ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ, РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ И АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С КОМИТЕТНОЙ ОТДЕЛИМОСТЬЮ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

М.Ю. Хачай[1]

[1]*Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия*

Аннотация

В работах [1, 2] получены результаты по вычислительной и аппроксимационной сложности задачи *MASC* о минимальном аффинном разделяющем комитете для конечных множеств $A, B \subset \mathbb{Q}^n$. В частности, показано, что эта задача *NP* трудна и не принадлежит классу *Apx* (в предположении, что $P \neq NP$). Тем не менее, открытыми оставались вопросы получения оценок порога ее эффективной аппроксимируемости и оценки вычислительной сложности ряда важных для приложений частных случаев задачи, получаемых наложением дополнительных ограничений, например, фиксации размерности пространства. В настоящей статье приводится нижняя оценка порога полиномиальной аппроксимируемости задачи в общем случае и обосновывается труднорешаемость задачи в пространствах фиксированной размерности, большей единицы. В частности, показывается, что задача о комитетной отделимости остается труднорешаемой, даже будучи сформулированной на плоскости (т. е. в наиболее простом нетривиальном случае). Справедливость этого факта следует из полиномиальной сводимости к исследуемой задаче известной задачи *PC* о покрытии прямыми конечного множества на плоскости, труднорешаемость которой доказана [3]. Методика сведения представляет собой модификацию методики, описанной в [4], использовавшейся в этой работе для обоснования труднорешаемости задачи о кусочно-линейной отделимости конечных множеств на плоскости.

Введение

Вычислительная сложность комбинаторных задач, связанных с построением оптимальных процедур обучения распознаванию образов, интересует исследователей с 80 гг. прошлого столетия. К сожалению, подавляющее большинство этих задач – труднорешаемы. Поэтому поиск их полиномиально разрешимых подклассов исследуемых задач (равно как и обоснование их труднорешаемости), а также разработка полиномиальных приближенных алгоритмов их решения, несомненно, остаются актуальными и в настоящее время. Исследуемая в данной работе задача о минимальном по числу элементов разделяющем комитете для конечных множеств (*MASC*) тесно связана одновременно с задачей обучения простейшего классического персептрона и задачей о полиэдральной отделимости множеств, являясь, по сути, частным случаем обеих задач.

Классическим персептроном обычно называется 2-слойная нейронная сеть без скрытых слоев, с q входами и одним выходом. Функция активации i-го нейрона

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & c_i^{\mathrm{T}} x - d_i > 0, \\ -1, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{1}$$

Фактически, персептрон реализует отображение

$F(x \mid (c_1, d_1), \ldots, (c_{q+1}, d_{q+1})) \colon \mathbb{Q}^n \to \{-1, 1\}$, определяемое параметрами $(c_1, d_1), \ldots, (c_{q+1}, d_{q+1})$. Персептрон F называется *корректным* на выборке

$$(a_1, \ldots, a_{m_1}, b_1, \ldots, b_{m_2}), \tag{2}$$

если

$$F(a_i) = 1 \quad (i \in \{1, \ldots, m_1\} = \mathbb{N}_{m_1}),$$

$$F(b_j) = -1 \quad (j \in \mathbb{N}_{m_2}).$$

С процедурой обучения (настройки весов сети по заданной выборке) связано несколько комбинаторных задач.

Задача «Обучение (загрузка) персептрона». Заданы натуральное число q и выборка (2). Существует ли корректный на выборке персептрон с не более чем q входными нейронами?

Задача «Оптимальный корректный персептрон» (*OCP*). Задана обучающая выборка (2). Требуется определить параметры корректного на данной выборке персептрона с наименьшим числом входов.

Известны следующие результаты.

Теорема 1 [5]. Задача обучения персептрона *NP*-полна и остается таковой при произвольном фиксированном $q \geq 2$.

Теорема 2 [6]. Задача *OCP NP* трудна.

Как будет показано ниже, задача о минимальном аффинном разделяющем комитете является частным случаем задачи *OCP*, в котором параметры выходного нейрона – фиксированы $c_{q+1}=[1,\ldots,1]^{\mathrm{T}}$ и $d_{q+1}=0,$ что соответствует правилу голосования согласно правилу простого большинства.

