УСРЕДНЕНИЕ ТРЁХМЕРНОГО ПОЛЯ НАПРАВЛЕНИЙ

А.В. Устинов
Учреждение Российской академии наук Институт систем обработки изображений РАН

Аннотация

В данной статье описан метод усреднения трёхмерного поля направлений, построенный по аналогии с усреднением традиционного плоского поля направлений. Метод даёт результаты, вполне согласующиеся с геометрически наглядными в случае, когда образуемый усредняемыми векторами телесный угол сравнительно мал. При увеличении этого угла появляются необычные эффекты. Следует также отметить одну интересную особенность описываемого усреднения – оно не является ассоциативным.

Ключевые слова: поле направлений, трёхмерное поле направлений, неассоциативность сложения.

Введение

Ранее в ряде работ [2, 4] было введено понятие поля направлений, рассмотрены различные способы его построения, обработки и использования в различных практических задачах. Отметим, что везде поле направлений рассматривалось на плоскости. В [4] была намечена возможность обобщения этого понятия – введено формальное определение поля направлений при произвольной размерности пространства.

В данной статье рассматривается трёхмерное поле направлений. Точнее, обсуждается только один аспект – его усреднение, так как этот вопрос можно изучать автономно от построения поля и его практического использования. Но главная причина его отдельного рассмотрения заключается в том, что процедура усреднения имеет очень оригинальные арифметические свойства.

1. Плоский случай

Пусть нам дано несколько векторов, представляющих *направления* (то есть, противоположные векторы равны). Требуется найти средний вектор. Один из подходов состоит в том, что мы не производим в *явном* виде сложения. Для чисел известен факт, что среднее арифметическое N чисел доставляет минимум суммарному отклонению $\sum_{i=1}^{N}(x-x_i)^2$. По аналогии, если вектора заданы своими весами w_i и углами ϕ_i, то средний вектор определяется из условия:

$$(w,\phi)=\arg\min\sum_{i=1}^{N}\rho(w,\phi;w_i,\phi_i)\,. \tag{1}$$

В качестве расстояния между двумя векторами используем выражение $\rho=\left|w_1e^{i2\phi_1}-w_2e^{i2\phi_2}\right|^2$. Множитель 2 в показателе степени означает, что период равен 180 градусам – противоположные равны. После выполнения преобразований и взятия за первый вектор искомого среднего получим следующую формулу для суммарного отклонения:

$$R=\sum_{i=1}^{N}(w^2+w_i^2-2ww_i\cos(2(\phi-\phi_i))\xrightarrow[w,\phi]{}\min\,. \tag{2}$$

После приравнивания нулю частных производных и применения формул для косинуса и синуса разности получим систему уравнений:

$$\begin{cases} Nw-\cos 2\phi\sum_{i=1}^{N}w_i\cos 2\phi_i-\sin 2\phi\sum_{i=1}^{N}w_i\sin 2\phi_i=0\\ \sin 2\phi\sum_{i=1}^{N}w_i\cos 2\phi_i-\cos 2\phi\sum_{i=1}^{N}w_i\sin 2\phi_i=0\,. \end{cases} \tag{3}$$

Её решение имеет следующий вид:

$$tg\,2\phi=\frac{\sum_{i=1}^{N}w_i\sin 2\phi_i}{\sum_{i=1}^{N}w_i\cos 2\phi_i}\,, \tag{4}$$

$$w=\frac{1}{N}\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N}w_i\sin 2\phi_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{N}w_i\cos 2\phi_i\right)^2}\,. \tag{5}$$

При использовании формулы (4) следует брать значение угла с *учётом знаков* числителя и знаменателя, то есть 2φ есть аргумент комплексного числа (в диапазоне [0;2π]), у которого числитель – мнимая часть, а знаменатель – вещественная часть. Угол будет лежать в диапазоне [0;180] градусов. Достигаемое минимальное значение суммарного отклонения равно:

$$R_{\min}=\sum_{i=1}^{N}w_i^2-Nw^2\,. \tag{6}$$

2. Трёхмерный случай

Строго говоря, решение для плоского случая уже было найдено ранее, и мы его привели для того, чтобы показать, что метод минимизации суммарного отклонения приводит к уже известным результатам. Их можно проще получить из формул для обыкновенных векторов, заменяя угол двойным углом. В трёхмерном случае мы не можем поступить таким же простым способом, так как здесь *нет упорядоченности* углов: их *два* – широта θ и долгота φ. В отличие от обычных векторов долгота лежит в пределах от 0 до 180 градусов. В то же время минимизация суммарного отклонения даёт результат, так как суммируются расстояния между двумя векторами, которые лежат в *одной плоскости*. Для получения формул перепишем слагаемое из (2) немного в другой форме:

