

ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ, РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ

ЭФФЕКТИВНЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРИЗНАКИ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

В.В. Мясников^{1,2}

¹Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия,

²Самарский государственный аэрокосмический университет, Самара, Россия

Аннотация

В работе предлагается метод построения новых эффективных локальных линейных признаков (ЛЛП) сигналов и изображений, которые по построению наилучшим образом согласованы с некоторым критерием качества признака(ов). Под эффективным ЛЛП понимается пара: конечная импульсная характеристика (КИХ) и вычислительно эффективный алгоритм расчета свертки сигнала с этой КИХ (алгоритм вычисления признака). При построении используется разработанный автором метод построения эффективного алгоритма вычисления свертки [5,6], в частности, представленный в работе [5] прямой способ построения эффективного алгоритма. Показано, что построение эффективного ЛЛП приводит к КИХ-ам, отсчеты которых соответствуют последовательностям со специальными свойствами. Такие последовательности названы нормализованными МС-последовательностями. Для КИХ в виде нормализованной МС-последовательности соответствующий алгоритм расчета ЛЛП обладает наименьшей сложностью среди всех других алгоритмов, построенных для последовательностей того же класса. Представлен явный вид алгоритмов вычисления эффективных ЛЛП. Приведены примеры нормализованных МС-последовательностей и их семейств, дан пример эффективного набора ЛЛП.

Введение

Формирование признаков – один из важнейших этапов, возникающий при построении любой системы обработки информации (распознавания, анализа и т.п.). Связано это с тем, что итоговые качественные характеристики конструируемой системы являются жестко зависимыми от того описания в виде признаков, которое используется в ней для анализируемых объектов или явлений. В реальных практических задачах проблема построения и выбора признаков является чрезвычайно сложной, поскольку требует учета многих ограничений и удовлетворения многим требованиям, которые не только противоречивы, но к тому же не всегда допускают четкую математическую постановку: простейшим примером являются субъективные (и, часто, противоречивые) оценки пользователей системы, которые определяют «качество» ее работы в процессе эксплуатации. Поэтому до настоящего времени в большинстве практических задач процесс построения/синтеза признаков (указания, как именно из объекта или явления получить ту или иную характеристику, и какие именно характеристики следует считать признаками) остается в значительной степени процедурой эвристической, существенным образом зависимой как от специфики предметной области, так и от опыта и квалификации разработчика.

Естественно, что *при построении и выборе признаков принципиальным моментом является качество обработки* в системе. Универсальное требование «высокого качества» в зависимости от типа задачи и прикладной области может быть представлено в виде ряда специфических требований к признакам. Например [4], для задач распознавания и при-

ятия решений требование «качества» трансформируется в ряд требований к формируемому признаковому описанию: ограничения на значения (в частном случае это компактность классов в пространстве признаков), устойчивости, инвариантности к искажениям допустимого класса и т.д. Для задач другого типа и другой прикладной области эти требования могут быть иными. В то же время для рассматриваемого круга задач, связанных с обработкой цифровых сигналов и изображений, есть устоявшийся набор требований, которые неизменно предъявляются к используемым признакам.

Одним из основных требований к признакам в задачах рассматриваемого класса является *требование вычислительного характера*. Оно заключается в том, чтобы *существовал алгоритм расчета признаков, и этот алгоритм был вычислительно эффективным*. Необходимость первого требования обусловлена тем, что разработка любой системы происходит, как правило, в рамках некоторого лимита "ценового" ресурса. Это ограничивает возможности использования ряда средств формирования признаков. Например, подобное ограничение в области распознавания изображений может отразиться на ограничениях в использовании видеоаппаратуры, регистрирующей цветные изображения, либо обеспечивающей повышенную разрешающую способность. Второе требование к признакам появляется из необходимости удовлетворения определенным временным ограничениям, накладываемым на процесс распознавания в целом. Это требование типично для систем обработки реального времени, например, для бортовых систем дистанционного зондирования, систем оперативного контроля и других.

Ниже рассматривается метод построения отдельных (и групп) локальных линейных признаков (ЛЛП) цифровых сигналов и изображений, которые:

- обладают наилучшими (в классе) характеристиками вычислительной сложности при их вычислении по сигналу/изображению и
- позволяют при фиксированной (минимальной в классе) вычислительной сложности произвести выбор наилучшего(их) по качеству признака(ов) для конкретной задачи.

С учетом гарантированной вычислительной эффективности конструируемых ЛЛП, целесообразной областью их применения являются системы обработки цифровых сигналов и изображений, функционирующие в рамках жестких ограничений по времени. В частном случае – системы реального времени.

В основной части изложения рассматривается метод построения признаков применительно к обработке одномерных сигналов. Признаки для изображений могут быть получены, в простейшем случае, путем декартового произведения одномерных эффективных признаков. Более сложные способы построения, в частности построение наборов эффективных признаков или эффективных признаков с неразделимыми КИХ, будут являться предметом исследования в последующих работах автора.

Следует также отметить, что представленные ниже результаты существенным образом опираются на те положения и результаты, которые были получены в авторских работах [5,6]. Поэтому ниже приводится краткое описание полученных в указанных работах результатов.

Настоящая работа организована следующим образом. В первом разделе дается очень краткое изложение основных понятий и результатов работ [5,6]. Эти же работы рекомендуются читателю в случае возникновения неясностей в этом разделе.

Второй раздел является центральным в работе. В п. 2.1 определено понятие ЛЛП, сформулирована общая задача его построения, показана некорректность такой общей задачи и определены основные цели настоящей работы. В п. 2.2 второго раздела приведен вид алгоритма вычисления ЛЛП, приведены выражения для его сложности. В п. 2.3 выделен определенный подкласс признаков (последовательностей), которые порождают эффективные алгоритмы их вычисления. В п. 2.4 второго раздела приводятся положения, определяющие условия существования таких последовательностей и их единственность, приводится описание процедуры построения таких последовательностей. В п. 2.5 формулируется окончательная частная задача построения эффективного ЛЛП как задача построения последовательности обозначенного класса, порождающей алгоритм вычисления признака с наименьшей сложностью и наилучшим образом согласованной с заданным производящим функционалом.

В третьем разделе приводятся различные методы построения эффективных признаков, которые используют предложенную во втором разделе процедуру построения последовательностей, а также

сформулированную частную задачу построения эффективного ЛЛП.

Четвертый раздел содержит примеры различных эффективных ЛЛП и их семейств.

Пятый раздел содержит эскиз метода построения эффективного набора ЛЛП, а также один иллюстративный пример такого набора.

В заключение работы приводятся благодарности фондам, поддерживающим данную научную работу, а также список литературы.

1. Эффективный алгоритм над множеством алгоритмов вычисления свертки

Настоящий раздел содержит краткое изложение необходимых сведений и понятий из работ [5,6].

Рассмотрим задачу Z вычисления одномерной (линейной) свертки конечного входного сигнала

$$\{x(n)\}_{n=0}^{N-1} \text{ длины } N \text{ и КИХ } \{h(m)\}_{m=0}^{M-1} \text{ длины } M:$$

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=0}^{M-1} h(m)x(n-m), \quad (1)$$

$$n = \overline{M-1, N-1},$$

результатом решения которой является сигнал $\{y(n)\}_{n=0}^{N-M+1}$ длины $N-M+1$, называемый *выходным сигналом*. Отсчеты всех сигналов являются элементами некоторого коммутативного кольца \mathbf{K} с единицей.

Для решения задачи (1) существует целый ряд известных алгоритмов, которые условно можно разбить на множества [4,7-14]: алгоритмов прямой свертки $\{A_{DC}\}$, алгоритмов быстрой свертки $\{A_{FC}\}$

и рекурсивных алгоритмов $\{A_{RF}\}$. Идея построения алгоритма заключается в использовании некоторого опорного множества алгоритмов (программ) $\{A\}$, а также априорной информации о задаче

$$\mathfrak{S}_0 = \left(\{h(m)\}_{m=0}^{M-1}, \mathfrak{S}_x \right), \text{ которая известна до решения}$$

задачи вычисления свертки и представлена в виде КИХ и априорной информации \mathfrak{S}_x о свойствах обрабатываемого сигнала, для получения так называемого *эффективного алгоритма*. Под эффективным алгоритмом понимается алгоритм, который в вычислительном плане:

- для любой задачи Z оказывается не хуже наилучшего алгоритма опорного множества,
- для некоторых задач Z оказывается лучше наилучшего алгоритма опорного множества (строго эффективен).

Таким образом, определение процесса построения эффективного алгоритма заключается в конструировании отображения

$$\mathfrak{S}_0 \rightarrow A^{\mathfrak{S}}, \quad (2)$$

которое для заданного опорного множества алгоритмов $\{A\}$ и заданной априорной информации \mathfrak{S}_0 дает алгоритм $A^{\mathfrak{S}}$ с наименьшей вычислительной сложностью решения соответствующей задачи (1).

Поскольку процесс построения должен учитывать всю априорную информацию о задаче, искомый алгоритм A^3 в дальнейшем называется *алгоритмом, индуцированным априорной информацией о задаче*.

Следует отметить, что идея использования множества алгоритмов для построения «наилучшего» в некотором смысле алгоритма, была предложена в 70-х годах академиком Ю.И. Журавлевым [3] для построения корректного алгоритма распознавания. Статья [6] автора настоящей работы развивает эту идею применительно к задаче вычисления свертки, используя другое формализованное представление алгоритма и, как следствие, иную алгебраическую систему.

Для построения отображения (2) в работе [6] вводится алгебраическая система алгоритмов вычисления свертки: конкретизируются отношения между алгоритмами (лучше, хуже и т.п.), а также операции (распространения, сужения и сложения). Также вводится расширение $[\{A\}]$ опорного множества алгоритмов $\{A\}$, построенное на основе простого эквивалентного преобразования выражения (1). Расширением $[\{A\}]$ оказывается множество алгоритмов определенной модели CR. Каждый алгоритм $A^{CR} \in [\{A\}]$ модели CR использует при вычислении (1) некоторые алгоритмы опорного множества. В результате задача конструирования отображения (2) заключается в поиске в расширении $[\{A\}]$ алгоритма с наименьшей сложностью. Такой алгоритм и определяется как *алгоритм A^3 , индуцированный априорной информацией о задаче*.

В общем случае, то есть при произвольном опорном множестве, процесс построения индуцированного (эффективного) алгоритма оказывается чрезвычайно сложным. Однако, на практике основной интерес представляет множество алгоритмов вида $\{A_{DC}\} \cup \{A_{FC}\} \cup \{A_{RF}\}$. В работе [6] показано, что для построения эффективного алгоритма над множеством $\{A_{DC}\} \cup \{A_{FC}\} \cup \{A_{RF}\}$ достаточно построить индуцированный алгоритм над множеством алгоритмов $\{A_{DC}\} \cup \{A_{FC}\}$. Как показано в той же работе, процесс построения состоит из трех хорошо формализованных операции. Он представляет собой конечную (по объему вычислений) численную процедуру, которая дает решение в виде точных значений параметров модели CR для индуцированного алгоритма A^3 .

В работе [5] рассмотрен частный случай построения эффективного (индуцированного) алгоритма, который позволяет указать его параметры напрямую, то есть без использования численной процедуры. Такое построение оказывается возможным, если КИХ представлена в виде обобщенного (дискретного) сплайна, удовлетворяющего определенным ограничениям. В работе [5] показано, что в этом случае можно установить биекцию между такими

сплайнами и алгоритмами модели CR, построенными для пустой априорной информации о свойствах сигнала $\mathfrak{S}_x = (N, \emptyset)$ и использующими в качестве опорного множества единственный алгоритм прямого вычисления свертки A_{DC} , $\{A\} = \{A_{DC}\}$ ($|\{A\}| = 1$). Наличие биекции, кроме того, позволяет по сплайн-представлению КИХ моментально получить информацию о сложности соответствующего алгоритма модели CR, порождаемого этим сплайн-представлением.