Другие задачи, специализацией которых является задача о минимальном комитете, относятся к вычислительной геометрии и связаны с построением оптимальных кусочно-линейных разделяющих поверхностей для множеств с пересекающимися выпуклыми оболочками. Приведем их возможные формулировки, следуя [4]. Каждой гиперплоскости $H\subset\mathbb{R}^n$, $H=\{x\in\mathbb{R}^n : c^{\mathrm{T}}x=d\}$ сопоставим предикат $\Pi[H]:\mathbb{R}^n\to\{true,\ false\}$ по правилу, аналогичному (1):

$$\Pi(H)[x]=\begin{cases} true, & c^{\mathrm{T}}x-d>0,\\ false, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Зададимся множествами A и B и булевой формулой $\varphi(\xi_1,\ldots,\xi_k)$. Будем говорить, что гиперплоскости $H_1,\ldots,H_k$ разделяют множества A и B по формуле (правилу) $\varphi,$ если

$$\begin{aligned} &\varphi(\Pi[H_1](a),\ldots,\Pi[H_k](a))=true \quad (a\in A),\\ &\varphi(\Pi[H_1](b),\ldots,\Pi[H_k](b))=false \quad (b\in B).\end{aligned}\qquad(3)$$

Рассмотрим следующие комбинаторные задачи.

Задача «k-полиэдральная отделимость при заданной булевой формуле». Заданы конечные множества $A=\{a_1,\ldots,a_{m_1}\}$ и $B=\{b_1,\ldots,b_{m_2}\},$ число $k\in\mathbb{N}$ и булева формула $\varphi(\xi_1,\ldots,\xi_k)$. Существуют ли гиперплоскости $H_1,\ldots,H_k$, разделяющие множества A и B по формуле φ?

В случае, когда формула (логика) разделения φ заранее неизвестна, может быть сформулирована более общая задача.

Задача «(свободная) k-полиэдральная отделимость». Заданы конечные множества $A=\{a_1,\ldots,a_{m_1}\}$ и $B=\{b_1,\ldots,b_{m_2}\}$ и число $k\in\mathbb{N}$. Существуют ли гиперплоскости $H_1,\ldots,H_k$, разделяющие множества A и B по правилу: для каждой пары $(a,b),$ $a\in A,$ $b\in B,$ найдется такой номер

$$j=j(a,b),$$

что $\Pi\left[H_{j(a,b)}\right](a)=true$ и $\Pi\left[H_{j(a,b)}\right](b)=false.$

Как показано в [4], последняя задача имеет положительный ответ тогда и только тогда, когда существует подходящая формула φ, при которой предыдущая задача также обладает положительным ответом (для тех же множеств).

Результат проведенного в работе [4] исследования вычислительной сложности сформулированных выше задач приведен в следующей теореме.

Теорема 3 [4].

1. Обе задачи *NP*-полны и остаются труднорешаемыми при произвольном фиксированном $k\geq 2$.
2. Задача о свободной отделимости остается *NP*-полной при произвольном фиксированном $n>1$.
3. Задача о свободной отделимости при произвольных фиксированных k и n полиномиально разрешима.

Как станет ясно ниже, задача о минимальном комитете является частным случаем оптимизационного варианта задачи о k-полиэдральной отделимости при заданной булевой формуле (принимающей значение $true$ тогда и только тогда, когда большинство ее аргументов также принимает значение $true$).

К сожалению, задача *MASC*, как и описанные выше более общие задачи, труднорешаема [1-2]. В данной работе обсуждается несколько новых результатов, касающихся вычислительной сложности и аппроксимируемости задачи *MASC* и ее специальных случаев.

1. Задача о минимальном аффинном разделяющем комитете (MASC)

Определение. Конечная последовательность функций $Q=(f_1,\ldots,f_q),$ $f_i(x)=c_i^{\mathrm{T}}x-d_i$ называется аффинным комитетом, разделяющим множества $A,B\subset\mathbb{R}^n,$ если выполнено условие

$$\left|\left\{i\in\mathbb{N}_q:\ f_i(a)>0\right\}\right|>\frac{q}{2}\quad(a\in A),$$

$$\left|\left\{i\in\mathbb{N}_q:\ f_i(b)<0\right\}\right|>\frac{q}{2}\quad(b\in B).$$

Число q называется числом элементов (членов) комитета Q.

По критерию Мазурова [7] множества A и B отделимы аффинным комитетом тогда и только тогда, когда $A\cap B=\varnothing.$ Однако по ряду причин особый интерес представляют разделяющие комитеты с наименьшим числом элементов, называемые *минимальными*.

Задача «Минимальный аффинный разделяющий комитет» (*MASC*). Заданы множества $A=\{a_1,\ldots,a_{m_1}\}$ и $B=\{b_1,\ldots,b_{m_2}\},$ $A,B\subset\mathbb{Q}^n.$ Требуется указать аффинный комитет с наименьшим числом элементов, разделяющий множества A и B.