$$\rho_i = w^2 + w_i^2 - 2ww_i\cos 2\alpha, \quad (7)$$

где α - обычный плоский угол между векторами. Используя формулы перехода от сферической системы координат к декартовой и вычисляя скалярное произведение, находим:

$$\cos\alpha = \cos\theta_1\cos\theta_2\cos(\phi_1 - \phi_2) + \sin\theta_1\sin\theta_2. \quad (8)$$

Используя (7), (8) и формулу для косинуса двойного угла, получаем выражение для суммарного отклонения

$$R = \sum_{i=1}^{N}\left(w^2 + w_i^2 - 2ww_iD_i\right)\xrightarrow[w,\theta,\phi]{}\min, \quad (9)$$

где использовано обозначение

$$D_i = 2\left(\cos\theta\cos\theta_i\cos(\phi-\phi_i)+\sin\theta\sin\theta_i\right)^2 - 1.$$

После приравнивания нулю частных производных, применения формул для косинуса и синуса разности и ряда преобразований получим систему уравнений:

$$\begin{cases} Nw - a_2\cos^2\theta - a_3\cos^2\theta\cos 2\phi - a_4\cos^2\theta\sin 2\phi - \\ 2a_1\sin^2\theta - a_5\sin 2\theta\cos\phi - a_6\sin 2\theta\sin\phi + \sum\limits_{i=1}^{N} w_i = 0 \\ a_1\sin 2\theta - 0.5a_2\sin 2\theta - 0.5a_3\sin 2\theta\cos 2\phi - \\ 0.5a_4\sin 2\theta\sin 2\phi + a_5\cos 2\theta\cos\phi + a_6\cos 2\theta\sin\phi = 0 \\ a_3\cos\theta\sin 2\phi - a_4\cos\theta\cos 2\phi + a_5\sin\theta\sin\phi - \\ a_6\sin\theta\cos\phi = 0 \end{cases}, \quad (10)$$

где коэффициенты имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{i=1}^{N} w_i\sin^2\theta_i, \\ a_2 &= \sum_{i=1}^{N} w_i\cos^2\theta_i, \\ a_3 &= \sum_{i=1}^{N} w_i\cos^2\theta_i\cos 2\phi_i, \\ a_4 &= \sum_{i=1}^{N} w_i\cos^2\theta_i\sin 2\phi_i, \\ a_5 &= \sum_{i=1}^{N} w_i\sin 2\theta_i\cos\phi_i, \\ a_6 &= \sum_{i=1}^{N} w_i\sin 2\theta_i\sin\phi_i. \end{aligned} \quad (11)$$

Система (10) достаточно легко расщепляется. Вес входит только в первое уравнение. Если широта и долгота среднего вектора уже найдены, то вес вычисляется по формуле

$$w = \frac{1}{N}\times \times\begin{pmatrix} a_2\cos^2\theta + a_3\cos^2\theta\cos 2\phi + a_4\cos^2\theta\sin 2\phi + \\ 2a_1\sin^2\theta + a_5\sin 2\theta\cos\phi + a_6\sin 2\theta\sin\phi - \sum\limits_{i=1}^{N} w_i \end{pmatrix}. \quad (12)$$

При этом для минимального значения суммарного отклонения сохраняется формула (6) плоского случая.

Рассмотрим второе и третье уравнение системы. Хотя проще выразить широту из третьего уравнения, получаемое выражение имеет неопределённость 0/0 в случае, когда усредняемые вектора равны. Поэтому выразим широту из второго уравнения:

$$tg 2\theta = \frac{a_5\cos\phi + a_6\sin\phi}{-a_1 + 0.5a_2 + 0.5a_3\cos 2\phi + 0.5a_4\sin 2\phi}. \quad (13)$$