Для построения эффективных локальных линейных признаков используется похожий подход. А именно, вначале обобщаются результаты работы [5] в том смысле, что вместо сплайн-представления (дискретно-заданной) КИХ используется множество последовательностей, удовлетворяющих некоторым ограничениям. Как показано ниже, в этом случае также удается установить биекцию между основными параметрами последовательности и порождаемым ею алгоритмом. Сложность порождаемого алгоритма также оказывается прямой функцией основных параметров последовательности. Тогда для построения эффективного признака остается выбрать последовательность (КИХ), которая порождает алгоритм его вычисления с минимальной сложностью в классе последовательностей.

2. Эффективные локальные линейные признаки

Определение 1. *Локальным линейным признаком (ЛЛП) длины M над \mathbf{K}* называется пара $(\{h(m)\}_{m=0}^{M-1}, A)$, где $\{h(m)\}_{m=0}^{M-1}$ - некоторая КИХ,

задаваемая в виде конечной последовательности над \mathbf{K} и удовлетворяющая ограничению $h(m) \neq 0$, $h(M-1) \neq 0$, а A - алгоритм вычисления свертки (1) произвольного входного сигнала над \mathbf{K} с КИХ $\{h(m)\}_{m=0}^{M-1}$.

На практике, как правило, используется не один, а несколько признаков [10-14]. Они могут использоваться как отдельные алгоритмы вычисления (независимо-вычисляемые признаки), так и единый алгоритм. В последнем случае данное выше определение может быть обобщено следующим образом.

Определение 2. *Набором из R локальных линейных признаков (набором ЛЛП) длины M над \mathbf{K}* называется пара $(\{h_r(m)\}_{m=0, M-1; r=0, R-1}, A)$, где:

- $\forall r = \overline{0, R-1}$ $\{h_r(m)\}_{m=0}^{M-1}$ - некоторые КИХ, задаваемые в виде конечных последовательностей над \mathbf{K} и удовлетворяющие ограничению

$$h_0(0) \neq 0,$$

$$\forall r \in \overline{0, R-1} \exists m \in \overline{0, M-1} h_r(m) \neq 0,$$

$$\exists r \in \overline{0, R-1} h_r(M-1) \neq 0.$$

- A - алгоритм (множественной корреляции) вычисления набора сверток (1) произвольного входного сигнала над \mathbf{K} с набором КИХ

$$\left\{h_r(m)\right\}_{\substack{m=0, M-1, \\ r=0, R-1}}.$$

Настоящая работа посвящена задаче построения эффективного в вычислительном плане ЛЛП. Построение набора эффективных ЛЛП может быть выполнено путем обобщения излагаемого подхода.

2.1. Общая задача построения эффективных локальных линейных признаков

Задачу построения эффективных ЛЛП удобно определить, используя введенную в работах [5,6] и описанную в первом разделе настоящей работы формализацию задачи вычисления свертки и собственно метод построения эффективного алгоритма (2). В этом случае задача построения вычислительно эффективного ЛЛП может быть определена как задача конструирования отображения

$$\mathfrak{S}_x \rightarrow \left(\left\{h(n)\right\}_{n=0}^{M-1}, A^{\mathfrak{S}}\right), \quad (3)$$

где пара $\left(\left\{h(n)\right\}_{n=0}^{M-1}, A^{\mathfrak{S}}\right)$ связана отображением (2),

в котором $\mathfrak{S}_0 = \left(\left\{h(n)\right\}_{n=0}^{M-1}, \mathfrak{S}_x\right)$.

Прежде чем дать окончательное определение рассматриваемой ниже задачи построения эффективных ЛЛП, сделаем ряд замечаний, связанных с практическими ограничениями такой задачи. На практике при построении признаков класс обрабатываемых сигналов либо не известен, либо чрезвычайно обширен. Это не позволяет серьезно учитывать априорную информацию о свойствах сигнала \mathfrak{S}_x . Кроме того, естественным требованием является максимальная «автономность» функционирования алгоритмов вычисления признаков. Это выражается в том, что при построении признака не следует ориентировать на «богатое» опорное множество алгоритмов. С практической точки зрения наиболее интересным является решение, когда такое множество вообще отсутствует, а вычисление свертки производится напрямую по выражению (1). Учитывая, что такой способ вычисления свертки выполняет алгоритм прямого вычисления свертки A_{DC} , далее считаем, что только этот алгоритм и формирует доступное опорное множество. Таким образом, рассматриваемая ниже задача решается при ограничениях:

$$\bullet \mathfrak{S}_x = (N, \emptyset), \quad (4)$$

$$\bullet \{A\} = \{A_{DC}\} \quad \left(|\{A\}| = 1\right). \quad (5)$$

Как показано в [5,6], эти ограничения приводят к тому, что алгоритмы $A^{CR} \in \left[\{A_{DC}\}\right]$ из расширения оказываются подобными рекурсивному алгоритму вычисления свертки с функцией сложности вида:

$$u\left(A^{CR}\right) \frac{N-M+1}{N} = (K_h - 1) + \sum_{s=0}^{S-1} |D_s| - \xi_{add}, \quad (6)$$

где $\{D_s\}_{s=0}^{S-1}$ - интервалы/области допустимого покрытия КИХ $\left\{\tilde{h}(m)\right\}_{m=0}^{M+K_h-1}$, полученной сверткой исходной КИХ $\left\{h(m)\right\}_{m=0}^{M-1}$, с некоторой КИХ $\left\{g_h(k)\right\}_{k=0}^{K_h-1}$.

Теперь можно дать

Определение 3. *Общей задачей синтеза эффективного ЛЛП* длины M называется задача определения ЛЛП $\left(\left\{h(n)\right\}_{n=0}^{M-1}, A^{\mathfrak{S}}\right)$, где $A^{\mathfrak{S}} \in \left[\{A_{DC}\}\right]$

является алгоритмом, индуцированным априорной информацией о задаче

$$\mathfrak{S}_0 = \left(\left\{h(n)\right\}_{n=0}^{M-1}, (N, \emptyset)\right).$$

Очевидно, что решением этой общей задачи может являться на одна, а целое множество пар $\left(\left\{h(m)\right\}_{m=0}^{M-1}, A^{\mathfrak{S}}\right)$. Поэтому общая задача построения эффективного ЛЛП является аналитически некорректной.

С учетом сделанных замечаний основными целями настоящей работы являются:

- определение дополнительных ограничений, которые делают постановку общей задачи построения эффективного ЛЛП аналитически корректной или однозначно разрешимой (частная задача),
- нахождение решения этой (однозначной разрешимой) частной задачи в тех случаях, когда решение существует.

То, что задача построения эффективного ЛЛП есть также и задача построения индуцированного алгоритма, позволяет использовать весь аппарат, изложенный в работах [5,6] и кратко представленный в первом разделе. Наиболее близкой постановкой задачи, с учетом ограничений (4)-(5), является задача нахождения прямого решения задачи построения индуцированного алгоритма, рассмотренная в работе [5] и использующая сплайн-представление КИХ. Ниже использован аналогичный подход, но с обобщением на случай, когда КИХ есть конечная последовательность над \mathbf{K} . Для использование этого подхода ниже даны некоторые определения из работы [5], необходимые в дальнейшем.

Определение 4. Представление последовательности $h(0), h(1), \dots, h(M-1)$ над \mathbf{K} в виде:

$$h(m) = \begin{cases} 0, & m < 0, \\ \sum_{k=1}^K a_k h(m-k) + \tilde{\varphi}(m), & m \in \mathbf{Z}_+ \end{cases} \quad (7)$$

называется *расширенным линейным рекуррентным соотношением (РЛРС) К-го порядка* ($K \geq 0$)¹. Отсчеты $m \in \{n \in \mathbf{Z}_+ : \tilde{\varphi}(n) \neq 0\}$ называются *отсчетами неоднородности РЛРС*, множество $\Theta = \{n \in \mathbf{Z}_+ : \tilde{\varphi}(n) \neq 0\}$ - *областью отсчетов неоднородности РЛРС*, а вектор $(M, K, \{a_k\}_{k=1}^K, \{m, \tilde{\varphi}(m)\}_{m \in \Theta})$ - *вектором параметров РЛРС*.

Очевидно, для любой конечной линейной рекуррентной последовательности (ЛРП) порядка $K > 0$ можно указать вектор параметров РЛРС, воспользовавшись соотношением (7). Обратное, вообще говоря, не верно. То есть не любой вектор параметров $(M, K, \{a_k\}_{k=1}^K, \{m, \tilde{\varphi}(m)\}_{m \in \Theta})$ РЛРС соответствует конечной ЛРП длины M . Для того чтобы выделить подмножество таких векторов, дадим следующее

Определение 5.

Вектор $(M, K, \{a_k\}_{k=1}^K, \{m, \tilde{\varphi}(m)\}_{m \in \Theta})$ называется *корректным вектором параметров РЛРС*, если последовательность $\{h(m)\}$, являющаяся решением РЛРС (7) с этим вектором параметров, конечна и $\forall m \in \overline{0, M-1} \quad h(m) = 0$.

Естественно, представление конечной ЛРП с помощью РЛРС всегда дает корректный вектор параметров РЛРС.

2.2. Алгоритм модели CR, порождаемый кусочно-однородной последовательностью над K

Настоящий раздел содержит обобщение алгоритма модели CR, порождаемого сплайн-представлением КИХ, на случай когда КИХ представлена в виде последовательности (над \mathbf{K}) определенного класса.

Пусть, далее, конечная последовательность $\{h(m)\}_{m=0}^{M-1}$ над \mathbf{K} удовлетворяет некоторому РЛРС порядка² K с вектором коэффициентов $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_K)^T$, а множество $\{m, \tilde{\varphi}(m)\}_{m \in \Theta}$ ($\Theta \subseteq [0, M+K-1] \cap \mathbf{Z}$) определяет отсчеты неоднородности РЛРС и их значения. Введем ограничения на последовательности:

- на порядок РЛРС: $K < M$, (8')
- на сетку (интервалы разбиения) $\Delta_{M-1, S}^{\mathbf{Z}}$:

¹ При $K=0$ выражение (7) записывается в виде:

$$h(m) = \begin{cases} 0, & m < 0, \\ \tilde{\varphi}(m), & m \geq 0. \end{cases}$$

² Сплаины порядка K удовлетворяют РЛРС порядка $(K+1)$.

$$0 = m_0 < \dots < m_s < \dots < m_S = M-1 \quad (m_s \in \mathbf{Z}) \quad (8'')$$

$$\forall s = \overline{1, S-1} \quad m_{s-1} + K \leq m_s.$$

- на расположение отсчетов неоднородности:

$$\forall s = \overline{1, S-1} \quad m_s \in \Theta \wedge [m_s + K, m_{s+1}) \cap \Theta = \emptyset \wedge m_s \notin \Theta, \quad (8''')$$

- на значения последовательности:

$$h(0) \neq 0, \quad h(M-1) \neq 0. \quad (8''')$$

На ограничения (8')-(8''') будем в дальнейшем ссылаться как на (8).

Определение 6. Последовательность $\{h(m)\}_{m=0}^{M-1}$ над \mathbf{K} , удовлетворяющая РЛРС порядка K с вектором коэффициентов \bar{a} ($a_k \in \mathbf{K}$) и множеством отсчетов неоднородности $\{m, \tilde{\varphi}(m)\}_{m \in \Theta}$ ($\Theta \subseteq [0, M+K-1] \cap \mathbf{Z}$), удовлетворяющая ограничениям (8), называется *кусочно-однородной (КО) последовательностью типа* (K, S, \bar{a}) над \mathbf{K} .