Следующее утверждение характеризует вычислительную сложность задачи в общем случае.

Теорема 4 [1-2]. Задача *MASC* – *NP*-трудна и остается труднорешаемой при дополнительном условии $A\cup B\subset\left\{x\in\{0,1,2\}^n:\|x\|_2\leq 2\right\}.$

Традиционный подход к исследованию *NP*-трудных задач комбинаторной оптимизации предполагает, в частности, разработку полиномиальных приближенных алгоритмов решения задачи *MASC*. В работе [2] описан один приближенный алгоритм решения данной задачи, обладающий точностью $O\left(m/n\right)$, и доказана следующая теорема.

Теорема 5 [2]. Задача *MASC* не принадлежит классу *Apx* (задач комбинаторной оптимизации, обладающих полиномиальными алгоритмами с постоянной точностью), если $P \neq NP$.

Следующий раздел настоящей статьи посвящен обоснованию нового результата, уточняющего результат Теоремы 5.

2. Аппроксимируемость задачи MASC

Результат данного раздела, как и Теорема 5 базируется на полиномиальной сводимости к задаче *MASC* известной *NP*-трудной задачи о раскраске 2-цветного 3-однородного гиперграфа в k цветов. Как показано в [9], данная задача остается труднорешаемой при произвольном фиксированном $k \geq 3$.

Теорема 6. *Если* $NP \not\subset DTIME(2^{poly(\log(n))})$, *задача MASC не обладает полиномиальными приближенными алгоритмами с точностью*

$$O(\log\log\log m).$$

Доказательство. Пусть условие частной задачи о раскраске задается конечным гиперграфом $\Gamma = (\mathbb{N}_n, H)$, в котором $H \neq \varnothing$ и $|h| = 3$ для каждого $h \in H$. По условию, гиперграф Γ – двуцветный, т. е. существует такая функция $\varphi_0 : \mathbb{N}_n \to \{1,2\}$, что

$$(\forall h \in H) \Rightarrow (|\varphi_0(h)| > 1).$$

Другими словами, существует такое разбиение $V_1 \dot\cup V_2 = \mathbb{N}_n$, что

$$(\forall h \in H) \Rightarrow (h \cap V_1 \neq \varnothing) \wedge (h \cap V_2 \neq \varnothing).$$

К сожалению, ни множества V_1 и V_2, ни отображение φ_0 не заданы. Требуется указать раскраску $\varphi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_k$ гиперграфа Γ с некоторым фиксированным k.

По аналогии с методикой, описанной в работе [2], сопоставим данной частной задаче о раскраске подходящую частную задачу *MASC*, для чего зададимся множествами $A, B \subset \mathbb{Q}^n$, определяемыми по правилу:

$$A = \{3e_i \mid i \in \mathbb{N}_n\},$$

$$B = \{e_i + e_j + e_k \mid \{i, j, k\} \in H\}.$$

Здесь, как обычно, e_i используется для обозначения i-го единичного орта. Нетрудно убедиться в том, что

1) $\operatorname{conv}(A) \cap \operatorname{conv}(B) \neq \varnothing$, следовательно, множества A и B не могут быть разделены гиперплоскостью, и минимальный аффинный разделяющий (эти множества) комитет содержит более одного элемента;

2) множества A и B отделимы комитетом из трех элементов. В самом деле, определим линейные функции $f_i(x) = c_i^{\mathrm{T}} x$, задав координаты векторов c_i правилом:

$$c_{1j} = \begin{cases} 1, & j \in V_1, \\ -3, & j \in V_2, \end{cases} \quad c_{2j} = \begin{cases} 1, & j \in V_2, \\ -3, & j \in V_1, \end{cases}$$

$$c_{3j} = 1, \quad j \in \mathbb{N}_n.$$

В силу следующих неравенств

$$f_1(3e_i) > 0 \ \text{ и } \ f_3(3e_i) > 0 \qquad (i \in V_1),$$

$$f_2(3e_i) > 0 \ \text{ и } \ f_3(3e_i) > 0 \qquad (i \in V_2),$$

$$\left.\begin{aligned} f_1(e_i + e_j + e_k) < 0 \\ f_2(e_i + e_j + e_k) < 0 \end{aligned}\right\} \quad (\{i, j, k\} \in H),$$

справедливых, по построению, последовательность $Q = (f_1, f_2, f_3)$ является искомым комитетом, разделяющим A и B.