Именно эта формула используется для вычислений после того, как будет найдена долгота. Непосредственно по этой формуле получаем широту в диапазоне от -45 до +45 градусов. Второе решение получаем, при отрицательной широте прибавляя 90 градусов, а при положительной - вычитая 90 градусов. Уравнение для долготы получается следующим образом. Из третьего уравнения находим $tg\theta$, далее используем формулу тангенса двойного угла, и полученное выражение приравниваем к (13). После освобождения от знаменателя имеем уравнение:

$$\begin{aligned} &(a_5\cos\phi + a_6\sin\phi)\begin{bmatrix} (a_6\cos\phi - a_5\sin\phi)^2 - \\ (a_3\sin 2\phi - a_4\cos 2\phi)^2 \end{bmatrix} = \\ &= 2(a_3\sin 2\phi - a_4\cos 2\phi)(a_6\cos\phi - a_5\sin\phi)\times \\ &\times(-a_1 + 0,5a_2 + 0,5a_3\cos 2\phi + 0,5a_4\sin 2\phi). \end{aligned} \quad (14)$$

После выражения синуса и косинуса двойного аргумента через одинарный, раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получится уравнение, в котором синус и косинус встречаются (суммарно) в первой, третьей и пятой степени. Если члены третьей степени умножить на $\sin^2\phi + \cos^2\phi$, а первой степени - на $(\sin^2\phi + \cos^2\phi)^2$, то получится *однородное* уравнение, которое после деления на $\cos^5\phi$ даёт *алгебраическое* уравнение 5 степени относительно $tg\phi$:

$$c_1 tg^5\phi + c_2 tg^4\phi + c_3 tg^3\phi + c_4 tg^2\phi + c_5 tg\phi + c_6 = 0 \quad (15)$$

со следующими коэффициентами:

$$\begin{aligned} c_1 &= -(2a_1 - a_2)a_4a_5 - a_3a_4a_5 - a_4^2a_6 + a_5^2a_6, \\ c_2 &= (2a_1 - a_2)a_4a_6 - 3a_3a_4a_6 + a_4^2a_5 - \\ &\quad - 2(2a_1 - a_2)a_3a_5 + a_5^3 - 2a_5a_6^2 - 2a_3^2a_5, \\ c_3 &= 2a_3a_4a_5 + 2(2a_1 - a_2)a_3a_6 + a_6^3 - 2a_3^2a_6 - a_5^2a_6, \\ c_4 &= -2a_3a_4a_6 - a_5a_6^2 - 2(2a_1 - a_2)a_3a_5 + a_5^3 - 2a_3^2a_5, \\ c_5 &= (2a_1 - a_2)a_4a_5 + 3a_3a_4a_5 + a_4^2a_6 + \\ &\quad + 2(2a_1 - a_2)a_3a_6 - 2a_5^2a_6 + a_6^3 - 2a_3^2a_6, \\ c_6 &= a_3a_4a_6 - a_4^2a_5 + a_5a_6^2 - (2a_1 - a_2)a_4a_6. \end{aligned} \quad (16)$$

Оказалось, что в действительности *степень можно понизить*. При решении уравнения (15) матричным методом[1, 3] (он *весьма медленный*) было замечено, что при любых исходных данных имеется два чисто мнимых корня $+i$ и $-i$. Это означает, что многочлен в левой части уравнения (15) можно разделить на $tg^2\phi + 1$ без остатка. Для того, чтобы подтвердить это, выполним деление многочленов столбиком. Остаток равен нулю, если выполняются равенства $c_1 - c_3 + c_5 = 0$ и $c_2 - c_4 + c_6 = 0$. Подстановка выражений (16) показывает, что эти равенства истинные. Это означает, что вместо уравнения (15) достаточно решить уравнение третьей степени:

$$c_1 tg^3\phi + c_2 tg^2\phi + (c_3 - c_1) tg\phi + (c_4 - c_2) = 0 \,. \qquad (17)$$

Его решение по формуле Кардано происходит намного быстрее. Если старший коэффициент равен нулю, что имеет место при некоторых симметричных расположениях исходных векторов, то решается квадратное уравнение. Нахождение угла по его тангенсу производится так, чтобы угол был в пределах от 0 до 180 градусов.

После нахождения долготы вычисляем широту по (13) и вес по (12). Так как кубическое уравнение может иметь три вещественных корня, а каждой долготе соответствует две широты, то максимально возможно 6 решений. Из них следует выделить истинное. Производится это следующим образом – отбросим решения с отрицательным весом, а из оставшихся выберем то, которое доставляет глобальный минимум суммарного отклонения, который вычисляется по (6).

