ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОГРАНИЧЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ

С.Н. Хонина[1,2], *С.А. Балалаев*[2]
[1] *Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия,*
[2] *Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия*

Аннотация

Проведено компьютерное моделирование распространения ограниченных обобщенных гипергеометрических пучков. Исследованы возможности формирования гипергеометрических пучков методами дифракционной оптики. Выполнено сравнение с ограниченными гипергеометрическими модами.

Ключевые слова: обобщенный гипергеометрический пучок, гипергеометрическая мода, дифракционный оптический элемент.

Введение

Новый тип световых мод – гипергеометрические (ГГ) моды недавно был представлен в работе [1]. ГГ-моды, как и моды Бесселя, обладают бесконечной энергией, следовательно, на практике их можно сформировать только приближенно и на конечном расстоянии.

Обобщение этих мод с добавлением гауссовой составляющей рассмотрено в работах [2-3]. Таким образом вводится понятие ГГ-пучков [3], энергия которых ограничена, но сами пучки теряют модовые свойства, сохраняя винтовую фазовую сингулярность.

Пучки с винтовой фазовой сингулярностью часто используют для передачи орбитального углового момента микрочастицам при оптическом манипулировании [4-7]. При этом, как правило, используются классические моды Гаусса-Лагерра, Бесселевы моды и чистые оптические вихри. Трехпараметрическое семейство ГГ-пучков [3] в отличие от указанных мод имеет больше параметров, позволяющих варьировать распределение интенсивности пучка в соответствии с нуждами микроманипулирования [8].

В данной работе проведено исследование возможности формирования гипергеометрических пучков методами дифракционной оптики. Также проведено сравнение их с ограниченными апертурой ГГ-модами.

1. Обобщенные гипергеометрические пучки

Обобщенные гипергеометрические лазерные пучки (ОГГ-пучки), рассмотренные в работе [3], представляют собой трехпараметрическое семейство функций. Они являются обобщением гипергеометрических мод [1] и двухпараметрических гипергеометрических пучков [9].

ОГГ-пучки имеют во входной плоскости (z=0) следующий вид:

$$E_{\gamma,n,m}(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{r}{w}\right)^m \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\times \\ \times\exp\left(i\gamma\ln\frac{r}{w}+in\varphi\right), \tag{1}$$

где (r,φ) – полярные координаты входной плоскости, w и γ – действительные параметры логарифмического аксикона, σ – радиус перетяжки гауссова пучка, n – целый порядок спиральной фазовой сингулярности (топологический заряд), m – целое число.

Комплексная амплитуда (1) описывает световое поле с бесконечной энергией и с особенностью при $r = 0$ и $m < 0$. Однако при распространении в любой другой поперечной плоскости на расстоянии z от входной плоскости комплексная амплитуда уже не будет иметь особенности и будет конечной.

Преобразование Френеля от комплексной амплитуды (1) имеет следующий вид [3]:

$$E_{\gamma,n,m}(\rho,\theta,z)=\frac{(-i)^{n+1}}{2\pi n!}\left(\frac{z_0}{zq^2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}\sigma}{wq}\right)^{m+i\gamma}\times \\ \times\left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz}\right)^n\exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z}+in\theta\right)\Gamma\left(\frac{n+m+2+i\gamma}{2}\right)\times \\ \times{}_1F_1\left[\frac{n+m+2+i\gamma}{2},n+1,-\left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz}\right)^2\right], \tag{2}$$

где (ρ, θ) – полярные координаты в плоскости на расстоянии z от входной, k=2π/λ – волновое число, λ – длина волны, $z_0=k\sigma^2$, $q=\left(1-iz_0/z\right)^{1/2}$; Γ($x$) – гамма функция; ${}_1F_1(a,b;x)$ – вырожденная (или конфлюэнтная) гипергеометрическая функция [10]:

$${}_1F_1(a,b,x)=\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-a-1}\exp(xt)\,\mathrm{d}t. \tag{3}$$

Выражение (3) может также быть записано в виде ряда Тейлора (функция Куммера):

$${}_1F_1(a,b,x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m x^m}{(b)_m m!}, \tag{4}$$

где $(a)_m=a(a+1)(a+2)\ldots(a+m-1)$ – символ Похгаммера, $(a)_0=1$.

В выражениях (2) и (3) используется гамма функция для вещественного аргумента:

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\,. \tag{5}$$

При γ=0 и m=0 во входной плоскости будет поле:

$$E_{0n0}(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left(in\varphi\right), \qquad (6)$$

распространение которого описано как дифракция гауссового пучка на спиральной фазовой пластинке [11, 12].

При $\sigma\to\infty$ (гауссовый пучок заменяется плоской волной) из (6) получаются оптические чистые вихри, описанные в [13].

При $m= -1$ и $\sigma\to\infty$ во входной плоскости будет поле:

$$E_{\gamma,n,-1}(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{r}{w}\right)^{-1}\exp\left(i\gamma\ln\frac{r}{w}+in\varphi\right), \qquad (7)$$

формирующее ГГ-моды [1].

