

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ВИДЕ СПЕКТРА ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Л.Л. Досколович^{1,2}, Н.Л. Казанский^{1,2}, С.И. Харитонов^{1,2}

¹Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия,

²Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия

Аннотация

Рассмотрен вывод выражений для поверхностных электромагнитных волн из уравнений Максвелла. Получено интегральное представление электромагнитного поля на границе раздела двух сред через угловой спектр поверхностных электромагнитных волн. Приведены аналоги интеграла Кирхгофа для описания дифракции поверхностных электромагнитных волн.

Ключевые слова: поверхностная электромагнитная волна, уравнения Максвелла, дисперсионное уравнение, дифракция, угловой спектр, интеграл Кирхгофа.

Большое число публикаций, посвященных изучению поверхностных электромагнитных волн (ПЭВ), обусловлено перспективами их эффективного применения в оптических системах и приборах. Оптическая обработка информации в наномасштабе является одним из основных направлений, где использование ПЭВ является особенно перспективным [1-3]. Решение задачи дифракции ПЭВ на микро- и нанобъектах, расположенных непосредственно на поверхности распространения, является ключевой задачей для применения ПЭВ в приложениях нанофотоники.

В работах [4-8] рассмотрены дифракционные структуры, предназначенные для преобразования и фокусировки ПЭВ. Результаты работ [4-8] указывают на существование явной аналогии между распространением и дифракцией ПЭВ и распространением и дифракцией света. В работе [9] рассматривается дифракция, возникающая при распространении ПЭВ по двум металлическим полосам в области сплошной металлической пленки (рис.1).

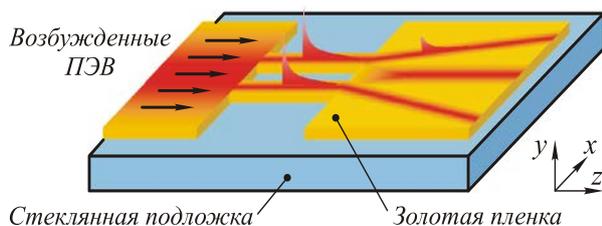


Рис.1. Схема эксперимента по дифракции ПЭВ на двух «щелях»

Указанный эксперимент является аналогом знаменитого эксперимента Юнга по изучению дифракции света на двух щелях. В [9] отмечено большое сходство между дифракционной картиной света на двух щелях и соответствующей интерференционной картиной ПЭВ. На основе наблюдаемого сходства авторами [9] записаны интегральные представления электромагнитного поля на поверхности распространения через угловой спектр ПЭВ. В [10] указанные представления использованы для расчета линзы ПЭВ и моделирования распространения ПЭВ.

Приведенные в [9,10] интегральные выражения по форме совпадают с представлением решения скалярной задачи дифракции через угловой спектр плоских волн [11, 12]. В работе [7] использован аналог интегрального представления Френеля-Кирхгофа для описания распространения ПЭВ.

В данной статье приведен строгий вывод интегрального представления электромагнитного поля на поверхности распространения через угловой спектр ПЭВ. Показано, что использованные в [7, 9, 10] соотношения являются приближенными. В статье получены уточненные аналоги интеграла Кирхгофа для моделирования дифракции и распространения ПЭВ.

Рассмотрим получение ПЭВ из решения уравнений Максвелла для двух полубесконечных сред с границей раздела при $y = 0$. При этом среды 1, 2 соответствуют областям $y < 0$ и $y > 0$ соответственно. В качестве оси распространения ПЭВ выберем ось Oz .