Проводя аналогию со сплайнами, каждая КО-последовательность с сеткой $\Delta_{M-1, S}^{\mathbf{Z}}$ может быть разбита на S однородных ЛРП $\{p_s(m)\}_{s=0}^{S-1}$, для каждой из которых есть начальные значения ЛРП $p_s(m_s), \dots, p_s(m_s + K - 1)$. А значения последовательности $p_s(m_s + K), \dots$ могут быть получены с помощью однородного ЛРС порядка K с вектором коэффициентов \bar{a} . Естественно, не любая последовательность может быть представлена как КО-последовательность в силу ограничений (8).

Далее можно ввести *характеристики* КО-последовательности типа (K, S, \bar{a}) следующим образом (за пределами области определения конечной последовательности полагаем $h(m) = 0 \quad m \in \overline{0, M-1}$).

$$V_s^* = \begin{cases} \mathbf{Z}_+ \cap [t_s, t_s + K - 1], & s = \overline{0, S-1}, \\ \mathbf{Z}_+ \cap [t_s + 1, t_s + K], & s = S. \end{cases}$$

$$t'_s = \begin{cases} t_s, & s = \overline{0, S-1}, \\ \arg \min_{m \in \{n \in V_s^* : \sum_{k=1}^K a_k h(n-k) \neq 0\}} m, & s = S. \end{cases} \quad (9')$$

$$t''_s = \begin{cases} \arg \max_{m \in \{n \in V_s^* : h(n) \neq \sum_{k=1}^K a_k h(n-k)\}} m, & s = \overline{0, S-1}, \\ \arg \max_{m \in \{n \in V_s^* : \sum_{k=1}^K a_k h(n-k) \neq 0\}} m, & s = S. \end{cases}$$

$$V_s = \mathbf{Z}_+ \cap [t'_s, t''_s], \quad s = \overline{0, S},$$

$$\theta_s = \begin{cases} \left\{ m \in V_s : h(m) \neq \sum_{k=1}^K a_k h(m-k) \right\}, & s = \overline{0, S-1}, \quad (9'') \\ \left\{ n \in V_s : \sum_{k=1}^K a_k h(n-k) \neq 0 \right\}, & s = S. \end{cases}$$

Определение 7. Дискретным дефектом в узле $m_s (s = \overline{0, S})$ КО-последовательности $\{h(m)\}_{m=0}^{M-1}$ типа (K, S, \bar{a}) над \mathbf{K} , заданной на сетке $\Delta_{M-1, S}^Z$, называется величина $r_s = |\theta_s|$. Дискретным дефектом КО-последовательности типа (K, S, \bar{a}) и ее суммарным дискретным дефектом называются величины, соответственно, r и r_Σ :

$$r = \max_{s=0, S} r_s, \quad r_\Sigma = \sum_{s=0}^S r_s.$$

Вектором дискретных дефектов называется вектор $\bar{r} = (r_0, \dots, r_S)^T$.

Для характеристик КО-последовательности и ее дискретных дефектов справедливы аналоги нескольких утверждений из работы [5]. Ниже они даются без доказательств³.

Предложение 1. Пусть $\{h(m)\}_{m=0}^{M-1}$ - КО-последовательность типа (K, S, \bar{a}) над \mathbf{K} , заданная на сетке $\Delta_{M-1, S}^Z$. Тогда область отсчетов неоднородности Θ ее РЛРС удовлетворяет соотношениям:

$$\Theta = \bigcup_{s=0}^S \theta_s, \quad |\Theta| = r_\Sigma. \quad \blacksquare \quad (10)$$

Лемма 1. Пусть $\{h(m)\}_{m=0}^{M-1}$ - КО-последовательность типа (K, S, \bar{a}) над \mathbf{K} , заданная на сетке $\Delta_{M-1, S}^Z$. Тогда

$$1 + \max(S, K) \leq r_\Sigma \leq (S+1)K. \quad \blacksquare \quad (11)$$

Также по аналогии с алгоритмом модели CR, порождаемым сплайн-представлением КИХ, введем алгоритм модели CR для КО-последовательности. Для этого представим каждое из множеств $\theta_s (s = \overline{0, S})$ в виде набора из $I_s \geq 1$ подмножеств $\{\theta_r^s\}_{r \in I_s}$, удовлетворяющих ограничениям:

$$\{\theta_r^s\}_{r=0, I_s-1} : \theta_r^s = [t'_{rs}, t''_{rs}] \cap \mathbf{Z},$$

$$\theta_r^s \cap \theta_j^s = \emptyset, \quad \bigcup_{r \in \overline{0, I_s-1}} \theta_r^s = \theta_s \quad (s = \overline{0, S}).$$

Тогда, полагая значения КИХ $\{h(m)\}_{m=0}^{M-1}$ за пределами области определения равными нулю, имеем

Определение 8. Пусть $\{h(m)\}_{m=0}^{M-1}$ - КО-последовательность типа (K, S, \bar{a}) над \mathbf{K} , заданная на сетке $\Delta_{M-1, S}^Z$ с характеристиками $\{\theta_s^s\}_{s=0}^S$. Алгоритм модели CR называется алгоритмом модели CR, порождаемым этой КО-последовательностью, если его параметры имеют вид:

- $K_h = K + 1, \quad K_x = 1,$
- отсчеты КИХ $\{g_h(k)\}_{k=0}^{K_h-1}$ и $\{g_x(k)\}_{k=0}^{K_x-1}$:

$$g_x(0) = 1, \quad g_h(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ -a_k, & k = \overline{1, K_h-1}. \end{cases}$$

- число интервалов $\sum_{s=0}^S I_s$;
- интервалы допустимого покрытия области определения КИХ:

$$D_{sr} = \left[\min_{m \in \theta_r^s} m, \max_{m \in \theta_r^s} m \right] \quad s = \overline{0, S}, \quad r = \overline{0, I_s-1};$$

- функции $\{\tilde{h}_{sr}(m)\}$:

$$\forall m \in D_{sr} \quad \tilde{h}_{sr}(m) = h(m) - \sum_{k=1}^K a_k h(m-k),$$

$$s = \overline{0, S}, \quad r = \overline{0, I_s-1}$$

- параметры-алгоритмы:

$$A_{prep} = A_{DC}, \quad A_{sr} = A_{DC},$$

$$s = \overline{0, S}, \quad r = \overline{0, I_s-1}.$$

□

Формальное представление алгоритма модели CR может быть упрощено и, аналогично случаю со сплайнами в работе [5], представлено в рекурсивном виде. Ниже даны две формы алгоритма: для КО-последовательности общего вида и для последовательности в виде многочлена над \mathbf{K} .

Алгоритм модели CR, порождаемый КО-последовательностью над \mathbf{K} общего вида

Шаг 1. (этапы 2-3 модели). Формирование предварительного результата:

$$\tilde{y}(n) = \sum_{m \in \Theta} x(n-m) \tilde{\varphi}(m), \quad n = \overline{0, N-1}.$$

³ Напоминаем, что сплайны порядка K удовлетворяют РЛРС порядка $(K+1)$.

Шаг 2. (этап 4 модели). Постобработка результата:

$$y(n) = \sum_{k=1}^K a_k y(n-t) + \tilde{y}(n), \quad n = \overline{0, M-1},$$

с иницирующими значениями $y(t) \equiv 0$. \square

Алгоритм модели CR, порождаемый КО-последовательностью в виде алгебраического многочлена над \mathbf{K}

Шаг 1. (этапы 2-3 модели). Формирование предварительного результата:

$$\tilde{y}(n) = \sum_{m \in \Theta} x(n-m) \tilde{\varphi}(m), \quad n = \overline{0, N-1}$$

Шаг 2. (этап 4 модели). Постобработка результата:

$$\begin{aligned} y_k^x(n) &\equiv \tilde{y}(n), \quad n = \overline{0, N-1}, \\ y_k^h(n) &= y_k^h(n-1) + y_{k+1}^h(n), \\ &\quad n = \overline{0, N-1}, \quad k = \overline{K-1, 0}, (K \geq 1) \\ y(n) &\equiv y_0^h(n), \quad n = \overline{0, N-1}. \end{aligned}$$

\square

Представленные явные расчетные соотношения для алгоритма, порождаемого КО-последовательностью, позволяют записать также явные выражения для сложности этих алгоритмов как функции от типа (K, S, \bar{a}) и характеристик (9) КО-последовательности.

Предложение 2. Вычислительная сложность алгоритма A^{CR} модели CR, порождаемого КО-последовательностью $\{h(m)\}_{m=0}^{M-1}$ типа (K, S, \bar{a}) над \mathbf{K} , имеет вид
- в случае КО-последовательности общего вида:

$$u(A^{CR}) = \frac{N}{N-M+1} (r_\Sigma + K - \xi_{add}), \quad (12')$$

- в случае КО-последовательности в виде алгебраического многочлена над \mathbf{K} :

$$u(A^{CR}) = \frac{N}{N-M+1} (r_\Sigma + (K-1)\xi_{add}). \quad (12'')$$

■

Следствие 1. (минимальная и максимальная сложность алгоритма модели CR, порождаемого КО-последовательностью). Вычислительная сложность алгоритма A^{CR} модели CR, порождаемого КО-последовательностью $\{h(m)\}_{m=0}^{M-1}$ типа (K, S, \bar{a}) над \mathbf{K} , удовлетворяет ограничениям
- в случае КО-последовательности общего вида:

$$\begin{aligned} \max(S, K) + (K+1) - \xi_{add} &\leq \\ &\leq \frac{N-M+1}{N} u(A^{CR}) \leq (S+2)K - \xi_{add}, \end{aligned} \quad (13')$$

- в случае КО-последовательности в виде значений алгебраического многочлена над \mathbf{K} :

$$\begin{aligned} \max(S, K) + 1 + (K-1)\xi_{add} &\leq \\ &\leq \frac{N-M+1}{N} u(A^{CR}) \leq \\ &\leq (S+1)K + (K-1)\xi_{add}. \end{aligned} \quad (13'')$$

Доказательство: непосредственное следствие предложения 2 и леммы 1. \blacksquare

2.3. Нормализованные МС-последовательности

Из выражений (12) очевидно, что суммарный дискретный дефект r_Σ КО-последовательности типа (K, S, \bar{a}) напрямую влияет на сложность порождаемого ею алгоритма модели CR. Это позволяет ввести специальное подмножество КО-последовательностей, для каждой из которых значение вычислительной сложности порождаемого ею алгоритма модели CR достигает своего минимального значения.

Определение 9. КО-последовательность $\{h(m)\}_{m=0}^{M-1}$

типа (K, S, \bar{a}) над \mathbf{K} называется *обобщенной МС-последовательностью (ОМС-последовательностью) типа (K, S, \bar{a})* , если ее суммарный дискретный дефект достигает минимального значения, определяемого выражением (11):

$$r_\Sigma = 1 + \max(S, K). \quad (14)$$

Определение является не только простым для проверки, но также и полезными при синтезе ОМС-последовательностей. А именно, справедливо следующее очевидное

Предложение 3. (достаточное условие) Для того, чтобы КО-последовательность $\{h(m)\}_{m=0}^{M-1}$ типа (K, S, \bar{a}) над \mathbf{K} была ОМС-последовательностью достаточно, чтобы ее дискретный дефект был равен единице:

$$r = \max_{s=0, S} r_s = 1. \quad \blacksquare \quad (15)$$

Также справедливо

Предложение 4. Алгоритм A^{CR} модели CR, порожденный ОМС-последовательностью типа (K, S, \bar{a}) над \mathbf{K} имеет сложность

- для ОМС-последовательности общего вида:

$$\begin{aligned} u(A^{CR}) &= \frac{N-M+1}{N} = \\ &= \max(S, K) + (K+1) - \xi_{add}; \end{aligned} \quad (16')$$

- для ОМС-последовательности в виде значений алгебраического многочлена над \mathbf{K} :

$$u(A^{CR}) \frac{N-M+1}{N} = \max(S, K) + 1 + (K-1)\xi_{add}. \quad (16'')$$

Доказательство: следствие определения 9 и следствия 1. ■

Очевидно, что сложность алгоритмов модели CR, порождаемых ОМС-последовательностями типа (K, S, \bar{a}) над \mathbf{K} , совпадает с минимальной сложностью алгоритмов модели CR, порожденных КО-последовательностями этого типа.