2. Реализация ГГ-мод

В [1] получено аналитическое решение параксиального волнового уравнения, названное ГГ-модами:

$$E_{\gamma n}(r,\varphi,z)=\frac{1}{2\pi n!}\left(\frac{2z}{kw^2}\right)^{\frac{i\gamma-1}{2}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{i\pi}{4}(n-i\gamma+1)\right]\left(\frac{kr^2}{2z}\right)^{n/2}\Gamma\left(\frac{n+i\gamma+1}{2}\right)\times, \qquad (8)$$

$$\times{}_1F_1\left(\frac{n+1-i\gamma}{2},\, n+1;\, \frac{ikr^2}{2z}\right)\exp(in\varphi),$$

принимающее при z=0 вид (7).

Формирование ГГ-мод с помощью средств дифракционной оптики непростая задача. Во-первых, эти моды, аналогично модам Бесселя, являются бесконечными и при их реализации неизбежно ограничение апертурой.

Во-вторых, амплитуда ГГ-мод при z=0 имеет особенность в нуле (неограниченно возрастает при r = 0), таким образом, необходимо также вырезание центральной области.

Поэтому на практике, чтобы сформировать ГГ-моду, световое поле (1) следует ограничить кольцевой диафрагмой с радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), как показано на рис. 1.

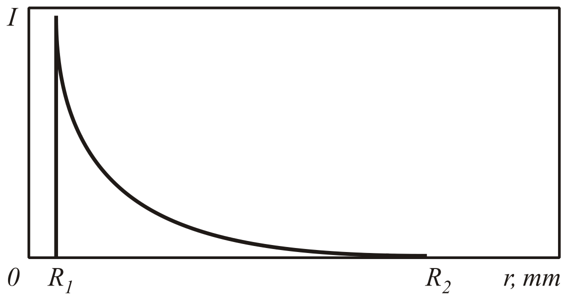


Рис. 1. Ограничение кольцевой апертурой радиального распределения интенсивности ГГ-моды во входной плоскости

Однако такое ограничение апертуры начального поля при некоторых параметрах приводит к заметным искажениям ГГ-моды. На рис. 2 показан вид радиального распределения интенсивности поля (7), прошедшего расстояние z = 100 мм и его ограниченного апертурой аналога.

При следующих параметрах расчета: λ=532 нм, R_1 = 0,05 мм, R_2 = 1 мм, w = 1 мм, число отсчетов N = 512; параметры ГГ-моды: n = 4, γ = –10, среднеквадратичное отклонение точной интенсивности, полученной на основе ур. (2), от рассчитанной с учетом ограниченной апертуры на расстоянии z = 100 мм составляет 4,1%, а на расстоянии z = 200 мм – 11,8%.

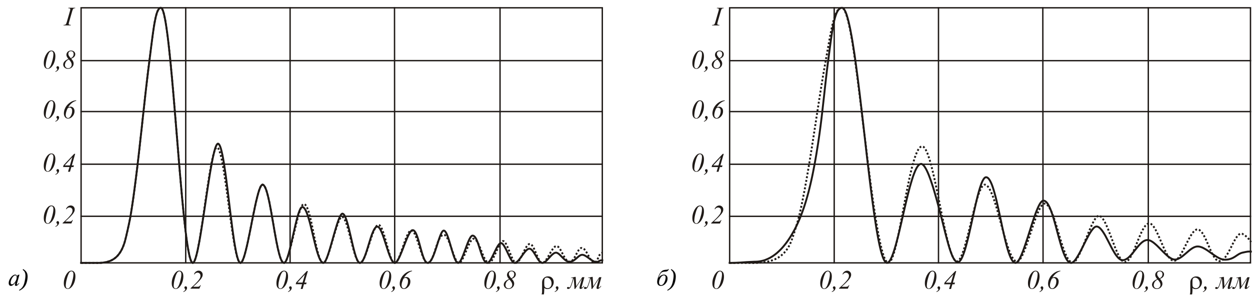


Рис. 2. Радиальное распределение интенсивности ГГ-моды (γ, n): (–10, 4) при z = 100 мм (а) и z = 200 мм (б): аналитический вид ГГ-моды (точечная кривая) и рассчитанный после ограничения апертурой (сплошная кривая)

Таким образом, с ростом расстояния погрешность увеличивается. Это связано с тем, что аналогично ограниченным Бесселевым пучкам ограниченные ГГ-моды сохраняют свои модовые свойства до некоторого расстояния [14].

3. Определение зависимости сохранения модовых свойств

В [1] было показано, что это расстояние пропорционально следующей величине:

$$z_{\max}=\frac{R_2}{\mathrm{ctg}\left(\gamma/R_2\right)}. \qquad (9)$$

Из этой формулы (8) следует, что при

$$R_{\max}=\frac{2\gamma}{\pi(2n+1)} \qquad (10)$$

расстояние (9) принимает бесконечное значение. Однако это не так и пучок все равно теряет свои модовые свойства, начиная с некоторого расстояния.

Данный раздел посвящен эмпирическому определению этой зависимости от параметров лазерного излучения, оптического элемента и модовых параметров.

Моделировать распространение светового поля (7) для конечной апертуры можно, используя преобразование Ханкеля n-го порядка:

$$F_n(\rho,\theta,z)=\frac{k}{z}\exp(in\theta)\exp(ikz)\exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z}\right)\times \\ \times\int_0^\infty P(r)\exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right)J_n\left(\frac{kr\rho}{z}\right)r\mathrm{d}r, \tag{11}$$

где $J_n(r)$ – функция Бесселя первого рода n-го порядка, $P(r)$ – радиальная составляющая поля (7).