3. Доказательство согласованности с плоским случаем

Описанный выше алгоритм программно реализован и даёт правдоподобные результаты. Есть, правда, два случая, когда он в описанном выше виде не работает:

- все исходные векторы *одинаково направлены*;
- все исходные векторы *лежат в плоскости экватора*.

В обоих случаях все коэффициенты уравнения (17) равны нулю. Здесь необходимо отдельное решение. В первом случае ответ очевиден – направление среднего вектора совпадает с направлением исходного, а вес равен среднему арифметическому исходных весов. Во втором случае необходимо вывести отдельное уравнение.

Если просто подставить $\theta = 0$ в формулы (11), получим, что коэффициенты a_1, a_5, a_6 равны нулю, что по формулам (16) влечёт равенство нулю коэффициентов $c_1 \div c_4$. Поэтому требуется выполнить предельный переход. Это мы сделаем следующим образом. В выражения для a_2, a_3, a_4 просто подставим $\theta = 0$, а в выражения для a_1, a_5, a_6 подставим все значения $\theta_i = \theta$ и далее будем считать эту величину достаточно малой. Тогда, если ввести в рассмотрение две дополнительные величины

$$s_1 = \sum_{i=1}^{N} w_i \cos\phi_i \quad s_2 = \sum_{i=1}^{N} w_i \sin\phi_i \,, \qquad (18),$$

то получим такие выражения для коэффициентов:

$$\begin{aligned} &a_1 = \sin^2\theta \sum_{i=1}^{N} w_i, \quad a_2 = \sum_{i=1}^{N} w_i, \\ &a_3 = \sum_{i=1}^{N} w_i \cos 2\phi_i, \quad a_4 = \sum_{i=1}^{N} w_i \sin 2\phi_i, \\ &a_5 = s_1 \sin 2\theta, \quad a_6 = s_2 \sin 2\theta. \end{aligned} \qquad (19)$$

Далее поступаем следующим образом – подставим выражения (19) в первые четыре формулы (16) и учтём малость величины θ. Более точно, отбросим слагаемые, имеющие порядок $O(\theta^2)$ и $O(\theta^3)$. После этого для коэффициентов $c_1, c_2, c_3 - c_1, c_4 - c_2$ получим выражения, имеющие вид $\sin 2\theta\{...\}$, причём выражения в скобках не равны нулю при $\theta = 0$. После подстановки в уравнение (17) и сокращения этого уравнения на $\sin 2\theta$ получим уравнение, аналогичное (17)

$$\tilde{c}_1 tg^3\phi + \tilde{c}_2 tg^2\phi + \tilde{c}_3 tg\phi + \tilde{c}_4 = 0 \,, \qquad (20)$$

в котором коэффициенты имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} &\tilde{c}_1 = a_2 a_4 s_1 - a_3 a_4 s_1 - a_4^2 s_2, \\ &\tilde{c}_2 = -a_2 a_4 s_2 - 3a_3 a_4 s_2 + a_4^2 s_1 + 2a_2 a_3 s_1 - 2a_3^2 s_1, \\ &\tilde{c}_3 = 3a_3 a_4 s_1 - 2a_2 a_3 s_2 - 2a_3^2 s_2 - a_2 a_4 s_1 + a_4^2 s_2, \\ &\tilde{c}_4 = a_3 a_4 s_2 + a_2 a_4 s_2 - a_4^2 s_1. \end{aligned} \qquad (21)$$

Далее используются формулы общего случая, при этом широта получается равной нулю, что можно было сказать и заранее. Если честно, то уравнение (20) несколько смущает, так как для векторов, лежащих в плоскости экватора, должна получиться формула плоского варианта.

Однако сейчас мы докажем, что уравнение (20) согласуется с плоским случаем. Для начала учтём то, что уравнение (4) для $tg 2\phi$ даёт два решения, отличающиеся на 90 градусов (период). Так как уравнение (20) записано для $tg\phi$, то для сравнения результатов необходимо выразить $tg\phi$ через $tg 2\phi$. Исходя из стандартной формулы $tg 2\phi = \dfrac{2tg\phi}{1 - tg^2\phi}$, получаем обратную формулу:

$$tg\phi = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + tg^2 2\phi}}{tg 2\phi} \,. \qquad (22)$$

Два решения как раз и соответствуют двум решениям исходного уравнения, отличающимся на 90 градусов: $tg\phi_2 = -1/tg\phi_1 = tg(\phi_1 + 90^\circ)$.