Пусть далее $Q = (f_1, f_2, \ldots, f_{2s+1})$, $f_i(x) = c_i^{\mathrm{T}} x + d_i$ – произвольный комитет, разделяющий множества A и B. По теореме Мазурова [см., например, 8],

$$2s + 1 \leq |A \cup B| \leq \binom{n}{3} + n.$$

Убедимся в том, что комитет индуцирует раскраску исходного гиперграфа Γ в t цветов, где $1 \leq t \leq \min\left\{n, \binom{2s+1}{s+1}\right\}$. По определению, каждому номеру $j \in \mathbb{N}_n$ соответствует такое подмножество $I(j) \subset \mathbb{N}_{2s+1}$, $|I(j)| = s + 1$, что

$$f_i(3e_j) > 0 \quad (i \in I(j)).$$

Произведём последовательный перебор вершин Γ и построим разбиение $V_1 \dot\cup \ldots \dot\cup V_t = \mathbb{N}_n$, следуя следующему алгоритму.

Шаг 1. Положить $V_1 := \{1\}$, $t := 1$, $j := 1, k := 1$.

Шаг 2. Если $j = n$, СТОП, иначе продолжить.

Шаг 3. Положить $j := j + 1$.

Шаг 4. Если $I(j) = I(k)$, положить $V_t := V_t \cup \{j\}$ и вернуться на Шаг 3, в противном случае перейти на Шаг 5.

Шаг 5. Положить $t := t+1,\ k := j, V_t = \{j\}$. Перейти на Шаг 3.

Очевидно, данное построение (равно как и все описанные выше) может быть произведено за время, ограниченное сверху полиномом от n. Построенное в результате разбиение задает искомую раскраску (в t цветов). Для обоснования ее корректности убедимся в том, что множество H не содержит монохромных ребер. В самом деле, пусть, от противного, найдутся такие ребро $h \in H$ и номер $r \in \mathbb{N}_t$, что $h \subset V_r$. Без ограничения общности можно полагать $h = \{1, 2, 3\}$ и $r = 1$. Тогда, по построению, для произвольного $p \in I(1)$ справедливы неравенства

$$3c_p^{\mathrm{T}} e_l + d_p > 0 \quad (l = 1, 2, 3),$$

а, следовательно, и

$$c_p^{\mathrm{T}}(e_1 + e_2 + e_3) + d_p > 0.$$

С другой стороны, поскольку Q – разделяющий комитет для множеств A и B, с необходимостью найдется номер $p_0 \in I(1)$, для которого

$$c_{p_0}^{\mathrm{T}}(e_1 + e_2 + e_3) + d_{p_0} < 0.$$

Найденное противоречие подтверждает корректность раскраски.

Далее, пусть задача *MASC* обладает приближенным полиномиальным алгоритмом с точностью $r = r(m)$. Здесь, как обычно, r – натуральнозначная функция натурального аргумента – мощности множества $|A \cup B|$. Без ограничения общности можно полагать $r = 2\rho + 1$. Из п. 2 следует, что, результатом применения его к сформулированной выше частной задаче будет разделяющий комитет из не более чем $3r = 6\rho + 3$ элементов, что повлечет построение (за полиномиальное время) раскраски Γ в t цветов, где

$$t \le \min\left\{n, \binom{6\rho+3}{3\rho+2}\right\}.$$

Согласно [9], $t > C\sqrt[3]{\log\log n}$ при условии $NP \not\subset DTIME(2^{poly(\log(n))})$, откуда при том же условии имеем

$$\binom{6\rho+3}{3\rho+2} > C\sqrt[3]{\log\log n}.$$

Воспользовавшись известным асимптотическим представлением для наибольшего биномиального коэффициента $\binom{2k}{k} \sim \frac{2^{2k}}{\sqrt{\pi k}}$, произведя несложные преобразования с учетом того, что в данном случае $m = O(n^3)$, получим искомое неравенство

$$\rho > D\log\log\log n = O(\log\log\log m).$$

Теорема доказана.

3. Труднорешаемость задачи MASC в пространствах фиксированной размерности

Известно, что многие *NP*-трудные в общем случае задачи комбинаторной оптимизации становятся полиномиально (или псевдополиномиально) разрешимыми при дополнительных ограничениях: при фиксации размерности пространства, числа ограничений и т. п. Например, общая задача целочисленного линейного программирования, сформулированная в пространстве фиксированной размерности – полиномиально разрешима.