Параметры расчета были выбраны следующие: R_2 = 4 мм, число точек дискретизации 1024.

Сравнение полученных распределений интенсивности на расстоянии z = 1000 мм при различных значениях параметра γ приведено на рис. 3, а для различных значений параметра n - на рис. 4.

Для приведенных параметров отличие аналитического решения от численного для радиального сечения интенсивности не превышает 4,5%.

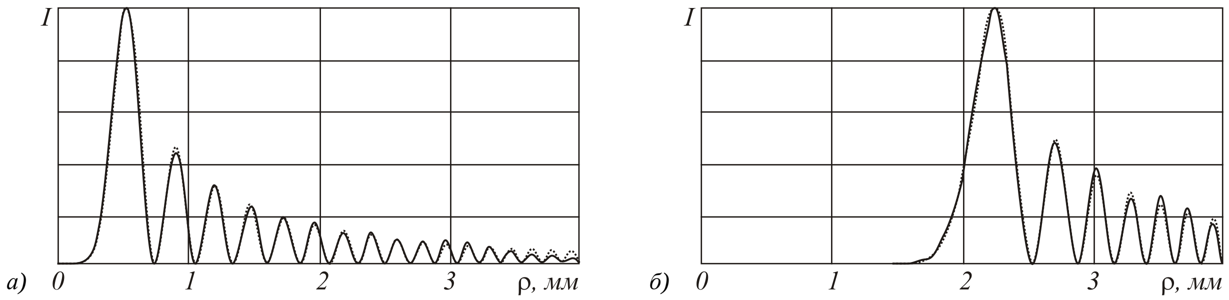


Рис. 3. Радиальное сечение интенсивности для ГГ - мод (γ, n): а) (–10,4) и б) (10,4) на расстоянии вдоль оси распространения z = 1000 мм (точечная линия – аналитическое решение, сплошная – преобразование Ханкеля)

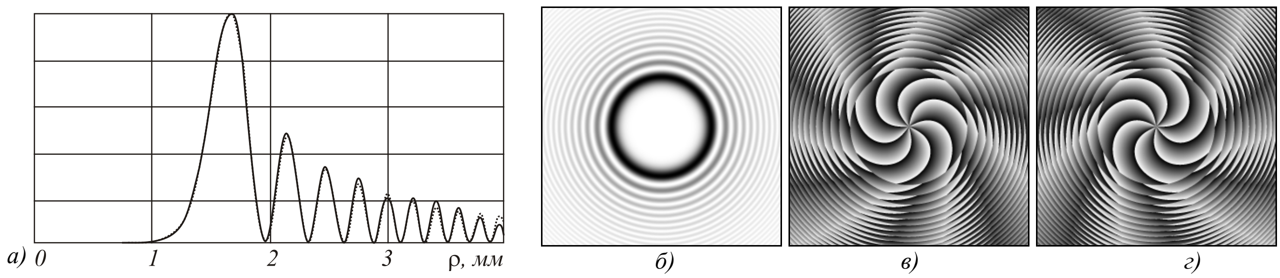


Рис. 4. ГГ-моды (γ, n): (3, –7) и (3, 7) на расстоянии вдоль оси распространения z = 1000 мм а) радиальное сечение интенсивности (точечная линия – аналитическое решение, сплошная – преобразование Ханкеля), б) инвертированное распределение интенсивности, в) распределение фазы для моды (3, –7), г) распределение фазы для моды (3, 7)

На рис. 3 и 4 хорошо видна зависимость радиуса центрального кольца в поперечном сечении пучка от модовых параметров γ и n. При этом важен как модуль, так и знак параметра γ: Как видно из рис. 3, изменение знака существенно влияет на радиус основного кольца пучка. В то время как знак номера винтовой фазовой сингулярности n влияет лишь на ориентацию спирального рисунка фазы, распределение интенсивности при этом совершенно не меняется.

В работе [15] было сделано предположение, что зависимость расстояния сохранения модовых свойств имеет характер, аналогичный Бесселевым модам:

$$z_{\max}\sim\frac{kR_2}{|\gamma|}. \tag{12}$$

Однако серия численных экспериментов показала, что поведение ГГ-мод также зависит от знака параметра γ.

На рисунках 5-8 показаны графики расстояния z_c, до которого в поперечной картине интенсивности пучка сохраняется хорошо выраженное центральное кольцо (в частности, периферийные кольца имеют интенсивность ниже, чем у центрального кольца) в зависимости от различных значений исследуемых параметров. Сохранение четко выраженного первого кольца представляет особый интерес в задачах оптического микроманипулирования [8], и данный критерий можно использовать для оценки сохранения структуры пучка, даже если среднеквадратичная погрешность существенна.