В таблице 1 приведены значения суммарного дискретного дефекта r_Σ для ОМС-последовательности типа (K, S, \bar{a}) при различных значениях порядка K РЛРС и количества узлов S . Серые ячейки таблицы соответствуют тем парам (S, K) , для которых вычисления выражения (11) производились по формуле $r_\Sigma = K + 1$, а светлые - $r_\Sigma = S + 1$.

Таблица 1. Суммарный дискретный дефект ОМС-последовательности порядка K с S интервалами

S	K	1	2	3	4
1	1	2	3	4	5
2	1	3	3	4	5
3	1	4	4	4	5
4	1	5	5	5	5
5	1	6	6	6	6
6	1	7	7	7	7
7	1	8	8	8	8

Анализ пары выражений (16) и таблицы 1 показывает, что даже среди ОМС-последовательностей, порождающих алгоритмы модели CR с минимальной сложностью, есть такие, которые порождают алгоритмы с наименьшей сложностью. Для примеров из таблицы минимальную сложность порождаемых алгоритмов дают те ОМС-последовательности, у которых число узлов оказывается меньше порядка РЛРС и $r_\Sigma = K + 1$. Учитывая соотношение (10), которое связывает мощность множества отсчетов неоднородности Θ РЛРС и суммарный дефект КО-последовательности выражением $|\Theta| = r_\Sigma$ (для ОМС последовательностей $r_\Sigma = K + 1$ или $r_\Sigma = S + 1$), можно дать следующее определение для таких «удобных» последовательностей.

Определение 10. Последовательность $\{h(m)\}_{m=0}^{M-1}$ над \mathbf{K} , представимая в виде РЛРС порядка K с областью неоднородности Θ , называется *МС-последовательностью порядка K над \mathbf{K}* , если выполняется ограничение:

$$|\Theta| = K + 1. \quad (17)$$

ОМС-последовательность, не являющаяся МС-последовательностью, называется *избыточной ОМС-последовательностью*.

Для удобства обозначений в дальнейшем обобщенный сплайн, отсчеты которого формируют МС-последовательность порядка K над \mathbf{R} , называем *МС-сплайном* порядка K .

Замечание 1. В некоторых очень редких случаях можно получить неравенство $|\Theta| < K + 1$, например, $|\Theta| = K$. Подобный случай рассмотрен в одном из примеров п.4.1. Поэтому более корректным было бы дать определение МС-последовательности как последовательности у которой $|\Theta| \leq K + 1$. Однако, для произвольной длины КИХ, порядка ЛРС и коэффициентов ЛРС ограничение $|\Theta| = K$ выполнено быть принципиально не может в силу того, что число ограничений на КО-последовательность оказывается большим, чем число независимых переменных. Поэтому в дальнейшем придерживаемся соотношения (17). Исключение проблем с указанным неравенством достигается в вводимом ниже подмножестве «нормализованных МС-последовательностей».

Справедливы следующие легко доказываемые утверждения

Предложение 5 ОМС-последовательность типа (K, S, \bar{a}) над \mathbf{K} является МС-последовательностью порядка K над \mathbf{K} тогда и только тогда, когда $S \leq K$. ■

Предложение 6. Алгоритм A^{CR} модели CR, порождаемый МС-последовательностью порядка K над \mathbf{K} , имеет вычислительную сложность - в случае МС-последовательности общего вида:

$$u(A^{CR}) \frac{N-M+1}{N} = 2K + 1 - \xi_{add}, \quad (18')$$

- в случае МС-последовательности в виде значений алгебраического многочлена над \mathbf{K} :

$$u(A^{CR}) \frac{N-M+1}{N} = K + 1 + (K-1)\xi_{add}. \quad \blacksquare (18'')$$

Легко убедиться в том, что любая ОМС-последовательность задается с точностью до масштаба. То есть, если все элементы ОМС-последовательности типа (K, S, \bar{a}) с некоторой областью отсчетов неоднородности умножить на некоторое ненулевое число, то полученная последовательность также будет ОМС-последовательностью типа (K, S, \bar{a}) с той же областью отсчетов неоднородности. Чтобы исключить из рассмотрения «одинаковые» в этом смысле последовательности примем следующее определение. Оно корректно, поскольку для любой

МС- и ОМС-последовательности нулевой отсчет находится в области отсчетов неоднородностей: "0" ∈ Θ.

Определение 11. МС-последовательность над **K** называется *нормализованной*, если $h(0) = 1$ и

$$\sum_{m \in \Theta} 2^m I(\tilde{\varphi}(m) \neq 0) - 2^{M+K} \sum_{m \in \Theta} I(\tilde{\varphi}(m) = 0) - \frac{1}{2} I(\tilde{\varphi}(M+K-1) = 1) \rightarrow \min_{\{h(m)\}_{m=0}^{M-1}, \{\tilde{\varphi}(m)\}_{m \in \Theta}}. \quad (19)$$

Замечание 2. Дополнительное условие (19), на первый взгляд, представляется ненужным или избыточным, поскольку множество отсчетов неоднородностей определяется как

$\Theta = \{m = \overline{0, M+K-1} : \tilde{\varphi}(m) \neq 0\}$, и, следовательно, сумма

$$\sum_{m \in \Theta} 2^m I(\tilde{\varphi}(m) \neq 0) - 2^{M+K} \sum_{m \in \Theta} I(\tilde{\varphi}(m) = 0)$$

является постоянной и равной $\sum_{m \in \Theta} 2^m$. Однако,

как уже было указано в замечании 1, возможно построение специфических МС-последовательностей, в которых $|\Theta| < K+1$ и, следовательно, указанная сумма может изменяться. Для того, чтобы сузить множество МС-последовательностей, которые могут в этом случае претендовать на класс нормализованных МС-последовательностей, введено это ограничение.

Положив значение первого отсчета последовательности равным единице $h(0) = 1$, тем самым фиксировано и значение дефекта в этом отсчете: $\varphi(0) = 1$. Следовательно, в алгоритме модели CR, порождаемом нормализованной МС-последовательностью, можно добиться исключения одного умножения (на первом шаге).

Лемма 2. Алгоритм A^{CR} модели CR, порождаемый нормализованной МС-последовательностью порядка K над **K**, имеет сложность - в случае последовательности общего вида:

$$u(A^{CR}) \frac{N-M+1}{N} = 2K, \quad (20')$$

- в случае последовательности в виде значений алгебраического многочлена над **K**:

$$u(A^{CR}) \frac{N-M+1}{N} = K + K\xi_{add}. \quad (20'')$$

■

Представляющими интерес являются вопросы:

- существует или нет нормализованная МС-последовательность для заданных параметров

РЛРС $M, K \in \mathbf{N}$, $\{a_k\}_{k=1}^K$ и области отсчетов неоднородности Θ , и что является признаком ее существования ($a_k \neq 0, N > M, M \geq K \geq 1$);

- как построить МС-последовательность для указанных параметров РЛРС и области Θ , если такая последовательность существует;
- единственна ли МС-последовательность для указанных параметров РЛРС и области отсчетов неоднородности;
- какое количество МС-последовательностей можно построить для указанных параметров M, K, \bar{a} РЛРС.

На все эти вопросы для случая последовательностей над полем **F** отвечает следующий подраздел.

2.4. О единственности нормализованной МС-последовательности. Семейство нормализованных МС-последовательностей

В рамках настоящего подраздела рассматриваются последовательности над полем **F**.

Существование и единственность нормализованной МС-последовательности

Теорема 1. (о существовании нормализованной МС-последовательности)

Пусть заданы параметры РЛРС $M, K \in \mathbf{N}$, $\{a_k\}_{k=1}^K$ ($a_k \neq 0, N > M, M \geq K \geq 1$) и область отсчетов неоднородности Θ , для которой выполняются соотношения:

$$|\Theta| = K+1, \quad "0" \in \Theta, \quad "M+K-1" \in \Theta. \quad (21)$$

Нормализованная МС-последовательность порядка K над полем **F** с указанными параметрами РЛРС либо не существует, либо существует и единственна.

Доказательство: В соответствие с определением РЛРС МС-последовательность должна удовлетворять (7) на всей области определения (за ее пределами доопределяем последовательность нулевыми значениями). Записывая по одному уравнению для каждого отсчета $m = \overline{0, M+K-1}$, а также учитывая ограничение $h(0) = 1$ для нормализованного МС-последовательности, имеем СЛАУ (22).

В СЛАУ (22) переменными являются как значения искомой последовательности $\{h(m)\}_{m=0}^{M-1}$, так и значения отсчетов неоднородности $\{\tilde{\varphi}(m)\}_{m \in \Theta \setminus \{0\}}$.

Таким образом, в приведенной СЛАУ всего $(M+K)$ переменных. Она может быть совместна или несовместна.

$$\begin{aligned}
h(0) &= 1, \\
h(m) - \sum_{k=1}^K a_k h(m-k) &= 0, \quad m \in \frac{[1, M-1] \cap \mathbf{Z}}{\Theta}, \\
\sum_{k=1}^K a_k h(m-k) &= 0, \quad m \in \frac{[M, M+K-1] \cap \mathbf{Z}}{\Theta}, \\
h(m) - \sum_{k=1}^K a_k h(m-k) - \tilde{\varphi}(m) &= 0, \\
m &\in ([1, M-1] \cap \mathbf{Z}) \cap \Theta, \\
\sum_{k=1}^K a_k h(m-k) + \tilde{\varphi}(m) &= 0, \\
m &\in ([M, M+K-2] \cap \mathbf{Z}) \cap \Theta, \\
a_K h(M-1) + \tilde{\varphi}(M+K-1) &= 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

Если ранги расширенной и основной матриц СЛАУ не совпадают, то СЛАУ (22) оказывается не совместной. Следовательно, искомая МС-последовательность не существует.

Допустим, ранги расширенной и основной матриц СЛАУ совпадают. В этом случае СЛАУ совместна. Тогда возможны две различные ситуации.

В первой ситуации равные ранги основной и расширенной матриц СЛАУ имеют значение $M+K$. Тогда решение СЛАУ существует и единственно. В этой ситуации возможны два случая:

- $h(M-1) \neq 0$ - тогда решением СЛАУ является нормализованная МС-последовательность с заданными параметрами РЛРС и областью отсчетов неоднородности. В силу единственности решения СЛАУ, условие (19) выполняется автоматически, и нормализованная МС-последовательность единственна;
- $h(M-1) = 0$ - тогда $\text{supp}(h(m)) < M$, и полученная в результате решения СЛАУ последовательность не удовлетворяет условию (8'''). Следовательно, искомая нормализованная МС-последовательность не существует.