Вернёмся теперь к уравнению (20). Предположим, что оно на самом деле согласуется с плоским случаем. Наличие упомянутых двух решений означает (если обозначить $tg\phi = x$), что уравнение (20) имеет корни x_1 и $-1/x_1$. Пользуясь формулой Виета для произведения корней уравнения, получим, что третий корень равен $\tilde{c}_4 / \tilde{c}_1$. Это означает, что многочлен в левой части (20) делится без остатка на $tg\phi - \tilde{c}_4 / \tilde{c}_1$. Для подтверждения этого выполним деление многочленов столбиком. Остаток равен нулю, если выполняется равенство

$$\tilde{c}_1(\tilde{c}_1 + \tilde{c}_3) = -\tilde{c}_4(\tilde{c}_2 + \tilde{c}_4) . \qquad (23)$$

Для доказательства преобразуем формулы (21):

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1 &= a_4(a_2 s_1 - a_3 s_1 - a_4 s_2), \\ \tilde{c}_4 &= a_4(a_3 s_2 + a_2 s_2 - a_4 s_1), \\ \tilde{c}_1 + \tilde{c}_3 &= 2a_3(a_4 s_1 - a_2 s_2 - a_3 s_2), \\ \tilde{c}_2 + \tilde{c}_4 &= 2a_3(a_2 s_1 - a_3 s_1 - a_4 s_2). \end{aligned} \qquad (24)$$

Подставив эти выражения, легко убедиться, что равенство (23) *выполняется*. Это значит, что уравнение (20) действительно имеет корни вида x_1 и $-1/x_1$. Теперь осталось доказать, что эти корни равны тем, которые нам нужны – совпадающим с корнями уравнения плоского случая. Для этих целей проанализируем многочлен, полученный в частном после вышеупомянутого деления

$$\tilde{c}_1 tg^2\phi + (\tilde{c}_2 + \tilde{c}_4) tg\phi + (\tilde{c}_3 + \frac{\tilde{c}_4}{\tilde{c}_1}(\tilde{c}_2 + \tilde{c}_4)) . \qquad (25)$$

Используя (23), находим, что свободный член равен $-\tilde{c}_1$, а из сравнения первого и последнего равенств (24) видно, что коэффициент при первой степени равен $2a_3\tilde{c}_1 / a_4$. После сокращения на $\tilde{c}_1$ получим квадратное уравнение

$$tg^2\phi + \frac{2a_3}{a_4} tg\phi - 1 = 0 . \qquad (26)$$

Оно имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} tg\phi_{1,2} &= -(a_3 / a_4) \pm \sqrt{(a_3 / a_4)^2 + 1} = \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + (a_4 / a_3)^2}}{a_4 / a_3}. \end{aligned} \qquad (27)$$

А это как раз совпадает с формулой (22), если учесть, что формулу (4) можно переписать в виде $tg 2\phi = a_4 / a_3$ - см. равенства (19).

Таким образом, мы **<u>доказали</u>**, что решение для случая, когда все векторы лежат в плоскости экватора, согласуется с плоским случаем.

В качестве ещё одного примера, показывающего согласованность с плоским случаем, рассмотрим вариант, когда все векторы лежат в плоскости одного меридиана. Кроме того, такая ситуация заслуживает отдельного рассмотрения, исходя из вычислительных аспектов.

Запишем величины (11) для векторов, лежащих на одном меридиане ϕ_0:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{i=1}^N w_i \sin^2 \theta_i , \quad a_2 = \sum_{i=1}^N w_i \cos^2 \theta_i , \\ a_3 &= a_2 \cos 2\phi_0 , \quad a_4 = a_2 \sin 2\phi_0 , \\ a_5 &= s \cos\phi_0 , \quad a_6 = s \sin\phi_0 . \end{aligned} \qquad (28)$$

Здесь обозначено $s = \sum_{i=1}^N w_i \sin 2\theta_i$.

Доказательство согласия с плоским случаем начнём как бы с конца. А именно, предположим, что уравнение (17) действительно имеет корень ϕ_0 и подставим это значение долготы и выражения (28) в формулу (13). При этом получим

$$tg 2\theta = \frac{\sum_{i=1}^N w_i \sin 2\theta_i}{\sum_{i=1}^N w_i \cos 2\theta_i} . \qquad (29)$$

Это ожидаемая нами формула плоского случая (с точностью до обозначения угла), поэтому нам достаточно <u>аналитически</u> доказать, что в нашем случае уравнение (17) имеет корень ϕ_0 .