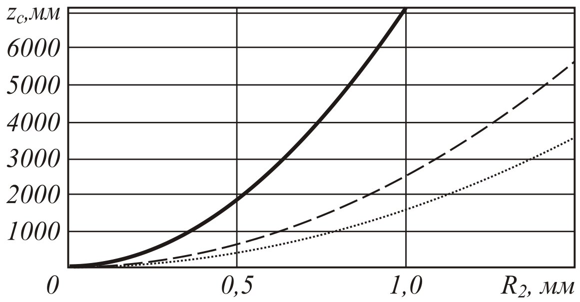


Рис. 5. Зависимость z_{max} от радиуса апертуры R_2 для ГГ-моды (γ, n): (–5,4) –сплошная линия, (–7,4) –пунктирная линия, (–10,4) – точечная линия

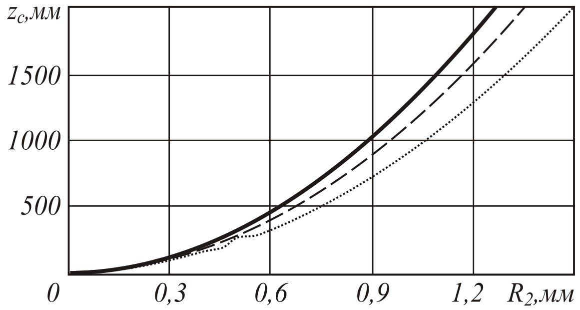


Рис. 6. Зависимость z_{max} от радиуса апертуры R_2 для ГГ-моды (γ, n): (5,4) –сплошная линия, (7,4) –пунктирная линия, (10,4) – точечная линия

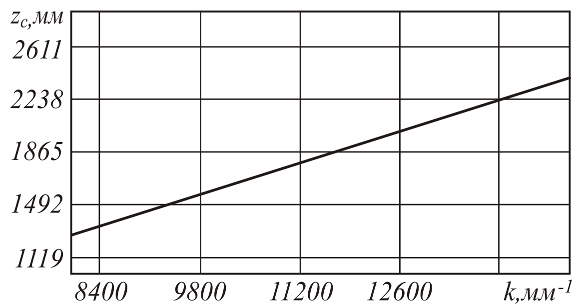


Рис. 7. Зависимость z_c от волнового числа k

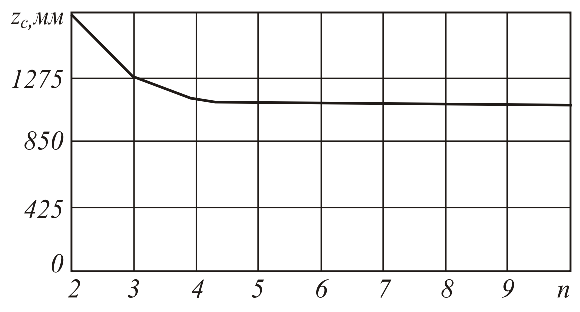


Рис. 8. Зависимость z_c от номера сингулярности n

Из графиков 5 и 6 легко видеть квадратичную зависимость z_c от радиуса апертуры R_2 и обратную степенную от $|\gamma|$.

Причем характер зависимости для отрицательных и положительных значений параметра γ сильно отличается. График на рис. 7 демонстрирует линейную зависимость от волнового числа k, а рис. 8 показывает, что зависимости от номера сингулярности n фактически не имеется.

На основании приведенных выше рассуждений и подбора параметров по имеющимся данным была получена следующая формула для расстояния сохранения явно выраженного центрального кольца (при R_2 <1,5 мм):

$$z_c \sim \begin{cases} c_1 k R_2^2 / |\gamma|^{\alpha_1}, & \gamma > 0, \\ c_2 k R_2^2 / |\gamma|^{\alpha_2}, & \gamma < 0, \end{cases} \tag{13}$$

где $\alpha_1 \approx 0{,}5$, $c_1 \approx 0{,}25$, $\alpha_2 \approx 2{,}3$, $c_2 \approx 25$.

Любопытно отметить, что пучки с отрицательными, но небольшими по абсолютному значению параметрами γ существенно дольше сохраняют свои модовые свойства.

По формуле (13) расстояние сохранения центрального кольца ограниченной ГГ-моды из раздела 2 (длина волны λ=532 нм, R_2 = 1 мм, n = 4, γ = –10) составляет $z_c \sim 1500$ мм, в то время как по формуле (12) расстояние сохранения модовых свойств несколько меньше $z_{\max} \sim 1180$ мм.

Таким образом, несмотря на то, что уже при z=200 мм погрешность составила около 12%, четко выраженное центральное кольцо сохраняется гораздо дольше.

На рис. 9 показано распространение ГГ-мод (длина волны λ=532 нм, R_2 = 4 мм, n = 4, γ = ±10) с противоположными знаками параметра γ, выполненное с помощью преобразования Ханкеля. Чтобы основное кольцо входило в поле зрения, радиус рассчитываемой картины R_0 увеличивался по мере увеличения расстояния z.

Как видно из рисунка 8, оценка (13) здесь дает неправильный результат: для γ = –10 получается $z_c \sim 24000$ мм, на самом же деле структура уже разрушена при z = 20000 мм, для γ = 10 получается $z_c \sim 15000$ мм, на самом же деле центральное кольцо все еще достаточно выражено при z = 20000 мм.

Видимо, при значениях радиуса R_2 > 1,5 мм зависимость становится несколько иная, чем полученная в (13).