Во второй ситуации равные ранги основной и расширенной матриц СЛАУ имеют значение меньше $M+K$. Следовательно существует множество решений СЛАУ (22). Причиной этому является то, что число (линейно-независимых) уравнений оказалось меньше, чем число переменных. Выходом из этой ситуации является пополнение СЛАУ (22) некоторым количеством дополнительных уравнений. Ими являются следующие K уравнений-равенств, выполнение которых меняет значение функционала (19):

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(m) &= 0, \quad m \in \Theta \setminus \{0, M+K-1\}, \\
\tilde{\varphi}(M+K-1) &= 1.
\end{aligned} \tag{23}$$

Число комбинаций уравнений равно, очевидно, 2^K . Причем, если в СЛАУ использовать сразу все уравнения из (23), то СЛАУ оказывается переопределенной и неразрешимой. Следовательно, разре-

шая непротиворечивая СЛАУ находится среди возможных 2^K пополненных СЛАУ. Как и для первоначальной СЛАУ, каждая из этих пополненных СЛАУ может быть несовместной или совместной. Совместные СЛАУ могут быть крамеровскими (однозначно разрешимыми) или нет. Выделим из всего множества СЛАУ только крамеровские СЛАУ. Из них выделим те, решение которых удовлетворяет условию $h(M-1) \neq 0$. Это множество может быть пустым или не пустым. Если это множество пусто, то нормализованная МС-последовательность не существует (эта ситуация соответствует случаю, когда для любого решения первоначальной СЛАУ (22) выполняется равенство $h(M-1) = 0$). Если множество однозначных решений, для которых $h(M-1) \neq 0$, не является пустым, то все решения – потенциальные претенденты на нормализованную МС-последовательность. Для однозначного указания одной из последовательностей достаточно ввести строгое упорядочивание на множестве найденных решений и решаемых СЛАУ. Именно такое упорядочивание вводит функционал выражения (19). Он строго упорядочивает все множество из 2^K пополненных СЛАУ (22)-(23). Поскольку отобранные СЛАУ – их подмножество, то среди них существует единственная СЛАУ, соответствующая минимальному значению функционала в (19). Следовательно, получаемое решение – единственное. ■

Замечание 3. Упорядочивание решений СЛАУ, вводимое функционалом (19) основано на упорядочивании бинарных векторов-последовательностей:

$$I(\tilde{\varphi}(0) \neq 0), I(\tilde{\varphi}(1) \neq 0), \dots, I(\tilde{\varphi}(M+K-1) \neq 0).$$

Оно включает упорядочиванию по числу отсчетов неоднородности, которые оказались нулевыми, дополненное обычным лексикографическим упорядочиванием бинарных векторов.

Доказательство теоремы 1 в конструктивной форме отвечает на вопрос о существовании нормализованной МС-последовательности с заданными параметрами РЛРС. То есть позволяет, с одной стороны, установить необходимые и достаточные условия существования нормализованной МС-последовательности и, с другой стороны, позволяет указать способ построения такой последовательности, если она существует.

Предложение 7. (необходимое условие существования нормализованной МС-последовательности) Пусть выполняются условия теоремы 1. Для того чтобы нормализованная МС-последовательность с указанной областью отсчетов неоднородности Θ существовала необходимо, чтобы ранги обычной и расширенной матриц СЛАУ (22) были равными. ■

Предложение 8. (достаточное условие существования нормализованной МС-последовательности) Пусть выполняются условия теоремы 1. Для того чтобы нормализованная МС-последовательность с указанной областью отсчетов неоднородности Θ существовала достаточно, чтобы определитель матрицы СЛАУ (22) был отличен от нуля и решение СЛАУ удовлетворяло условию: $h(M-1) \neq 0$. ■

Процедура построения нормализованной МС-последовательности

Процедура построения очевидным образом следует из доказанной теоремы и включает в себя в качестве основной операции решение СЛАУ (22), при необходимости пополненной дополнительными ограничениями (23). Каждое такое решение при его существовании приводит к некоторому значению функционала (19). Если множество решений пополненных СЛАУ оказалось непустым, то в качестве окончательного решения выбирается то из них, которое дает наименьшее значение функционала. Если множество решений оказалось пустым, то искомая МС-последовательность не существует.

Семейство нормализованных МС-последовательностей

Определение 12. (K, M, \bar{a}) - семейством нормализованных МС-последовательностей, обозначаемым $\wp(K, M, \bar{a})$, называется множество нормализованных МС-последовательностей порядка K с носителем $[0, M-1]$, удовлетворяющих РЛРС с коэффициентами \bar{a} ($a_k \neq 0$).

Предложение 9. (о количестве нормализованных МС-последовательностей в семействе)

$$\forall M > K \geq 1, \bar{a} (a_k \neq 0) \quad |\wp(K, M, \bar{a})| \leq C_{M+K-2}^{K-1}. \quad (24)$$

Доказательство: Поскольку $|\Theta| = K+1$, а $"0" \in \Theta$, $"M+K-1" \in \Theta$, то число последовательностей в семействе – это количество различных размещений оставшихся $K-1$ отсчетов неоднородности на дискретном интервале $1, M+K-2$. ■

Для $K=1$ неравенство в (24) превращается в равенство. Однако в общем случае оно дает завышенную оценку мощности семейства $\wp(K, M, \bar{a})$, поскольку не для любого расположения отсчетов неоднородности можно построить нормализованную МС-последовательность. Несмотря на это, выражение (24) позволяет произвести качественный анализ. А именно, для $K=2$ имеем $C_M^1 = M$ потенциальных последовательностей. Поскольку функция C_{M+K-2}^{K-1} (при $K \ll M$) возрастает по K , то число потенциально существующих нормализованных МС-последователь-

ностей в одном семействе $\wp(K, M, \bar{a})$ будет больше числа отсчетов последовательности. Следовательно, при $K > 2$ среди последовательностей одного семейства $\wp(K, M, \bar{a})$ может оказаться большое количество линейно зависимых. Это позволяет в рамках одного семейства отбирать те из последовательностей, которые наилучшим образом приспособлены к решению основной задачи анализа данных.

Замечание 4. Предложение 9 не гарантирует, что конкретное семейство МС-последовательностей не является пустым. То есть в общем случае возможна ситуация, когда для конкретных параметров (K, M, \bar{a}) семейства его мощность $|\wp(K, M, \bar{a})| = 0$. На практике такая ситуация встречается редко. Причиной обычно бывает «неудачный» выбор вектора \bar{a} .

Замечание 5. Минимизация функционала (19) путем решения множества пополненных СЛАУ (22)-(23) является достаточно трудоемким процессом. Однако автору настоящей работы на практике не разу не попадались СЛАУ (22), которые требовали бы пополнения. Первоначальная СЛАУ (22) оказывалась либо разрешимой единственным образом, либо не разрешимой. В таких ситуациях в алгоритме построения нормализованной МС-последовательности конечный «цикл» пополнения СЛАУ (22) уравнениями (23) не выполняется, очевидно, ни разу.

2.5. Частная задача построения эффективных локальных линейных признаков

Вернемся к основным целям работы, сформулированным в п. 2.1. Первой целью являлось определение дополнительных ограничений, которые делают постановку общей задачи построения эффективного ЛЛП аналитически корректной (частная задача). С учетом полученных результатов такие ограничения становятся очевидными и указаны ниже.

Сначала заметим, что для заданной длины последовательности, которая определяет КИХ для ЛЛП, и порядка РЛРС сложность алгоритмов модели СР, порождаемых нормализованными МС-последовательностями, оказывается минимальной среди последовательностей с теми же параметрами. Поэтому для синтеза эффективных ЛЛП целесообразно использовать именно нормализованные МС-последовательности. А для того чтобы однозначно задать эффективный признак, то есть саму нормализованную МС-последовательность над \mathbf{K} и эффективный алгоритм расчета свертки с ней, в дополнение к длине последовательности M следует указать еще и некоторые параметры ее РЛРС.

Во-первых, это порядок РЛРС K , который должен быть таким, чтобы получаемый признак был действительно эффективным. Ограничение на порядок очевидным образом следует из сопоставления

сложности (20) алгоритма A^{CR} модели CR, порождаемого нормализованной МС-последовательностью, и сложности единственного алгоритма A_{DC} опорного множества: $u_{A_{DC}}(M, N) = M - \xi_{add}$ [5,6].

Имеем:

$$\frac{N}{N - M + 1} 2K < M - \xi_{add},$$

здесь $\xi_{add}, \xi_{mul} \in \mathbf{R}[0,1]$ - относительные сложности операций сложения и умножения, задаваемые так, чтобы выполнялось условие: $\xi_{add} + \xi_{mul} = 1$.

Во-вторых, требуется задать значения коэффициентов РЛРС $\{a_k\}_{k=1}^K$, которые определяют «тип» последовательности.

Наконец, в-третьих, следует задать положение отсчетов неоднородностей, то есть область Θ . На практике область Θ может быть выбрана таким образом, чтобы признак удовлетворял некоторым дополнительным условиям: слабая или сильная коррелированность нормализованной МС-последовательности с некоторым заданным набором последовательностей, максимум дисперсии или энтропии рассчитываемого признака и т.д. Эти условия в общем случае могут быть заданы с помощью некоторого «производящего функционала», определение которого дано ниже.

Определение 13. Производящим функционалом $\Psi: \mathbf{K}^M \rightarrow \mathbf{R}$ называется вещественнозначная функция, которая для каждого M -мерного вектора $(h(0), \dots, h(M-1))^T$ над \mathbf{K} указывает вещественную величину, отражающую «степень пригодности» вектора: вектор считается «лучше», если значение производящего функционала на нем меньше.

Используя это определение, приходим к следующей формулировке частной задачи.

Определение 14. Частной задачей построения эффективного ЛЛП называется задача:

для заданных величин $\{a_k\}_{k=1}^K$ ($a_k \neq 0$) $N, M, K \in \mathbf{N}$, удовлетворяющих ограничениям $N > M$,

$K < \frac{N - M + 1}{2N} (M - \xi_{add})$, и заданного производящего функционала $\Psi(\dots)$ определить ЛЛП

$(\{h(m)\}_{m=0}^{M-1}, A^{CR})$, такой что:

- КИХ $\{h(n)\}_{n=0}^{M-1}$ является нормализованной МС-последовательностью с минимальным значением производящего функционала:

$$\Psi(h(0), \dots, h(M-1)) \rightarrow \min_{\{h(m)\}_{m=0}^{M-1}}; \quad (25)$$

- алгоритм $A^{CR} \in [\{A_{DC}\}]$ является алгоритмом модели CR, порождаемым последовательностью $\{h(n)\}_{n=0}^{M-1}$.

Справедливо

Предложение 10. Пусть $\Psi(\dots)$ - взаимнооднозначный производящий функционал. Если решение частной задачи построения эффективного ЛЛП существует, то:

- оно единственно, и
- A^{CR} является строго эффективным алгоритмом над опорным множеством $\{A_{DC}\}$.

Доказательство:

очевидное следствие теоремы 1 и замечания 4. ■

Ниже нам также понадобится следующее

Определение 15. Обобщенным производящим функционалом $\Psi\{\cdot\}: \mathbf{K}^{R \times M} \rightarrow \mathbf{R}$ называется вещественнозначная функция, которая для любого непустого конечного набора $\{(h_r(0), \dots, h_r(M-1))\}_{r=0}^{R-1}$ ($h_r(m) \in \mathbf{K}$) из R векторов длины M указывает степень «пригодности» этого набора: набор считается «лучше», если значение обобщенной производящего функционала на нем меньше.

Обобщенный производящий функционал используется для получения численной величины, которая характеризует «качество» набора последовательностей целиком.

Производящие функционалы Ψ могут быть заданы либо явно, либо путем формулировки некоторой оптимизационной задачи. В четвертом разделе работы приводятся примеры нормализованных МС-последовательностей/сплайнов. Все указываемые нормализованные МС-последовательности и сплайны являются решениями задачи синтеза эффективного ЛЛП для некоторых производящих функционалов. Безусловно, эти примеры не исчерпывают все возможные нормализованные МС-последовательности, охватывая только небольшое их подмножество, которое соответствует случаю малого порядка K и малого числа узлов S (для избыточных ОМС-последовательностей). Другие примеры могут быть получены аналитически или численно с использованием методов, представленных далее. Некоторые примеры ОМС-последовательностей и ОМС-сплайнов даны в работе [5].