Получим предварительно общие выражения для компонент электромагнитного поля в средах 1, 2. Индекс номера среды в компоненты поля введем позднее, при наложении граничных условий на границе раздела сред. Поскольку свойства среды не зависят от x , то электрическое и магнитное поля в средах 1, 2 имеют вид

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(y, z) \exp(ik_0 \alpha x), \quad (1)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{H}(y, z) \exp(ik_0 \alpha x),$$

где $k_0 = 2\pi/\lambda$, λ – длина волны. Подставляя (1) в уравнения Максвелла для монохроматического поля

$$\text{rot } \mathbf{H} = -ik_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = ik_0 \mathbf{H}, \quad (2)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость, представим компоненты поля в средах 1, 2 через x -компоненты в виде

$$\begin{aligned}
E_y &= \frac{-1}{ik_0(\varepsilon - \alpha^2)} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} + \alpha \frac{\partial E_x}{\partial y} \right), \\
E_z &= \frac{1}{ik_0(\varepsilon - \alpha^2)} \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \alpha \frac{\partial E_x}{\partial z} \right), \\
H_y &= \frac{1}{ik_0(\varepsilon - \alpha^2)} \left(\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial z} - \alpha \frac{\partial H_x}{\partial y} \right), \\
H_z &= \frac{-1}{ik_0(\varepsilon - \alpha^2)} \left(\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial y} + \alpha \frac{\partial H_x}{\partial z} \right).
\end{aligned} \tag{3}$$

Функции E_x , H_x в (3) удовлетворяют двумерным уравнениям Гельмгольца

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k_0^2(\varepsilon - \alpha^2)E_x &= 0, \\
\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k_0^2(\varepsilon - \alpha^2)H_x &= 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Решения уравнений (4) для компонент H_x , E_x в средах 1, 2 имеют вид

$$\begin{aligned}
H_x^{(1)}(y, z) &= h_1 \cdot \exp(ik_0\beta z) \exp(k_0\gamma_1 y), \\
H_x^{(2)}(y, z) &= h_2 \cdot \exp(ik_0\beta z) \exp(-k_0\gamma_2 y), \\
E_x^{(1)}(y, z) &= e_1 \cdot \exp(ik_0\beta z) \exp(k_0\gamma_1 y), \\
E_x^{(2)}(y, z) &= e_2 \cdot \exp(ik_0\beta z) \exp(-k_0\gamma_2 y),
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\gamma_i^2 = -(\varepsilon_i - \alpha^2) + \beta^2$, (6)

h_i , e_i , $i=1,2$ – произвольные постоянные, а индекс i означает номер среды. Представления (5) соответствуют ПЭВ, поскольку имеют затухающий вид в направлении перпендикулярном границе.

Запишем условия равенства тангенциальных компонент электрического и магнитного поля на границе раздела сред при $y=0$

$$\begin{aligned}
H_x^{(2)}(0, z) &= H_x^{(1)}(0, z), \\
E_x^{(2)}(0, z) &= E_x^{(1)}(0, z), \\
E_z^{(2)}(0, z) &= E_z^{(1)}(0, z), \\
H_z^{(2)}(0, z) &= H_z^{(1)}(0, z),
\end{aligned} \tag{7}$$

где вид компонент $E_z^{(i)}$, $H_z^{(i)}$, $i=1,2$ определен в (3). Согласно (7), получим

$$\begin{aligned}
h_1 &= h_2, \quad e_1 = e_2, \\
h_1 \left(\frac{\gamma_1}{(\varepsilon_1 - \alpha^2)} + \frac{\gamma_2}{(\varepsilon_2 - \alpha^2)} \right) + e_1 \left(\frac{-\alpha\beta}{(\varepsilon_1 - \alpha^2)} + \frac{\alpha\beta}{(\varepsilon_2 - \alpha^2)} \right) &= 0, \\
h_1 \left(\frac{-\alpha\beta}{(\varepsilon_1 - \alpha^2)} + \frac{\alpha\beta}{(\varepsilon_2 - \alpha^2)} \right) + e_1 \left(\frac{\varepsilon_1\gamma_1}{(\varepsilon_1 - \alpha^2)} + \frac{\varepsilon_2\gamma_2}{(\varepsilon_2 - \alpha^2)} \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Из (8) получим дисперсионное уравнение для определения константы распространения β