Подставив выражения (28) в формулу (16), получим следующие значения коэффициентов уравнения (17):

$$\begin{aligned} c_1 &= s \sin\phi_0 \cos^2 \phi_0 (s^2 - 4a_1 a_2), \\ c_2 &= s \cos\phi_0 (1 - 3\sin^2 \phi_0)(s^2 - 4a_1 a_2), \\ c_3 - c_1 &= s \sin\phi_0 (1 - 3\cos^2 \phi_0)(s^2 - 4a_1 a_2), \\ c_4 - c_2 &= s \cos\phi_0 \sin^2 \phi_0 (s^2 - 4a_1 a_2). \end{aligned} \qquad (30)$$

Все величины, зависящие от широты, входят в общий множитель, на который уравнение можно сократить, что, собственно, и должно быть. Формулы (30) показывают также, что общий подход не даёт правильного результата, когда долгота равна 90° - уравнение даст 0°. Сократив на общий множитель, получим уравнение

$$\begin{aligned} &\sin\phi_0 \cos^2 \phi_0 tg^3\phi + \cos\phi_0 (1 - 3\sin^2 \phi_0) tg^2\phi + \\ &+ \sin\phi_0 (1 - 3\cos^2 \phi_0) tg\phi + \cos\phi_0 \sin^2 \phi_0 = 0. \end{aligned} \qquad (31)$$

Уравнение (31) достаточно громоздко для непосредственного анализа, поэтому для выдвижения гипотезы обратимся к экспериментам. Они показывают, что это уравнение (при обозначении $tg\phi = x$) имеет *двукратный* корень $tg\phi_0$ и *однократный* корень $tg(\phi_0 + 90^\circ) = -ctg\phi_0$. Докажем этот факт <u>алгебраически</u>. Перепишем (31) для простоты в исходном виде (17), обозначим $tg\phi_0 = x_1$ и учтём кратности

$$\begin{aligned} &c_1 x^3 + c_2 x^2 + (c_3 - c_1) x + (c_4 - c_2) = \\ &= c_1 (x - x_1)^2 (x + 1/x_1). \end{aligned} \qquad (32)$$

Из теоремы Виета следует, что $x_1 = (c_4 - c_2) / c_1$. Подставив конкретные значения коэффициентов из (31), видим, что $(c_4 - c_2) / c_1 = tg\phi_0$ - что и требовалось. Теперь убедимся, что этот корень двукратный. Для этого поделим многочлен на $x + ctg\phi_0$. В результате получим 0 в остатке (это значит, что $-ctg\phi_0$ на самом деле корень), а в частном

$$\sin\phi_0 \cos^2 \phi_0 (x - tg\phi_0)^2 . \qquad (33)$$

Итак, мы доказали, что если все векторы лежат в плоскости одного меридиана, то получается предполагаемый заранее ответ. Однако с вычислительной точки зрения имеет смысл не пользоваться общими формулами, а лучше сразу задать долготу результата, а по общей формуле вычислять только широту. В пользу такого решения выскажем два аргумента:

- исчезает исключение для меридиана 90 градусов;
- искомый корень является *двукратным*, что за счёт ошибок округления имеет риск его расщепления. Если получится два близких *вещественных* корня, то это не опасно, если же получится два *комплексных* корня с малой мнимой частью, то либо корень будет потерян, либо нужно усложнять алгоритм – проверять, насколько мала мнимая часть по сравнению с вещественной и т.д.

4.Примеры усреднения

Описанный выше способ вычисления среднего направления был программно реализован. Приведём несколько примеров, при этом будем записывать не среднее, а сумму векторов (широта и долгота в градусах).