3. Методы построения эффективных ЛЛП

Используя полученные теоретические результаты можно предложить различные методы построения эффективных ЛЛП как отдельных, так и целых семейств. Ниже дано краткое описание некоторых из них.

3.1. Методы построения эффективного ЛЛП

Прямой метод построения нормализованной МС-последовательности

В этом методе считаются заданными:

- параметры (K, M, \bar{a}) семейства МС-последовательностей, в котором ищется требуемая последовательность,
- положение отсчетов неоднородностей Θ . Естественно, область Θ должна удовлетворять ограничениям (21).

Требуется получить:

- нормализованную МС-последовательность.

Работа метода заключается:

- в выполнении процедуры построения нормализованной МС-последовательности, представленного в подразделе 2.4.

Комментарий:

В силу теоремы 1 для указанной области отсчетов неоднородности Θ нормализованная МС-последовательность либо не существует, либо существует и единственна. Ответ о существовании требуемой последовательности и сама последовательность (если таковая существует) в общем случае могут быть получены с помощью процедуры, представленной в конце раздела 2.4.

Метод построения нормализованной МС-последовательности, согласованной с производящим функционалом

В этом методе считаются заданными:

- длина последовательности M ,
- набор из $I > 0$ параметров $\{K^i, \bar{a}^i\}_{i=0, I-1}$, которые ограничивают множество семейств МС-последовательностей, среди которых ищется требуемая последовательность,
- производящий функционал $\Psi(\dots)$, который характеризует предпочтение к требуемой последовательности.

Требуется получить:

- нормализованную МС-последовательность

$$\{h^*(n)\}_{n=0}^{M-1}.$$

Работа метода заключается:

- в получении для каждого набора параметров (K^i, M, \bar{a}^i) ($i = \overline{0, I-1}$) семейства МС-последовательностей $\wp(K^i, M, \bar{a}^i)$ с помощью пря-

мого метода синтеза (K^i, M, \bar{a}^i) -семейства МС-последовательностей (см. ниже метод 3),

- в выборе из множества $\bigcup_{i=0}^{I-1} \wp(K^i, M, \bar{a}^i)$ полу-

ченных нормализованных МС-последовательностей такой, которая доставляет минимум производящего функционала:

$$\{h^*(n)\}_{n=0}^{M-1} = \arg \min_{\{h(n)\}_{n=0}^{M-1} \in \bigcup_{i=0}^{I-1} \wp(K^i, M, \bar{a}^i)} \Psi(h(0), \dots, h(M-1)).$$

3.2. Методы построения подмножеств эффективных ЛЛП

Прямой метод построения (K, M, \bar{a}) -семейства нормализованных МС-последовательностей

В этом методе считаются заданными:

- параметры (K, M, \bar{a}) семейства МС-последовательностей.

Требуется получить:

- семейство нормализованных МС-последовательностей $\wp(K, M, \bar{a})$.

Работа метода заключается:

- в генерации конечного множества $\{\Theta\}$ всех возможных областей отсчетов неоднородностей,
- в вызове для каждой области $\Theta \in \{\Theta\}$ из полученного множества прямого метода синтеза нормализованной МС-последовательности (см. первый метод п.3.1). Если для конкретной конфигурации нормализованная МС-последовательность существует, то она пополняет семейство $\wp(K, M, \bar{a})$.

Метод построения подмножества из R нормализованных МС-последовательностей

В этом методе считаются заданными:

- число R требуемых признаков (последовательностей),
- длина последовательности M ,
- набор параметров $\{K^i, \bar{a}^i\}_{i=0, I-1}$ ($I > 0$), которые ограничивают множество семейств МС-последовательностей, в которых ищутся R последовательностей,
- обобщенный производящий функционал $\Psi\{\}$.

Требуется получить:

- множество из R нормализованных МС-последовательностей.

Работа метода заключается:

- в получении для каждого набора параметров (K^i, M, \bar{a}^i) ($i = \overline{0, I-1}$) семейства МС-последовательностей $\wp(K^i, M, \bar{a}^i)$ с помощью прямого

метода построения (K^i, M, \bar{a}^i) -семейства нормализованных МС-последовательностей (см. первый метод, п. 3ю2),

- в генерации из множества $\bigcup_{i=0}^{I-1} \phi(K^i, M, \bar{a}^i)$ всех доступных нормализованных МС-последовательностей всех подмножеств из R последовательностей;
- для каждого сгенерированного подмножества из R нормализованных МС-последовательностей производится расчет значения обобщенного производящего функционала $\Psi \{ \}$,
- выбор среди всех подмножеств такого, для которого значение обобщенного производящего функционала оказывается минимальным.

Комментарии:

- Возможное изменение в постановке задачи заключается в замене ограничения на количество признаков R ограничением на суммарную сложность алгоритмов модели CR расчета признаков. Метод решения в этом случае претерпевает минимальные изменения, связанный с процессом генерации подмножеств нормализованных МС-последовательностей – генерируются все максимальные подмножества⁴, сложность алгоритмов для которых оказывается не выше заданной.
- Другой вариант постановки задачи – получение заданного количества ЛЛП за указанное время. В этом случае I наборов параметров (K^i, M, \bar{a}^i) ($i = \overline{0, I-1}$) не задаются, а сами наборы генерируются случайным образом. Ограничение на количество наборов следует из ограниченности времени их обработки.
- Пусть $\left| \bigcup_{i=0}^{I-1} \phi(K^i, M, \bar{a}^i) \right| = T$. Тогда количество всех подмножеств из R последовательностей составляет величину C_T^R . Поскольку величина T на практике достаточно велика, представленный в методе полный перебор подмножеств, дающий оптимальное решение, на практике может быть заменен на квазиоптимальный способ. Среди широко известных способов универсальными являются два: *метод последовательного присоединения* (признака) и *метод последовательного отсоединения* (признака).

⁴ Максимальным подмножеством некоторого множества называется его подмножество, удовлетворяющее некоторому ограничению, и в которое нельзя добавить ни одного элемента из множества без нарушения этого ограничения.

4. Примеры нормализованных МС-последовательностей и их семейств

4.1. Нормализованные МС-последовательности

Последовательность: $S=K=1$
 $(a_1 \neq 1)$

Эта однородная ЛРП представляет собой функцию экспоненциального вида:

$$h(m) = a_1^m h(0) \quad (h(0) = 1).$$

Вычислительная сложность (20) алгоритма модели CR, порождаемого этой нормализованной МС-последовательностью, имеет вид

$$u(A^{CR}) \frac{N - M + 1}{N} = 2.$$

Нормализованный МС-сплайн в виде полинома нулевого порядка: $S=K=1$
 $(a_1 = 1)$

Функция представляет собой широко известную из практики ЦОС «прямоугольную» функцию – индикатор с носителем $[0, M - 1]$. Вычислительная сложность (20) алгоритма модели CR, порождаемого этим МС-сплайном, имеет вид

$$u(A^{CR}) \frac{N - M + 1}{N} = 1 + \xi_{add}.$$

Полиномиальные нормализованные МС-сплайны: $S=1, K \geq 2 (K > S)$

Эти нормализованные МС-сплайны имеют только один интервал, то есть совпадают на области определения с полиномом степени $K-1$. С учетом допустимых значений дискретных дефектов на узлах общее строение такого полинома имеет вид:

$$S_K(m) = \beta \prod_{i_1=1}^{K_1} (m - i_1) \prod_{i_2=1}^{K_2} (m - (M - 1 + i_2)), \quad (26)$$

$K_1 + K_2 = K - 1.$

В частном случае $K_1 = K - 1$ имеем:

$$S_{K-1}(m) = \beta \prod_{i=1}^{K-1} (m - i). \quad (27)$$

Для $K - 1 \geq 1$ сплайн (27) совпадает со сдвинутым «факториальным полиномом» или «обобщенной степенью» [1,14]. Этот тип полиномов использовался в работах по параллельно-рекурсивным алгоритмам вычисления сверток [12-14]. Их вид приведен на рисунке 1.

Вычислительная сложность (20) алгоритмов модели CR, порождаемых такими полиномами:

$$u(A^{CR}) \frac{N - M + 1}{N} = K + K \xi_{add}.$$

Полиномиальные нормализованные
МС-сплайны:
 $S = K = 2$

Эти сплайны имеют два сегмента, на каждом из которых они совпадают с линейной функцией. Вектор дискретных дефектов для этого сплайна оказывается единичным $(r_0, r_1, r_2) = (1, 1, 1)$, хотя РЛРС имеет порядок $K=2$. Можно показать, что искомый нормализованный МС-сплайн в этом случае имеет следующий вид ($t_1 \in \mathbf{Z}_+$):

$$S_1(\Delta_{M-1,2}^z; t) = \begin{cases} t+1, & 0 \leq t \leq t_1, \\ \frac{t_1+1}{t_1-M}(t-M), & t_1 \leq t < M. \end{cases}$$

Примеры таких сплайнов приведены на рисунке 2.

Вычислительная сложность (20) порождаемых этими нормализованными МС-сплайнами алгоритмов модели CR вычисления признака имеет вид:

$$u(A^{CR}) \frac{N-M+1}{N} = 2 + 2\xi_{add}.$$

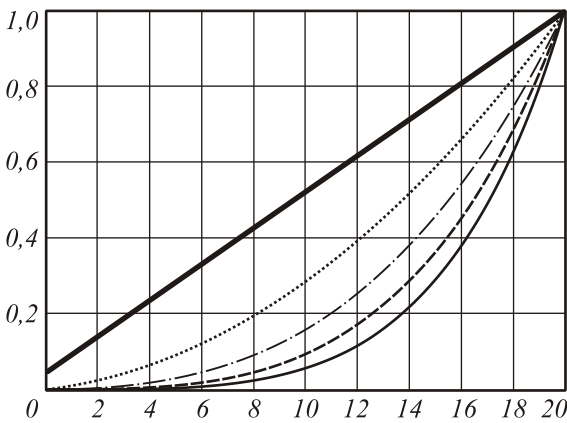


Рис. 1. График $S_{k-1}(m) / \max_{m \in [0, M-1]} S_{k-1}(m)$

для нормализованных МС-сплайнов типа «обобщенная степень» порядков $(K-1)=1, 2, 3, 4, 5$, заданных на $[0, 20]$

Полиномиальные нормализованные
МС-сплайны для
 $S = K = 3$

Примеры полиномиальных МС-сплайнов, которые являются решениями СЛАУ (22) для рассматриваемой ситуации, приведены на рисунке 3.

Как видно из рисунка, эти сплайны имеют вид «колокола», составленного из «волнообразных» сегментов. В более общей ситуации, когда $K = S > 3$, полиномиальные нормализованные МС-сплайны также имеют плавный «волнообразный» характер.

