abramovitz M, Stegun IA. Handbook of Mathematical Functions [In Russian]. Moscow: "Nauka" Publisher, 1979; 832 p.
- [3] Ratis YuL, de Cordoba PF. A code to calculate (high order) Bessel functions based on the continued fractions method. Preprint University of Valencia FTUV 92-26 and IFIC 92-27, Burjassot, Spain, 1992.
- [4] Ratis YuL, de Cordoba PF. A code to calculate (high order) Bessel functions based on the continued fractions method. *Computer physics communications* 1993; 76: 381.
- [5] Ratis YuL, Leonovich GI. Light flux diffraction on transducers of optical voltage and optoelectronic sensors of mechanical displacement [In Russian]. *Computer Optics* 1996; 16: 74-77.
- [6] Ratis YuL, Segura J, de Cordoba PF. A code to evaluate Modified Bessel function based on the continued fractions method. *Computer Physics Communications* 1997; 105: 263-272.
- [7] Ratis YuL, Leonovich GI, Melnikov AYu. Light flux diffraction of fiber - optical and optical electronic transducers of mechanical displacement. *Computer and Holographic Optics and Image Processing of SPIE* 1997; 3348: 336-343.
- [8] Ratis YuL, Leonovich GI, Melnikov AYu. Fast algorithm for computing integrals of special form in optical signal processing tasks [In Russian]. Current problems of the analysis, reliability and quality assurance for instruments, devices and systems. Proceedings of the International Scientific and Technical Conference (Penza, May 26-31) 1997; 39-40.
- [9] Ratis YuL, Leonovich GI, Konyukhov NE, Melnikov AYu. Photoelectric transducers of displacement with the linearized optical-channel response function [In Russian]. Current problems of the analysis, reliability and quality assurance for instruments, devices and systems. Proceedings of the International Scientific and Technical Conference (Penza, May 26-31) 1997; 39-40.
- [10] Ratis YuL, Leonovich GI, Kurushina SE, Melnikov AYu. Nonlinear diffraction distortions of the optical response function in coding interfaces of optoelectronic sensors [In Russian]. *Computer Optics* 1998; 18: 61-70.
- [11] Ratis YuL, Bastardo JL, Abraham Ibrahim S, de Cordoba PF, Urchueguia JFS. Evaluation of Fresnel integrals based on the continued fractions method. *Applied Mathematics Letters* 2005; 18: 23-28.
- [12] Ratis YuL, Kudelkin VA. Fast algorithm for computing integrals of special form [In Russian]. In print.