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\gamma_1}{\omega_1} + \frac{\gamma_2}{\omega_2} \right) \left(\frac{\varepsilon_1\gamma_1}{\omega_1} + \frac{\varepsilon_2\gamma_2}{\omega_2} \right) - \\
-\alpha^2\beta^2 \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right)^2 = 0,
\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\omega_i = \varepsilon_i - \alpha^2 = \beta^2 - \gamma_i^2, \quad i=1,2.$$

Несложно показать, что решение (9) сводится к решению биквадратного уравнения относительно β^2

$$\beta^2(\alpha^2) = (\beta_0^2 - \alpha^2) \tag{10}$$

$$\beta_0^2 = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

Уравнения (8) - (10) позволяют получить для функций H_x , E_x на границе раздела $y=0$ интегральные представления, аналогичные представлению поля через угловой спектр плоских волн и интегралу Кирхгофа, которые широко используются в скалярной теории дифракции [11,12]. Действительно, запишем общее решение при $y=0$ в виде суперпозиции ПЭВ

$$\begin{aligned}
H_x(x, z) &= \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} I(\alpha) \exp(ik_0\alpha x) \exp(ik_0\beta(\alpha)z) d\alpha,
\end{aligned} \tag{11}$$

где функция $\beta(\alpha)$ имеет вид (9)-(10) или определяется из (10). Уравнение для $E_x(x, z)$ имеет точно такой же вид и в дальнейшем рассматриваться не будет. Уравнение (11) является аналогом представления поля через угловой спектр [11]. Отметим, что выбранный базис не является полным и (11) является решением только в классе ПЭВ. При этом функция $I(\alpha)$ определяется через значения поля при $z=0$ в виде

$$I(\alpha) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_x^{(1)}(x, 0) \exp(-ik_0\alpha x) dx. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11), получим поле в виде

$$\begin{aligned}
H_x(x, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} I(\alpha) \exp(ik_0\alpha x) \times \\
&\times \exp\left(iz\sqrt{k_{\text{сп}}^2 - k_0^2\alpha^2}\right) d\alpha,
\end{aligned} \tag{13}$$

где $k_{spp} = k_0\beta_0$ – волновое число ПЭВ при $\alpha = 0$.

Уравнение (13) полностью идентично интегральному представлению поля через угловой спектр плоских волн, используемому в скалярной теории дифракции [11, 12]. Уравнения (12), (13) позволяют записать аналог интеграла Кирхгофа для ПЭВ в виде

$$H_x(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_x(u, 0)G(x-u, z)du, \quad (14)$$

где

$$G(x, z) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik_0\alpha x) \exp(ik_0\beta(\alpha)z) d\alpha \quad (15)$$

Интегрируя, получаем, что ядро интегрального оператора (15) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} G(x, z) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\left(x\eta + \sqrt{k_{spp}^2 - \eta^2}z\right)\right) d\eta = \\ &= \frac{ik_{spp}z}{2\sqrt{x^2 + z^2}} H_1^1\left(k_{spp}\sqrt{x^2 + z^2}\right), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\eta = k_0\alpha$, $H_1^1(x)$ – функция Ханкеля первого рода, первого порядка [14]. Заменяя функцию Ханкеля асимптотическим выражением при больших значениях аргумента [14], получим

$$\begin{aligned} G(x, z) &= \sqrt{\frac{ik_{spp}}{2\pi g^2 \sqrt{x^2 + z^2}}} \times \\ &\times \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} \exp\left(ik_{spp}\sqrt{x^2 + z^2}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнения (14), (15) и (16), (17) являются прямыми аналогами интеграла Кирхгофа в двумерном случае. Разлагая корень в (17), получим ядро интегрального преобразования для аналога параксиального приближения Френеля

$$\begin{aligned} G(x, z) &= \sqrt{\frac{ik_{spp}}{2\pi\sqrt{x^2 + z^2}}} \times \\ &\times \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} \exp(ik_{spp}z) \exp\left(\frac{ik_{spp}x^2}{2z}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Из (18) несложно получить аналог параксиального приближения Фраунгофера

$$\begin{aligned} H_x(x, z) &= \exp(ik_{spp}z) \exp\left(\frac{ik_{spp}x^2}{2z}\right) \times \\ &\times \sqrt{\frac{ik_{spp}}{2\pi z}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_x(u, 0) \exp\left(-\frac{ik_{spp}xu}{z}\right) du. \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим пример. Пусть входное поле $H_x(x, 0)$ является периодическим с периодом d при