Известно [см., например, 8], что задача *MASC*, заданная в одномерном пространстве также может быть решена за полиномиальное время. До настоящего времени открытым оставался вопрос о вычислительной сложности данной задачи в пространствах большей размерности. В данном разделе показывается, что задача *MASC* становится *NP*-трудной, будучи сформулированной в пространстве $\mathbb{Q}^n$ при произвольном фиксированном $n > 1$. Для обоснования этого факта, очевидно, достаточно показать труднорешаемость задачи на плоскости.

Задача о комитетной отделимости конечных множеств на плоскости (PASC). Заданы множества $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2}\}$, $A, B \subset \mathbb{Q}^2$, и число $t \in \mathbb{N}$. Существует ли аффинный комитет Q, разделяющий множества A и B и состоящий из не более чем t элементов?

Нетрудно убедиться в том, что задача *PASC* принадлежит классу *NP*. Цель данного раздела состоит в обосновании полиномиальной сводимости к ней известной *NP*-полной задачи о покрытии конечного множества точек плоскости множеством прямых (*PC*) и, как следствие, принадлежности задачи *PASC* классу *NP*-полных задач.

Определение. Множество прямых $L = \{l_1, \ldots, l_s\}$, $l_j = \{x \in \mathbb{R}^2 : c_j^{\mathrm{T}} x = d_j\}$, где $c_j \ne 0$, называется покрытием множества $P = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset \mathbb{R}^2$, если для каждой точки $p \in P$ найдется прямая $l = l(p) \in L$ такая, что $p \in l$.

Задача о покрытии прямыми конечного множества на плоскости (*PC*). Заданы множество $P = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset \mathbb{Z}^2$ и число $s \in \mathbb{N}$. Существует ли покрытие L множества P, по мощности не превосходящее s?

Теорема 7 [3]. Задача *PC* *NP*-полна в строгом смысле.

Договоримся использовать следующие обозначения: $B(x_0,\varepsilon)=\left\{x\in\mathbb{R}^2:\|x-x_0\|_2\le\varepsilon\right\}$ для круга с центром в x_0 и радиусом ε; $\mathrm{aff}(P)$ – для аффинной оболочки множества P и dim – размерности аффинного (линейного) многообразия. Для дальнейших построений нам потребуется следующее утверждение, приводимое ввиду его важности для дальнейших построений с доказательством.

Утверждение 1 [3].
Пусть заданы множество $P=\{p_1,\dots,p_k\}\subset\mathbb{Z}^2$, число $\varepsilon\in\left(0,\dfrac{1}{6(2\rho+1)}\right)$, где $\rho=\max\left\{\|p_j\|_2: j\in\mathbb{N}_k\right\}$, и непустое подмножество $J\in\mathbb{N}_k$. Для существования прямой $l=l(J)$ такой, что

$$B(p_j,\varepsilon)\cap l\neq\varnothing\quad(j\in J)\tag{4}$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\dim\mathrm{aff}\{p_j: j\in J\}\le 1.$$

Доказательство. Утверждение, очевидно, справедливо при $|J|\le 2$, поэтому далее, без ограничения общности, полагаем $|J|\ge 3$. Достаточность может быть доказана непосредственной проверкой. Остановимся на доказательстве необходимости. Пусть l – произвольная прямая, удовлетворяющая условию (4) для некоторого J, и пусть, от противного, точки p_j не лежат на одной прямой. При нашем предположении, найдутся числа $j_1,j_2,j_3\in J$ (без ограничения общности, полагаем $j_1=1,\dots,j_3=3$) такие, что $\dim\mathrm{aff}\{p_1,p_2,p_3\}=2$. По условию, существуют векторы $w_j=[\xi_j,\eta_j]^{\mathrm{T}}$ такие, что

$$p_j+w_j\in B(p_j,\varepsilon)\cap l\qquad(j=1,2,3).$$

Введя обозначение $p_j=[x_j,y_j]^{\mathrm{T}}$, имеем, по выбору w_j,

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1+\xi_1 & x_2+\xi_2 & x_3+\xi_3\\ y_1+\eta_1 & y_2+\eta_2 & y_3+\eta_3\end{vmatrix}=0.$$

С другой стороны,

$$|\Delta|\ge\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}-12\rho\varepsilon-6\varepsilon^2,$$

откуда, в силу целочисленности и неколлинеарности точек p_1,p_2 и p_3 и выбору ε,

$$|\Delta|\ge 1-12\rho\varepsilon-6\varepsilon>0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство необходимости условия и утверждения в целом.