Интересно отметить динамику изменений ГГ-мод с противоположными знаками параметра γ. В зоне дифракции Френеля центральные кольца пучков имеют значительно различающийся диаметр – меньший для отрицательного γ. Затем, при распространении их поперечные сечения становятся все более схожими, пока в дальней зоне не будут совершенно идентичными по распределению интенсивности.

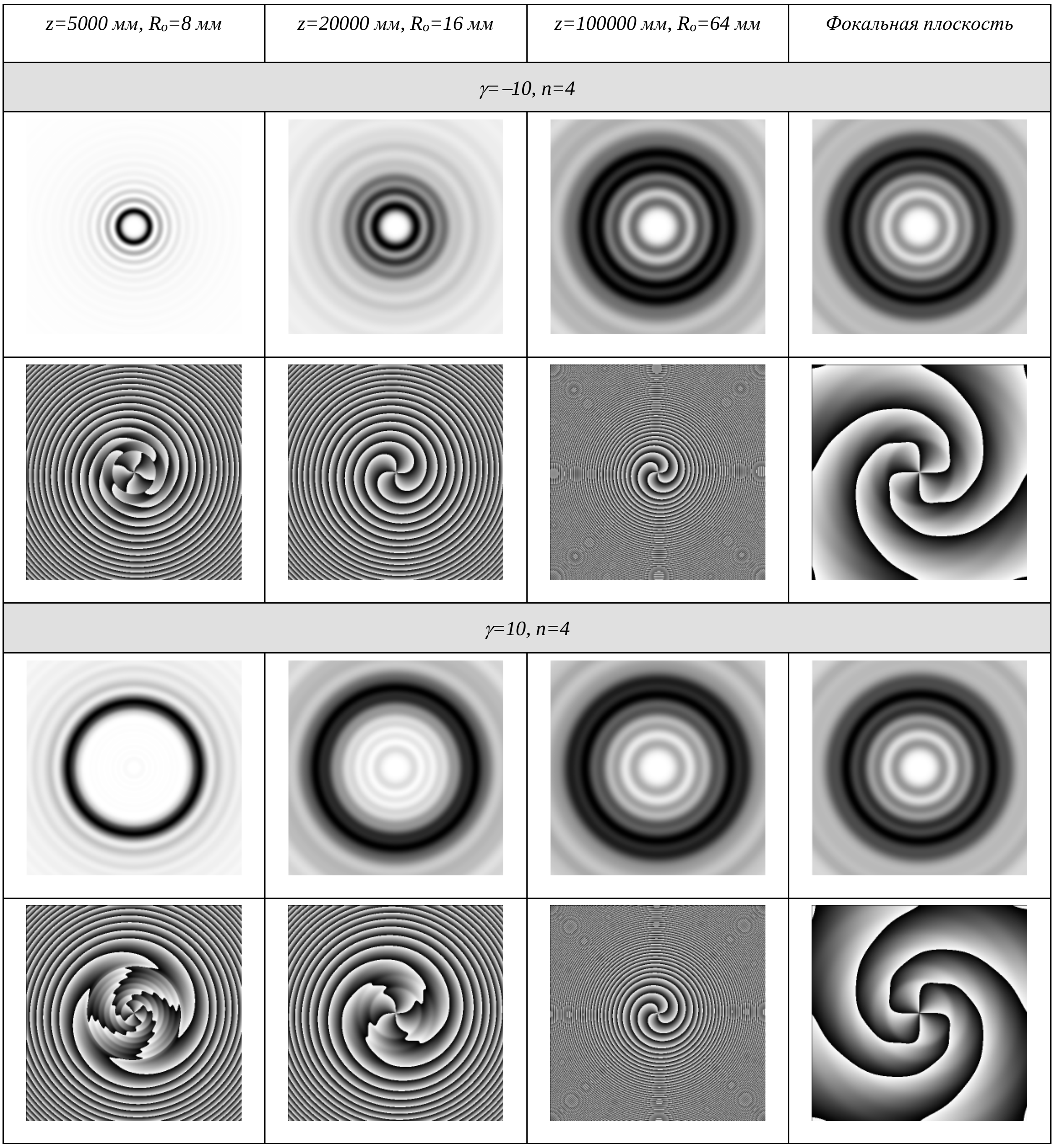


Рис. 9. Сравнение распространения ГГ-мод с противоположными знаками параметра γ

4. Сравнение дифракционных свойств ограниченных ГГ-мод и ОГГ-пучков

Как следует из раздела 1, ГГ-моды являются частным случаем ОГГ-пучков при $m=-1$ и $\sigma\to\infty$ (см. формулу (7)). Однако при формировании ГГ-мод неизбежно приходится сталкиваться с их ограниченными аналогами. В частности, в разделах 2 и 3 было рассмотрено ограничение поперечно бесконечного входного поля апертурой. В этом разделе проводится сравнение такого ограничения с наложением гауссовой функции, т.е. с ОГГ-пучком при $m=-1$ и σ=const.

На рис. 10 приведено сравнение распространения ОГГ-пучков и ограниченных ГГ-мод. Параметры расчетов такие же, как в разделе 3, радиус гауссового пучка σ выбран так, чтобы размеры основного кольца пучков совпадали на расстоянии z=1000 мм.