$|x| \leq R$ и равно нулю при $|x| > R$. Разлагая $H_x(x, 0)$ в ряд Фурье, представим поле в виде

$$\begin{aligned} H_x(x, z) &= \exp(ik_{spp}z) \exp\left(\frac{ik_{spp}x^2}{2z}\right) \sqrt{\frac{ik_{spp}}{2\pi z}} \times \\ &\times R \sum_n c_n \operatorname{sinc}\left(\left(\frac{2\pi n}{d} - \frac{k_{spp}x}{z}\right)\frac{R}{2}\right), \end{aligned} \quad (20)$$

где c_n – коэффициенты Фурье, $\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$.

Условие

$$\operatorname{tg}(\alpha_n) = \frac{x_n}{z} = \frac{n \cdot \lambda_{spp}}{d}, \quad (21)$$

$\lambda_{spp} = 2\pi/k_{spp}$ определяет направления порядков дифракции.

Заключение

Полученные интегральные представления электромагнитного поля на границе раздела двух сред через угловой спектр ПЭВ объясняют использованные ранее представления и показывают их точный характер. Приведены аналоги интеграла Кирхгофа для описания дифракции поверхностных электромагнитных волн.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке «Фонда содействия отечественной науке», фонда «Фундаментальные исследования и высшее образование» (RUXO-014-SA-06) и грантов РФФИ № 07-07-97601-р_офи, 07-01-96602-р_поволжье_a, 07-07-91580-АСП_a, 08-07-99005-р_офи, гранта Президента РФ № НШ-3086.2008.9.

Литература

1. **Barnes, W.L.** Surface plasmon subwavelength optics / W.L. Barnes, A. Dereux, and T. W. Ebbesen // Nature, 2003. – V.424. – P.824-830.
2. **Berini, P.** Long-range surface plasmons on ultrathin membranes / P. Berini, R. Charbonneau, and N. Lahoud // Nano Lett., 2007. – V.7. – P.1376-1380.
3. **Lee, I.-M.** Dispersion characteristics of channel plasmon polariton waveguides with step-trench-type grooves / I.-M. Lee [and other] // Opt. Express 15, 16596-16603 (2007).
4. **Hohenau, A.** Dielectric optical elements for surface plasmons / A. Hohenau [and other] // Optics Letters, 2005. – 30 (8). – P.893-895.
5. **Radko, I.P.** Surface plasmon polariton beam focusing with parabolic nanoparticle chains. / I.P. Radko, S.I. Bozhevolnyi // Optics Express, 2007. – V.15, N11 – P.6576-6582.
6. **Shi, H.** Beam manipulating by metallic nano-slits with variant widths, / H. Shi [and other] // Optics Express, 2005. – V.13, N18. – P.6815-6820.
7. **Feng, L.** Fourier plasmonics: Diffractive focusing of in-plane surface plasmon polariton waves, / L. Feng [and other] // Applied Physics Letters, 2007. – V.91. – 081101
8. **Steele, J.M.** Resonant and non-resonant generation and focusing of surface plasmons with circular gratings, / J.M. Steele [and other] // Optics Express, 2006. – V.14, N12. – P.5664-5670.

9. **Zia, R.** Surface plasmon polariton analogue to young's double-slit experiment. / R. Zia, M.L. Brongersma // Nature Nanotechnology, 2007. – V.2, N.7. – P.426–429.
10. **Kim, H.** Focusing properties of surface plasmon polariton floating dielectric lenses / H. Kim, J. Hahn, B. Lee. // Optics Express, 2008. – V.16, N5. - P. 3049-3057.
11. **Goodman, W.** Introduction to Fourier Optics, 2nd ed. / W. Goodman - McGraw-Hill, New York, 1996. – 124 p.
12. **Зверев, В.А.** Радиооптика / В.А. Зверев – М.: Советское радио, 1975. – 304 с.
13. **Palik, E.D.** (ed.), Handbook of Optical Constants of Solids, / E.D. Palik - Academic Press, New York, 1985.
14. **Корн, Г.** Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн - М.: Наука, 1974. – 832 с.