Пусть далее условие частной задачи *PC* задается множеством $P=\{p_1,\dots,p_k\}\subset\mathbb{Z}^2$ и числом $s\in\mathbb{N}$. Вычислим $\rho=\max\left\{\|p_j\|_2: j\in\mathbb{N}_k\right\}$, и положим $\varepsilon=\dfrac{1}{6(2\rho+1)+1}$. Зафиксируем вектор σ, $\|\sigma\|_2=1$ так, чтобы для любого $\{i,j\}\subset\mathbb{N}_k$ отрезки $[p_i-\varepsilon\sigma,p_i+\varepsilon\sigma]$ и $[p_j-\varepsilon\sigma,p_j+\varepsilon\sigma]$ не лежали на одной прямой.

Сопоставим исходной задаче *PC* частную задачу *PASC* с условием: $A=P$, $B=(P-\varepsilon\sigma)\cup(P+\varepsilon\sigma)$ и $t=2s+1$ (рис. 1).

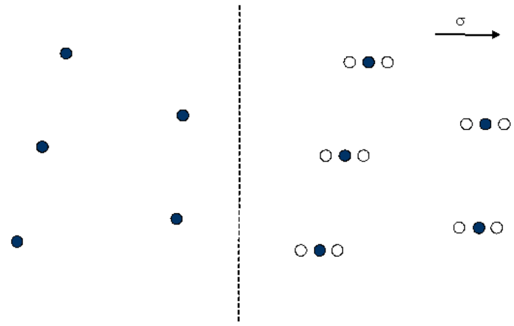

Рис. 1. Схема сведения задачи PC к задаче PASC

Легко убедиться в том, что описанные выше действия могут быть произведены за время, ограниченное сверху полиномом от длины записи условия задачи *PC*. Для завершения обоснования полиномиальной сводимости достаточно показать, что задача *PC* и поставленная ей в соответствие задача *PASC* имеют положительные или отрицательные ответы одновременно. Другими словами, что множество P обладает покрытием из не более, чем s прямых тогда и только тогда, когда соответствующие ему множества A и B отделимы аффинным комитетом, число элементов которого не превосходит $2s+1$.

Теорема 8. Множество $P=\{p_1,\dots,p_k\}\subset\mathbb{Z}^2$ обладает покрытием из s прямых тогда и только тогда, когда множества $A=P$ и $B=(P-\varepsilon\sigma)\cup(P+\varepsilon\sigma)$ отделимы аффинным комитетом из $2s+1$ элемента.

Доказательство. **1.** Пусть $L=\{l_1,\dots,l_s\}$ – покрытие множества P. Каждой прямой $l_j=\{x\in\mathbb{R}^2: c_j^{\mathrm{T}}x=d_j\}$ сопоставим подмножества $A(j)=P(j)=P\cap l_j$ и $B(j)=(P(j)+\varepsilon\sigma)\cup(P(j)-\varepsilon\sigma)$. Без ограничения общности можно полагать, что $A(j)\neq\varnothing$ и для каждой точки $a\in A(j)$ справедливо неравенство

$$(c_j^{\mathrm{T}}(a-\varepsilon\sigma)-d_j)(c_j^{\mathrm{T}}(a-\varepsilon\sigma)+d_j)<0.\tag{5}$$

Зафиксируем произвольное число $0<\delta_j<\varepsilon$ и определим функции f_{2j-1} и f_{2j} по формулам

$$f_{2j-1}(x)=c_j^{\mathrm{T}}x-d_j+\delta_j,$$
$$f_{2j}(x)=-c_j^{\mathrm{T}}x+d_j+\delta_j.$$

так, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{cases} f_{2j-1}(a-\varepsilon\sigma)\cdot f_{2j}(a-\varepsilon\sigma)<0, \\ f_{2j-1}(a+\varepsilon\sigma)\cdot f_{2j}(a+\varepsilon\sigma)<0 \end{cases} \quad (a\in A(j)). \tag{6}$$

В силу справедливости неравенства (5), такое построение возможно. Очевидно, что наряду с неравенствами (6), по выбору ε, также будут выполнены неравенства

$$\begin{cases} f_{2j-1}(a)>0,\ f_{2j}(a)>0 & (a\in A(j)) \\ f_{2j-1}(p)\cdot f_{2j}(p)<0 & (p\in(A\cup B)\setminus(A(j)\cup B(j)). \end{cases}$$

По построению, последовательность функций $(f_1,\dots,f_{2s})$ обладает свойством

$$|\{k:\ f_k(a)>0\}|\ge s+1 \quad (a\in A),$$
$$|\{k:\ f_k(b)<0\}|=s \quad (b\in B).$$

Дополнив ее произвольной аффинной функцией f_0, удовлетворяющей условиям

$$f_0(x)<0 \quad (x\in A\cup B),$$

непротиворечивым ввиду конечности множества $A\cup B$, получаем искомый комитет $Q=(f_0,f_1,\dots,f_{2s})$, разделяющий множества A и B (рис. 2).