Как видно из двух первых строк рис. 10, несмотря на существенные значения среднеквадратичного отклонения ограниченной ГГ-моды от ее аналитического вида, структура пучка сохраняется вплоть до z=10000 мм, что составляет 1250 входных апертур. При этом ОГГ-пучок с аналогичными параметрами разрушается значительно быстрее – уже при

z=2000 мм, что составляет 250 входных апертур. Согласование численных результатов с теоретическими для ОГГ-пучков очень хорошее – погрешность не выше 2%.

На рис. 11 показано более подробно сравнение динамики изменения радиального сечения ограниченной ГГ-моды и ОГГ-пучка на расстояниях от z=500 мм до z=2000 мм.

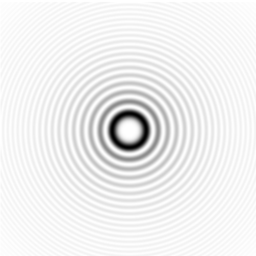
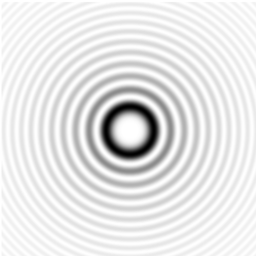
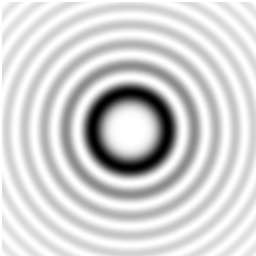
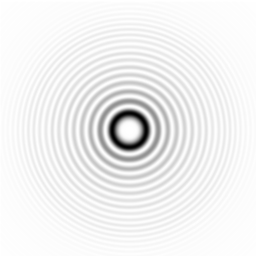
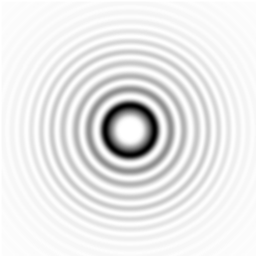
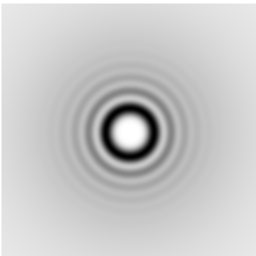
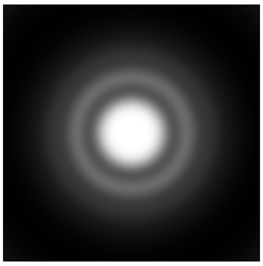
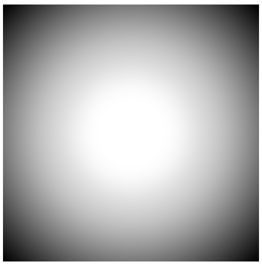
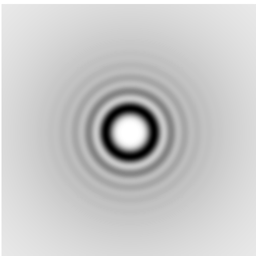
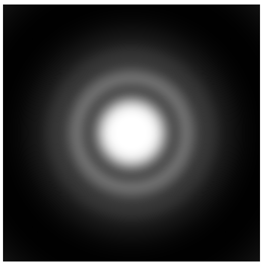
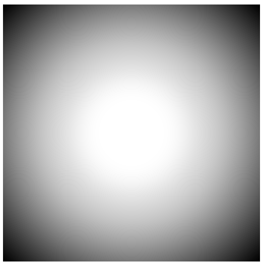
	z=1000 мм	*z=2000 мм*	*z=5000 мм*	*z=10000 мм*
		ГГ-мода (γ, n): (–10, 4)		
Аналитика, ф. (8)				
Пр. Ханкеля, ф. (11)				
δ, %	*16,2*	*18,8*	*30,7*	*33,4*
		ОГГ-пучок (γ, n,m): (–10, 4, –1)		
Аналитика, ф. (2)				
Пр. Ханкеля, ф. (11)				
δ, %	*1,6*	*0,3*	*0,08*	*0,15*

Рис 10. Сравнение распространения ОГГ-пучков и ГГ-мод: аналитические и численные результаты

Из рисунка 11 хорошо видно, что ГГ-моды даже в случае ограничения апертурой значительно дольше сохраняют свою структуру, чем ОГГ-пучки.

Однако в отличие от ГГ-мод ОГГ-пучки имеют на один параметр больше, что дает больше свободы при формировании различных типов сингулярных пучков.