Вычислительная сложность (20) порождаемых этими квадратичными сплайнами алгоритмов модели CR имеет вид:

$$u(A^{CR}) \frac{N-M+1}{N} = 3 + 3\xi_{add}.$$

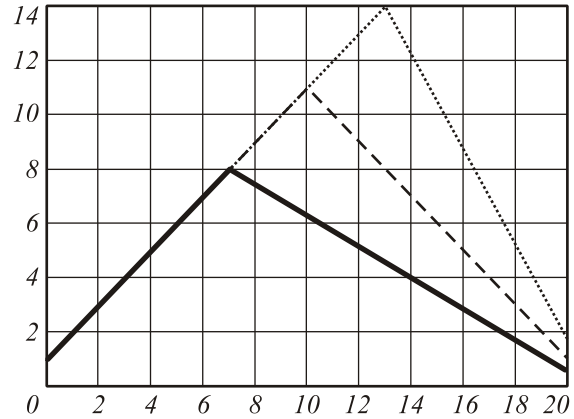


Рис. 2. Полиномиальные нормализованные МС-сплайны для $S=K=2$

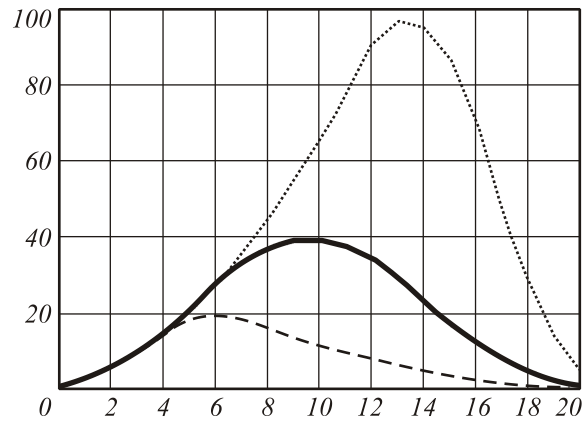


Рис. 3. Полиномиальные нормализованные МС-сплайны для $K=S=3$

Нормализованная МС-последовательность:
последовательность Фибоначчи

Последовательность Фибоначчи задаются следующим образом [1]:

$$\begin{aligned} K &= 2, \quad S = 1; \\ h(0) &= 1, \quad h(1) = 1, \\ h(m) &= h(m-1) + h(m-2), \quad m \geq 2. \end{aligned}$$

Очевидно:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 1, \quad \varphi(1) = 0, \\ \varphi(M) &\neq 0, \quad \varphi(M+1) \neq 0 \end{aligned} \Rightarrow |\Theta| = 3 = K + 1.$$

Следовательно, последовательности Фибоначчи являются нормализованной МС-последовательностью. Вычислительная сложность (20) алгоритма модели CR, порождаемого этой МС-последовательностью, имеет вид

$$u(A^{CR}) \frac{N-M+1}{N} = 4. \tag{28}$$

Нормализованные обобщенные МС-сплайны
в виде вещественного базиса Фурье:

$$K = 2, S = 1$$

Пусть $a_1 = 2\cos(\alpha), a_2 = -1$ ($\omega = \exp(i\alpha), \alpha \in \mathbf{R}$), тогда $h(t)$ - синусная или косинусная функция. Рассматривая случай с синусной функцией, имеем:

$$h(m) = c \cdot \sin(\alpha(m + \beta)) = c \left(\frac{\omega^\beta}{2i} \omega^m - \frac{\omega^{-\beta}}{2i} \omega^{-m} \right), m = \overline{0, M-1}.$$

Для построения нормализованного МС-сплайна необходимо обеспечить $|\Theta| = K + 1 = 3$. Этого можно добиться, например, если удовлетворить двум ограничениям:

$$h(0) = c \sin(\alpha\beta) = 1, \quad h(-1) = c \sin(\alpha(-1 + \beta)) = 0.$$

Соотношения выполняются, если $\beta = 1, c = (\sin(\alpha))^{-1}$ ($\sin(\alpha) \neq 0$). Тогда функция

$$h(t) = \frac{\sin(\alpha(t+1))}{\sin(\alpha)} \quad t \in [0, M-1].$$

является обобщенным нормализованным МС-сплайном. Сложность соответствующего алгоритма модели CR задается выражением (28).

Замечание 6. Синус является периодической функцией с множеством регулярно расположенных нулей. Поэтому можно подобрать величину α и, следовательно, коэффициенты a_1, a_2 таким образом, чтобы при сохранении $h(-1) = 0$ выполнялось равенство $h(M) = 0$. Тогда величина сложности алгоритма модели CR, порождаемого этим нормализованным МС-сплайном, будет еще ниже, соответствуя суммарному дефекту $|\Theta| = K = 2$. Такая ситуация возможна для узкого класса функций, в работе она отдельно не рассматривается.

Нормализованные обобщенные МС-сплайны
в виде вещественного базиса Фурье:

$$S = K = 2$$

Пусть

$$a_1 = 2\cos(\alpha), a_2 = -1 \quad (\omega = \exp(i\alpha), \alpha \in \mathbf{R}),$$

тогда функции $p_0(t), p_1(t)$, задающие КИХ $h(t)$ на частичных интервалах $[0, m_1], [m_1, M-1]$ являются синусными (косинусными) функциями. Несколько примеров таких обобщенных нормализованных МС-сплайнов представлены на рисунках 5а-5з, все они относятся к одному семейству и соответствуют различным положениям узла m_1 . Порождаемый этим нормализованным МС-сплайном алгоритм модели CR имеет сложность в виде выражения (28).

«Масштабированные» В-сплайны

Можно показать, что значения любого В-сплайна [1,2] порядка $K-1$, взятые с равномерным шагом $1/n$ ($n \in \mathbf{Z}_+, n > K$), также формируют нормализованную МС-последовательность порядка K . Порождаемый таким В-сплайном алгоритм модели CR имеет сложность в виде (20^n) .

4.2. Семейства нормализованных
МС-последовательностей

Семейство вещественных

МС-последовательностей типа «Фибоначчи»

Семейство построено при следующих параметрах РЛРС:

$$M = 8, K = 2, a_1 = a_2 = 1.$$

Функции семейства и расположение соответствующего для них «свободного» отсчета неоднородности приведены на рис. 4. Последняя последовательность, изображенная на рис. 4з – это истинная последовательность Фибоначчи.

Сложность алгоритма модели CR, порождаемого каждой последовательностью этого семейства, задается выражением (28).

Семейство МС-последовательностей типа
«вещественного базиса Фурье»

Семейство построено при следующих параметрах РЛРС:

$$M = 8, K = 2;$$

$$a_1 = 2\cos(31) \approx 1,7143346, a_2 = -1.$$

Функции семейства и расположение соответствующего для них «свободного» отсчета неоднородности приведены на рисунке 5. Последняя последовательность, изображенная на рисунке 5з – это

$$\text{последовательность отсчетов } \frac{\sin(31^\circ(t+1))}{\sin(31^\circ)}.$$

Сложность алгоритма модели CR, порождаемого каждой последовательностью этого семейства, задается выражением (28).

5. Построение эффективного набора ЛЛП

Общая задача построения эффективного набора из R ЛЛП может быть определена как задача конструирования отображения

$$\mathfrak{X}_x \rightarrow \left\{ \left\{ h_r(m) \right\}_{m=0, M-1, r=0, R-1}, A^\mathfrak{X} \right\}, \quad (29)$$

где $A^\mathfrak{X}$ - алгоритм, индуцированный априорной ин-

формацией $\mathfrak{X}_0 = \left\{ \left\{ h_r(m) \right\}_{m=0, M-1, r=0, R-1}, \mathfrak{X}_x \right\}$ задачи множе-

ственной корреляции. Аналогично случаю с отдельным эффективным ЛЛП, эта общая задача является некорректной.

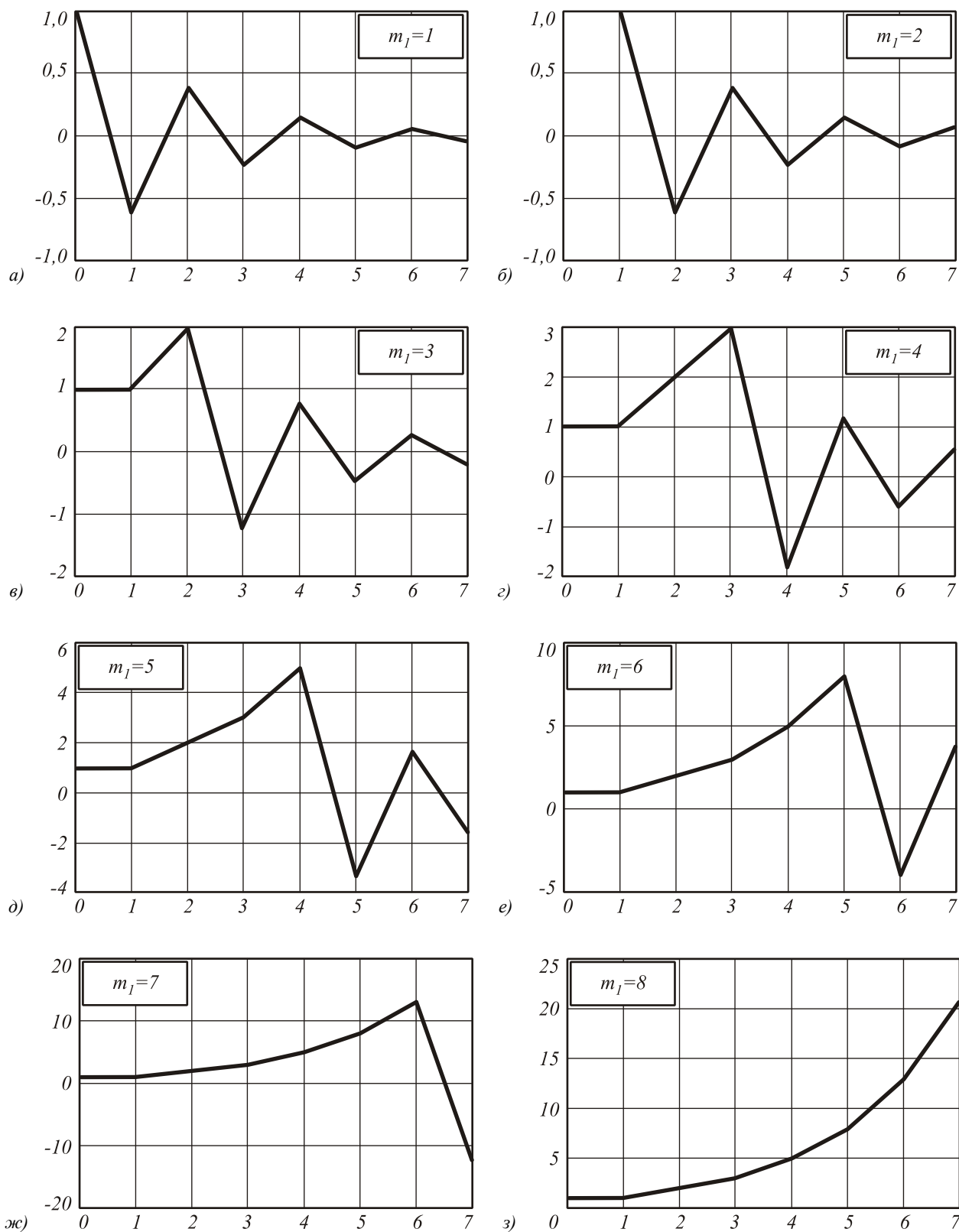


Рис. 4. Семейство нормализованных MS-последовательностей длины $M=8$ типа «Фибоначчи»