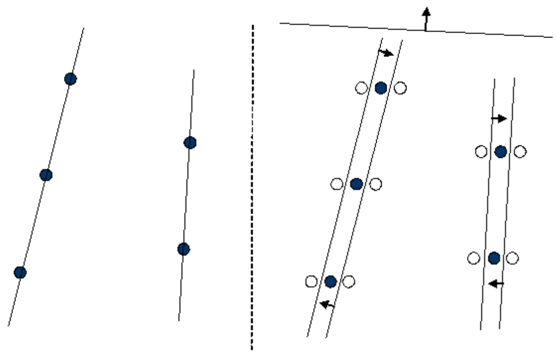

Рис. 2. Построение разделяющего комитета по заданному покрытию.

2. Множество P, очевидно, обладает покрытием, состоящим из не более чем $\lceil k/2 \rceil$ прямых. Обозначим через s мощность его минимального (по числу элементов) покрытия. Покажем, что сопоставленные множеству P согласно описанной выше схеме множества A и B не могут быть отделимы аффинным комитетом с числом элементов $q<2s+1$.

Пусть $Q=(f_1,\dots,f_q)$, где $f_i(x)\equiv c_i^{\mathrm{T}}x-d_i$ – произвольный комитет аффинных функций, разделяющий множества A и B. По теореме Мазурова [8], для каждой точки $a\in A$ найдутся такие номера $i_1=i_1(a)$ и $i_2=i_2(a)$, что

$$f_{i_1(a)}(a)>0,\quad f_{i_1(a)}(a+\varepsilon\sigma)<0, \tag{7}$$

$$f_{i_2(a)}(a)>0,\quad f_{i_2(a)}(a-\varepsilon\sigma)<0. \tag{8}$$

Введем следующие обозначения: через $I_1(a)$ обозначим множество всех номеров $i_1(a)$, удовлетворяющих условию (7), аналогично, обозначим через $I_2(a)$ множество номеров $i_2(a)$, удовлетворяющих условию (8). Далее определим множества I_1 и I_2 равенствами

$$I_1=\bigcup_{a\in A}I_1(a) \quad \text{и} \quad I_2=\bigcup_{a\in A}I_2(a).$$

В силу (7)-(8), справедливы неравенства

$$c_i^{\mathrm{T}}\sigma<0 \quad (i\in I_1),$$
$$c_i^{\mathrm{T}}\sigma>0 \quad (i\in I_2),$$

следовательно, $I_1\cap I_2=\varnothing$. Для произвольного номера $i\in I_1$ обозначим через $A'(i)$ подмножество $\{a\in A\colon i\in I_1(a)\}$. По построению, прямая $f_i(x)=0$ для каждого $a\in A'(i)$ пересечет отрезок $[a,a+\varepsilon\sigma]$. Следовательно, в силу утверждения 1 и выбора ε, $\dim\operatorname{aff}A'(i)\le 1$, откуда $|I_1|\ge s$, по выбору s (в качестве мощности наименьшего покрытия множества $A=P$. Аналогично обосновывается неравенство $|I_2|\ge s$. Таким образом,

$$q\ge|I_1|+|I_2|\ge 2s. \tag{9}$$

Нетрудно убедиться в справедливости более сильного неравенства $q\ge 2s+1$. В самом деле, в противном случае комитет Q из $2s$ элементов путем исключения произвольного элемента (см., например, [6]) может быть преобразован в аффинный комитет, разделяющий множества A и B и состоящий из $2s-1$ члена, что противоречит (9). Теорема доказана.

Следствие 1. Задача *PASC NP*-полна в строгом смысле. Задача *ASC*[1], сформулированная в пространстве фиксированной размерности $n>1$ – также *NP*-полна в строгом смысле.

Следствие 2. Задача *MASC*, сформулированная в $\mathbb{Q}^n$ при произвольном фиксированном $n>1$, – *NP*-трудна.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Президента РФ (гр. НШ-5595.2006.1 и МД-6768.2006.1) и РФФИ (гр. 07-01-399 и 07-07-168).

[1] Задача об аффинном разделяющем комитете в форме задачи распознавания свойства.