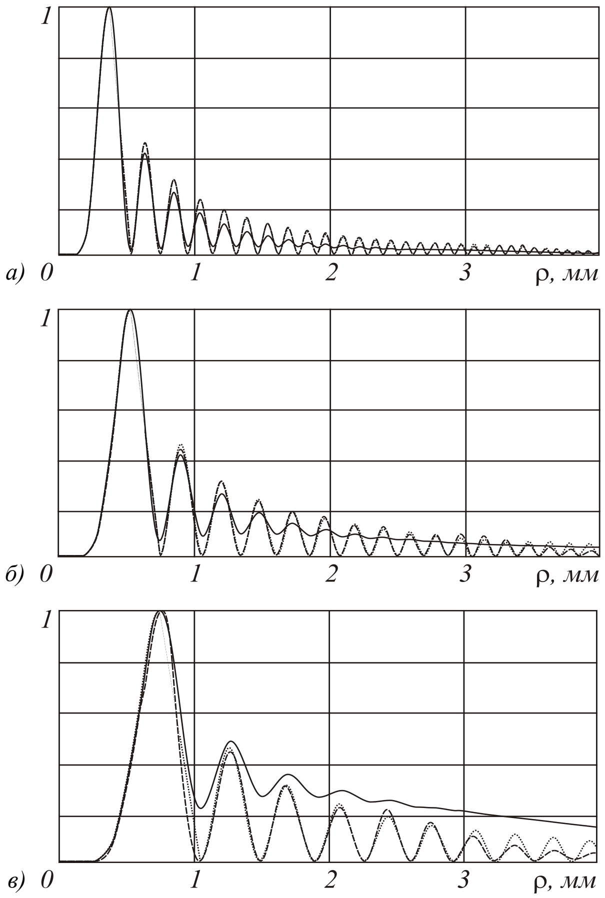


Рис. 11. Радиальное сечение интенсивности для ГГ - моды (γ, n)=(–10,4) (точечная линия – аналитическое решение, пунктирная – преобразование Ханкеля) и ОГГ-пучка (γ, n,m)=(–10, 4, –1) (сплошная линия) на расстоянии вдоль оси распространения z = 500 мм (а), z = 1000 мм (б), z = 2000 мм (в)

На рис. 12 показаны примеры ОГГ-пучков с различными значениями параметра m на расстоянии z = 1000 мм: (γ, n, m)=(–10, 4, –2), (–10, 4, –1), (–10, 4, 0), (–10, 4, 2).

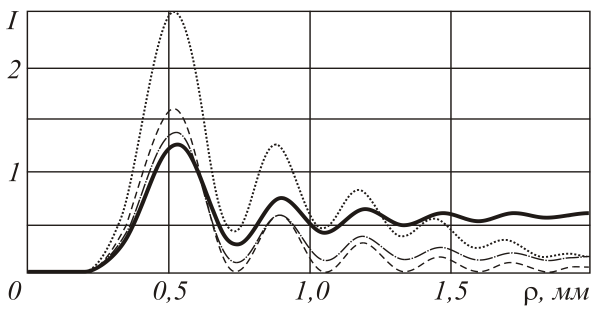


Рис. 12. Радиальное сечение интенсивности для ОГГ-пучка на расстоянии вдоль оси распространения z = 100 мм для (γ, n,m): (–10, 4, – 2) – сплошная линия, (–10, 4, –1) – штрих-пунктирная линия, (–10, 4, 0) – пунктирная линия, (–10, 4, –2) – точечная линия

Из рис. 12 видно, что с увеличением значения параметра m энергия пучка все больше концентрируется в центральной части (рост центрального кольца не совсем корректно отражает динамику этой концентрации, так как входное поле по энергии не нормировалось).

Заключение

В заключении кратко сформулируем полученные результаты.

- Показана возможность аппроксимации ГГ-мод их ограниченными аналогами с точностью 5-12% до некоторого расстояния.
- Получена аналитическая формула при небольших значениях входной апертуры для оценки расстояния, на котором сохраняется четко выраженное центральное кольцо моды.
- Отмечено, что ГГ-моды, имеющие противоположные знаки параметра γ, имеют различные диаметры центральных колец в зоне дифракции Френеля, которые, однако, в дальней зоне дифракции становятся совершенно одинаковыми.
- Обобщенные ГГ-пучки, согласованные с параметрами ГГ-мод, сохраняют свою структуру на значительно меньшем расстоянии. Однако дополнительный параметр m позволяет варьировать концентрацию энергии таких пучков в центральной части.

Благодарности

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (грант CRDF RUX0-014-Sa-06), грантов РФФИ №№ 07-07-97600, 08-07-99007 и гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (НШ-3086.2008.9).

Литература

1. **Kotlyar V.V.,** "Hypergeometric modes,"/ V.V. Kotlyar [and other]// Opt. Lett. 32, p.742-744 (2007)
2. **Karimi E.,** "Hypergeometric-Gaussian modes," / E. Karimi,// Opt. Lett. 32, 3053-3055 (2007)
3. **Kotlyar, V.V.** Family of hypergeometric laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // J. Opt. Soc. Am. A 25, 262-270 (2008)
4. **He, H.** Optical particle trapping with higher order doughnut beams produced using high efficiency computer generated phase holograms / H. He, N. R. Heckenberg, H. Rubinsztein-Dunlop // J. Mod. Opt. 1995. V. 42, No. 1. P. 217-223.
5. **Gahagan, K. T.** Optical vortex trapping of particles / K. T. Gahagan, G. A. Swartzlander // Opt. Letters. 1996. V. 21, No. 11. P. 827-829.
6. **Arlt, J.** Optical micromanipulation using a Bessel light beams / J. Arlt [and other] // Opt. Comm. 2001. V. 197. P. 239-245.
7. **Khonina, S.N.** Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements, / S.N. Khonina [and other] //Journal of Modern optics, 51(14), P.2167–2184 (2004)
8. **Скиданов, Р.В.** Расчет силы, действующей на сферический микрообъект в гипергеометрических пучках / Р.В. Скиданов [и другие] // Компьютерная оптика, 32(1), С.39-44 (2008)