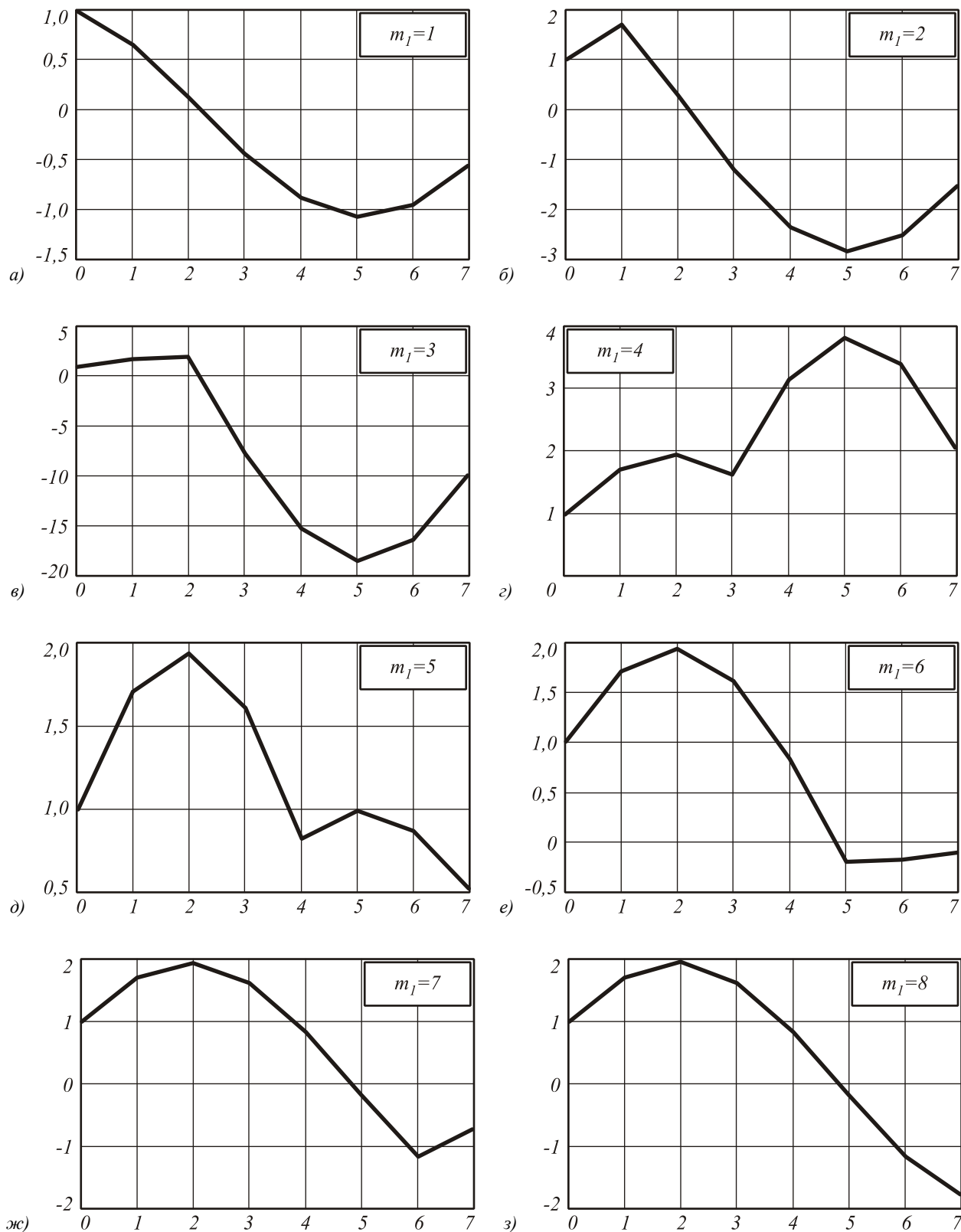


Рис. 5. Семейство нормализованных МС-последовательностей длины $M=8$ типа «вещественного базиса Фурье»

Идея конструирования отображения (29) заключается в обобщении изложенного в настоящей работе метода построения эффективного ЛЛП. Можно показать, что, следуя этой идеи, процесс построения эффективного набора ЛЛП приводит к задаче построения набора взаимно-рекуррентных МС-последовательностей. Один пример набора последовательностей приведен на рис. 6.

Детальное изложение предлагаемого подхода построения эффективного набора ЛЛП будет дано в последующих работах автора.

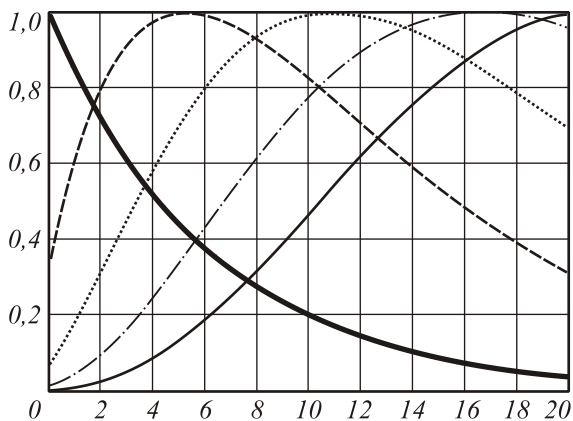


Рис. 6. Пример набора последовательностей «экспоненциального типа», соответствующих эффективным наборам ЛЛП

Заключение

Предложен метод построения новых эффективных ЛЛП сигналов и изображений, которые по построению являются вычислительно строго эффективными и оказываются наилучшим образом согласованы с некоторым критерием качества признака(ов), задаваемым в виде производящего функционала. Показано, что построение эффективного ЛЛП приводит к КИХ-ам, которые соответствуют подмножеству последовательностей со специальными свойствами, названными в работе нормализованными МС-последовательностями. Для КИХ в виде нормализованных МС-последовательностей соответствующий алгоритм расчета ЛЛП обладает наименьшей сложностью среди всех других алгоритмов, построенных для последовательностей того же класса. Представлен явный вид алгоритмов вычисления эффективных ЛЛП, дано выражение для его вычислительной сложности. Приведены примеры нормализованных МС-последовательностей, их семейств и набора последовательностей, соответствующих эффективному набору ЛЛП.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке:

- Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), проекты: № 06-01-00616-а, № 07-07-97610-р_офи;
- Фонда содействия отечественной науке.

Литература

1. Гельфонд, А.О. Исчисление конечных разностей. Изд. 3-е, испр. / А.О. Гельфонд // М.: Наука, 1967.
2. Завьялов, Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко – М.: Наука, 1980.
3. Журавлев, Ю.И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации / Ю.И. Журавлев // Проблемы кибернетики, 1978. — N 33. — С. 5–68.
4. Методы компьютерной обработки изображений. Под ред. В.А.Сойфера. 2-е изд., испр. // М.: Физматлит, 2003.
5. Мясников, В.В. Сплаины как средство построения эффективных алгоритмов локального линейного преобразования / В.В. Мясников // Компьютерная оптика, 2007. — Т. 31. — № 2. — С. 52-68.
6. Мясников, В.В. Эффективный алгоритм над множеством алгоритмов вычисления свертки / В.В. Мясников // Компьютерная оптика, 2006. — В. 29. — С. 78-117.
7. Оппенгеймер, А.В. Цифровая обработка сигналов / А.В. Оппенгеймер, Р.В. Шафер — М.: Связь, 1979.
8. Рабинер, Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд — М.: Мир, 1978.
9. Сергеев, В.В. Параллельно-рекурсивные КИХ-фильтры в задачах обработки изображений / В.В. Сергеев // Радиотехника, 1990. — № 8. — С. 38-41.
10. Форсайт, Д.А. Компьютерное зрение. Современный подход / Д.А. Форсайт, Ж. Понс — М.: ИД «Вильямс», 2004.
11. Шапиро, Л. Компьютерное зрение / Л. Шапиро, Дж. Стокман — М.: Бином, 2006.
12. Ярославский, Л.П. Введение в цифровую обработку изображений / Л.П. Ярославский — М.: Сов. радио, 1979.
13. Glumov, N.I. Application of polynomial bases for image processing using sliding window / N.I. Glumov, V.V. Myasnikov, V.V. Sergeev // SPIE, Image Processing and Computer Optics, 1994. — Vol. 2363. — P. 40-49.
14. Glumov, N.I. Parallel-Recursive Local Image Processing and Polynomial Bases / N.I. Glumov, V.V. Myasnikov, V.V. Sergeev // Proceedings of the Third IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems ICECS'96, Rodos, Greece, 1996. — Vol. 2. — P. 696-699.
15. Myasnikov, V.V. Construction of Integer-Value Polynomials for Recursive Calculation of the Convolution with FIR-Filter / V.V. Myasnikov // Тезисы 7-й Международной конференции «International Conference on Pattern Recognition and Image Analysis», Санкт-Петербург, Россия, 2004. С. 331-334.

EFFICIENT ALGORITHMS FOR LOCAL DISCRETE WAVELET TRANSFORM

V.V. Myasnikov^{1,2}

¹Image Processing Systems Institute of the RAS, Samara, Russia,

²Samara State Aerospace University (SSAU), Samara, Russia

Abstract

The main objective of this paper is to develop a new class of computationally efficient algorithms for local wavelet transforms. It is expected that a hierarchical (pyramidal-recursive) hardware inherent with the known algorithm “with holes” (“algorithme a trous,” M. Holschneider et al, 1989) [12] and the algorithm for fast orthogonal wavelet transform (Mallat algorithm, 1987) [3,6,11] is to be replaced with a horizontal-recursive hardware, where wavelet transform coefficients are calculated for all proper-scaled wavelet positions in series, i.e. using a sliding window mode. Replacement of the hierarchical hardware with the horizontal-recursive one allows us to handle a problem of base wavelets that meet the requirements of a recursive solution. This problem generally includes a number of sub-tasks associated with the analysis of main wavelet classes: base (mother), two-parameter, frameworks (frames), R-wavelets, semi-orthogonal, and orthogonal wavelets. This paper is devoted to efficient algorithms developed for the simplest class of base (mother) wavelets, as well as to wavelet conditions/restrictions for which these algorithms exist. Several examples are given for new and well-known wavelets with efficient (recursive) algorithms for calculation of local discrete wavelet transform.

Keywords: local wavelet transform, discrete wavelet, recursive solution, analysis of main wavelet classes

Citation: Myasnikov VV. Efficient algorithms for local discrete wavelet transform [In Russian]. Computer Optics 2007; 31(4): 86-94.

Acknowledgement: The work was supported by:

- the Russian Foundation for Basic Research (RFBR), project No. 06-01-00616-a;
- the Russian Science Support Foundation.

References:

- [1] Anderson JA. Discrete mathematics with combinatorics [In Russian]. Moscow: “Williams” Publishing House, 2004.
- [2] Gelfond AO, ed. Calculus of finite differences [In Russian]. Moscow: “Nauka” Publisher, 1967.
- [3] Dobeshi I. Ten lectures on wavelet [In Russian]. Moscow - Izhevsk: “Regular and Chaotic Dynamics” Scientific and Publishing Center, 2001.
- [4] Zavyalov YuS, Kvasov BI, Miroshnichenko VL. Methods of spline-functions [In Russian]. Moscow: “Nauka” Publisher, 1980.
- [5] Kopenkov VN, Myasnikov VV. Fast algorithms for local discrete wavelet transform with Haar basis [In Russian]. Samara International Scientific and Technical Conference, PIT 2006; 2: 113-118.
- [6] Mallat S. A wavelet tour of signal processing [In Russian]. Moscow: “Mir” Publisher, 2005.
- [7] Myasnikov VV. Splines as a means of construction of efficient algorithms of linear local transformation [In Russian]. Computer Optics 2007; 31(2): 52-68.
- [8] Myasnikov VV. Efficient algorithm over the set of the convolution algorithms [In Russian]. Computer Optics 2006; 29: 78-117.
- [9] Nussbaumer H. Fast Fourier transform and convolution algorithms [In Russian]. Moscow: “Radio i svyaz” Publisher, 1985.
- [10] Petukhov AP. Introduction to wavelet theory. Handbook [In Russian]. St. Petersburg Polytechnic University Publisher, 1999.
- [11] Chui CK. Introduction to wavelets [In Russian]. Moscow: “Mir” Publisher, 2001.
- [12] Holschneider M. A real-time algorithm for signal analysis with help of the wavelet transform. Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space, Chapter A. Berlin: Springer-Verlag, 1989; 289-297.