Литература

1. Хачай М.Ю. О вычислительной сложности задачи о минимальном комитете и смежных задач // ДАН, 2006. - 406. - №6. - С. 742-745.
2. Хачай М.Ю. О вычислительной и аппроксимационной сложности задачи о минимальном аффинном разделяющем комитете // Таврический вестник информатики и математики. 2006. - №1. - С.34–43.
3. Megiddo N., Tamir A. On the complexity of locating linear facilities in the plane // Operations research letters. 1982. - Vol. 1. - No. 5. - P. 194-197.
4. Megiddo N. On the complexity of polyhedral separability // Discrete and Computational Geometry. 1988. – 3. - P. 325-337.
5. Blum A.L., Rivest R.L. Training a 3-node Neural Network is NP-complete // Neural Networks. 1992. - Vol. 5. - P. 117–127.
6. Lin J.H., Vitter J.S. Complexity Results on Learning by Neural Nets // Machine Learning. 1991. - Vol 6. – P. 211–230.
7. Мазуров Вл.Д. Комитеты систем неравенств и задача распознавания // Кибернетика. 1971. - №3. - С. 140–146.
8. Mazurov Vl.D., Khachai M.Yu., Rybin A.I. Committee Constructions for Solving Problems of Selection, Diagnostics and Prediction. {\it Proceedings of the Steklov Institute of mathematics}. Suppl. 1, (2002), S67–S101.
9. Dinur I., Regev O. and Smyth C. The hardness of 3-uniform hypergraph coloring. In: Proc. of the 43rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, November 2002.

COMPUTATIONAL COMPLEXITY AND APPROXIMABILITY OF COMBINATORIAL PROBLEMS RELATED TO THE COMMITTEE POLYHEDRAL SEPARABILITY OF FINITE SETS

M.Yu. Khachai[1]

[1]*Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the RAS*

Abstract

In papers [1, 2], results on the computational and approximational complexity of a minimum affine separating committee (*MASC*) problem are obtained for finite sets $A, B \subset \mathbb{Q}^n$. In particular, it is shown that this problem is *NP*-hard and does not belong to the class *Apx* (under the assumption approximability threshold that $P \neq NP$). Nevertheless, questions concerning the bounds for its effective approximability threshold and for the computational complexity of a number of practically important particular cases of the problem obtained by imposing additional constraints, for example, by fixing the dimension of the space, remained open. In this paper, a lower bound is presented for the polynomial of the problem in the general case, and the intractability of the problem in spaces of fixed dimension greater than unity is proved. In particular, it is shown that the problem of committee separability remains hard even when it is formulated on the plane (i.e., in the simplest non-trivial case). This result follows from the fact that the well-known *PC* problem on covering a finite planar set by straight lines, whose hardness was proved in [3], is polynomially reducible to the problem under consideration. The method of reduction represents a modification of the method that was described in [4] and was used there for proving the hardness of problems on piecewise linear separability of finite sets on the plane.

Keywords: combinatorial problems, committee polyhedral separability, computational and approximational

Citation: Khachai MYu. Computational complexity and approximability of combinatorial problems related to the committee polyhedral separability of finite sets [In Russian]. Computer Optics 2007; 31(3): 63-69.

Acknowledgements: The research was partly supported by the grants of the President of the Russian Federation (NSh-5595.2006.1 and MD-6768.2006.1) and the Russian Foundation for Basic Research (grants Nos. 07-01-399 and 07-07-168).

References:

[1] Khachai MYu. On the computational complexity of the minimum committee problem and related problems [In Russian]. Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR 2006; 406(6): 742-745.

[2] Khachai MYu. On the computational and approximational complexity of the minimum affine separating committee problem [In Russian]. Tavricheskiy Herald of Informatics and Mathematics 2006; 1: 34–43.

[3] Megiddo N, Tamir A. On the complexity of locating linear facilities in the plane. Operations research letters 1982; 1(5): 194-197.

[4] Megiddo N. On the complexity of polyhedral separability. Discrete and Computational Geometry 1988; 3: 325-337.

[5] Blum AL, Rivest RL. Training a 3-node Neural Network is NP-complete. Neural Networks 1992; 5: 117–127.

[6] Lin JH, Vitter JS. Complexity Results on Learning by Neural Nets. Machine Learning 1991; 6: 211–230.

[7] Mazurov VD. Committees of systems of inequalities and recognition problem [In Russian]. Kibernetika (Cybernetics) 1971; 3: 140–146.

[8] Mazurov VlD, Khachai MYu, Rybin AI. Committee Constructions for Solving Problems of Selection. Diagnostics and Prediction. Proceedings of the Steklov Institute of mathematics 2002; 1: S67–S101.

[9] Dinur I, Regev O, Smyth C. The hardness of 3- uniform hypergraph coloring. Proc. of the 43rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 2002.