9. **Ковалев, А.А.** Параксиальные гипергеометрические лазерные пучки с особенностью в центре перетяжки,/ А.А. Ковалев [и другие] // Компьютерная оптика, 31(1), С.9-13 (2007)
10. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стигана // – М.: Наука, 1979.
11. **Rozas, D.** Propagation dynamics of optical vortices / D. Rozas, C. T. Law, G. A. Swartzlander //J. Opt. Soc. Am. B 14, P.3054-3065 (1997)
12. **Kotlyar, V. V.** Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate / V. V. Kotlyar [and other] // J. Opt. Soc. Am. A 22, 849-861 (2005)
13. **Котляр, В.В.** Оптические чистые вихри и гипергеометрические моды, / В.В. Котляр [и другие] //Компьютерная оптика, 27, С.21-28 (2005)
14. **Балалаев, С.А.** Сравнение свойств гипергеометрических мод и мод Бесселя, / С.А. Балалаев, С.Н. Хонина //Компьютерная оптика, 31(4), С.23-28 (2007)
15. **Балалаев, С.А.** Расчет гипергеометрических мод / С.А. Балалаев, С.Н. Хонина, В.В. Котляр // Известия Самарского научного центра РАН, 9(3), С.584-591 (2007).

EXAMINATION OF BOUNDED HYPERGEOMETRIC LASER BEAMS PROPERTIES

S.N. Khonina[1,2], S.A. Balalaev[2]
[1]Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences, Samara, Russia,
[2]S.P. Korolyov Samara State Aerospace University, Samara, Russia

Abstract

A numerical simulation of bounded generalized hypergeometric laser beams propagation is conducted. We discussed the possibility of hypergeometric beams generation by means of diffractive optics. A comparative analysis of bounded hypergeometric modes and generalized hypergeometric beams is accomplish.

Keywords: generalized hypergeometric beam, hypergeometric mode, diffractive optical element.
Citation: Khonina SN, Balalaev SA. examination of bounded hypergeometric laser beams properties. Computer Optics 2008; 32(3): 226-33.
Acknowledgements: This work was supported in part by the Russian-American program "Fundamental researches and higher image-tion" (grant CRDF RUX0-014-Sa-06), RFBR grants №№ 07-07-97600, 08-07-99007 and Grant Pre- the Russian President in support of leading scientific schools (NSH-3086.2008.9).

References

[1] Kotlyar VV, Skidanov RV, Khonina SN, Soifer VA. Hypergeometric modes. Optics Letters 2007; 32(7): 742-744.
[2] Karimi E. Hypergeometric-Gaussian modes. Opt. Lett. 2007; 32: 3053-3055.
[3] Kotlyar VV, Kovalev AA. Family of hypergeometric laser beams. J. Opt. Soc. Am. A 2008; 25(1): 262-270.
[4] He H, Heckenberg NR, Rubinsztein-Dunlop H. Optical particle trapping with higher order doughnut beams produced using high efficiency computer generated phase holograms. J. Mod. Opt. 1995; 42(1): 217-223.
[5] Gahagan KT, Swartzlander GA. Optical vortex trapping of particles. Opt. Letters 1996; 21(11): 827-829.
[6] Arlt J. Optical micromanipulation using a Bessel light beams. Opt. Comm. 2001; 197: 239-245.
[7] Khonina SN, Kotlyar VV, Skidanov RV, Soifer VA, Jefimovs K, Simonen J, Turunen J. Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements. Journal of Modern Optics 2004; 51(14): 2167– 2184.
[8] Skidanov RV, Khonina SN, Morozov AA, Kotlyar VV. Calculating forces acting upon a spherical microobject in hypergeometric beams [In Russian]. Computer Optics 2008; 32(1): 39-42.
[9] Kovalev AA, Kotlyar VV, Khonina SN, Soifer VA. Paraxial hypergeometric laser beams with singularity at the center of the waist [In Russian]. Computer Optics 2007; 31(1): C.9-13.
[10] Abramovitz M, Stegun IA, eds. Handbook of Mathematical Functions [In Russian]. Moscow: “Nauka” (Science) Publisher; 1979.
[11] Rozas D, Law CT, Swartzlander GA. Propagation dynamics of optical vortices. J. Opt. Soc. Am. B 1997; 14: 3054-3065.
[12] Kotlyar VV, Almazov AA, Khonina SN, Soifer VA, Elfstrom H., Turunen, J. Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate. J. Opt. Soc. Am. A 2005; 22(5): 849-861.
[13] Kotlyar VV, Khonina SN, Almazov AA, Soifer VA. Optical pure vortices and hypergeometrical modes [In Russian]. Computer Optics 2005; 27: 21-28.
[14] Balalaev SA, Khonina SN. Comparing properties of hypergeometrical modes and Bessel modes [In Russian]. Computer Optics 2007; 31(4): 23-28.
[15] Balalaev SA, Khonina SN, Kotlyar VV. Calculation of hiper-geometrical modes [In Russian]. Proceedings of Samara Scientific Center of the RAS 2007; 9(3): 584-591.