INTEGRAL REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS OF MAXWELL'S EQUATIONS IN THE FORM OF THE SPECTRUM OF SURFACE ELECTROMAGNETIC WAVES

L.L. Doskolovich^{1,2}, N.L. Kazanskiy^{1,2}, S.I. Kharitonov^{1,2}

¹ *Image Processing Systems Institute of the RAS, Samara, Russia,*

² *Samara State Aerospace University, Samara, Russia*

Abstract

We deduce the relationships for surface plasmons from Maxwell's equations. The electromagnetic field at the interface between two media is represented in the integral form of an angular spectrum of the surface plasmons. Analogues to Kirchhoff's integral to describe the diffraction of the surface plasmons are presented. Applicability limits of the familiar integral relationships are established and their approximate character is demonstrated.

Key words: surface plasmon, Maxwell's equations, dispersion equation, diffraction, angular spectrum, Kirchhoff's integral.

Citation: Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Kharitonov SI. Integral representations of solutions of Maxwell's equations in the form of the spectrum of surface electromagnetic waves. Computer Optics 2008; 32(2): 151-4.

Acknowledgements: The work was supported by the "Russian Science Support Foundation" Fund "Basic Research and Higher Education" (RUXO-014-SA-06) and RFBR grants № 07-07-97601-r_ofi, 07-01-96602-r_povolzhe_a, 07-07-91580-ASTP_A, 08-07-99005-r_ofi, RF President Grant number NS-3086.2008.9.

References

- [1] Barnes WL, Dereux A, Ebbesen TW. Surface plasmon subwavelength optics. Nature 2003; 424: 824-830.
- [2] Berini P, Charbonneau R, Lahoud N. Long-range surface plasmons on ultrathin membranes. Nano Lett. 2007; 7: 1376-1380.
- [3] Lee I-M. Dispersion characteristics of channel plasmon polariton waveguides with step-trench-type grooves. Opt. Express 2007; 15: 16596-16603.
- [4] Hohenau A. Dielectric optical elements for surface plasmons. Optics Letters 2005; 30(8): 893-895.
- [5] Radko IP, Bozhevolnyi SI. Surface plasmon polariton beam focusing with parabolic nanoparticle chains. Optics Express 2007; 15(11): 6576-6582.
- [6] Shi H. Beam manipulating by metallic nano-slits with variant widths. Optics Express 2005; 13(18): 6815-6820.
- [7] Feng L. Fourier plasmonics: Diffractive focusing of inplane surface plasmon polariton waves. Applied Physics Letters 2007; 91: 081101.
- [8] Steele JM. Resonant and non-resonant generation and focusing of surface plasmons with circular gratings. Optics Express 2006; 14(12): 5664-5670.
- [9] Zia R, Brongersma ML. Surface plasmon polariton analogue to young's double-slit experiment. Nature Nanotechnology 2007; 2(7): 426–429.
- [10] Kim H, Hahn J, Lee B. Focusing properties of surface plasmon polariton floating dielectric lenses. Optics Express 2008; 16(5): 3049-3057.
- [11] Goodman W. Introduction to Fourier Optics, 2nd ed. McGraw-Hill, New York, 1996; 124 p.
- [12] Zverev VA. Radio Optics [In Russian]. Moscow: "Soviet Radio" Publisher; 1975, 304 p.
- [13] Palik ED (ed.). Handbook of Optical Constants of Solids. Academic Press, New York, 1985.
- [14] Korn G, Korn T. Mathematical Handbook (for academic researchers and engineers) [In Russian]. Moscow: "Nauka" (Science) Publisher 1974; 832 p.