	Вес	Широта	Долгота
1 слагаемое	1	0	20
2 слагаемое	1	0	60
Сумма	1,5321	0	40

Пример 1. Векторы в плоскости экватора

	Вес	Широта	Долгота
1 слагаемое	1	20	50
2 слагаемое	1	50	50
Сумма	1,7321	35	50

Пример 2. Векторы в плоскости меридиана

	Вес	Широта	Долгота
1 слагаемое	1	10	30
2 слагаемое	1,5	50	70
Сумма	1,5941	37,05	51,05

Пример 3

	Вес	Широта	Долгота
1 слагаемое	1,5	30	20
2 слагаемое	1,3	-10	45
Сумма	1,9267	12,11	32,20

Пример 4

	Вес	Широта	Долгота
1 слагаемое	1	0	0
2 слагаемое	1	0	60
3 слагаемое	1	60	30
Сумма	0,8229	20,45	29,99

Пример 5

	Вес	Широта	Долгота
1 слагаемое	1	0	10
2 слагаемое	2	-30	40
3 слагаемое	1,2	45	80
Сумма	1,2590	-15,31	33,76

Пример 6

Можно убедиться, что если выбрать вектора так, что они образуют правильный сферический треугольник (пример 5 близок к этому, но для правильного треугольника широта у третьего слагаемого немного отличается от 60 градусов), то сумма будет направлена так, как ожидается – по центральной оси трёхгранного угла.

Отметим две **существенные особенности** сложения трёхмерных направлений, не имеющие аналогий для сложения обычных трёхмерных векторов или сложения двумерных направлений.

Особенность 1. Ранее отмечено, что для правильного трёхгранного угла **направление** суммы совпадает с ожидаемым – направление центральной оси. Но **длина** суммы принимает неожиданные значения. По аналогии с двумерным случаем мы предполагали, что сумма равна нулю (а её направление неопределённое) для трёхгранного угла с плоскими углами 90 градусов (три взаимно перпендикулярных направления). В действительности результаты существенно отличаются. Сумма становится равной нулю при плоском угле примерно 74 градуса, причём направление совпадает с центральной осью, то есть однозначно определено. При дальнейшем увеличении (до 120 градусов – максимально возможная величина) длина суммы становится отрицательной, а направление по-прежнему совпадает с центральной осью, кроме угла в 90 градусов, когда при отрицательной длине направление является неопределённым (что соответствует предполагаемому). Можно привести аналитический расчёт ожидаемого направления и таблицу получаемых результатов.

Особенность 2. Сложение трёхмерных направлений не является ассоциативным, хотя, что абсолютно очевидно, является коммутативным. Приведём пример, в скобках соответственно длина, широта, долгота.

$$\vec{a} = (1,0,0) \quad \vec{b} = (1,0,60) \quad \vec{c} = (1,40,30)\,.$$

$$\vec{a}+\vec{b} = (1,0,30) \quad \vec{a}+\vec{c} = (1{,}3268,\ 20{,}635,\ 12{,}9671),$$

$$\vec{b}+\vec{c} = (1{,}3268, 20{,}635,\ 47{,}0329),$$

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = (1{,}5321, 20, 30),$$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = (1{,}5053, 13{,}2246, 27{,}1709),$$

$$(\vec{a}+\vec{c})+\vec{b} = (1{,}5053, 13{,}2246, 32{,}8291),$$

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = (1{,}4419,\ 15{,}2367, 30)\,.$$

Как мы видим, свойство ассоциативности не выполняется, хотя и не совсем произвольным образом. Сумма лежит внутри трёхгранного угла, образованного суммами со скобками, причём он имеет значительно меньший размер, чем исходный. Если эти суммы начинать брать в качестве новых векторов, то уже на втором шаге (результаты первого приведены) итерации трёхгранный угол будет иметь размер настолько малый, что любое его ребро будет отличаться от общей суммы (без скобок) не более, чем на 1%. Отметим также, что нашем случае, несмотря на отсутствие ассоциативности, сумма, записанная без скобок, имеет определённое значение, что обычно при неассоциативности сложения не имеет места.

Заключение

В работе предложен способ усреднения трёхмерного поля направлений, сводящийся в итоге к решению алгебраического уравнения третьей степени. Приведены результаты, полученные при его программной реализации. Отмечены необычные арифметические свойства такого усреднения, в числе которых неассоциативность, отрицательная длина вектора, неодновременность таких свойств вектора, как нулевая длина и неопределённость направления. К сожалению, в настоящее время нет геометрического истолкования и сравнительно правдоподобного объяснения этих фактов. (Точнее говоря, некоторые объяснения есть, но они опираются на столь же нестандартные предпосылки).

Литература

1. **Корн, Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г.Корн, Т.Корн – М.: Наука, 1973. - 832 с.
2. **Сойфер, В.**А. Методы компьютерной обработки изображений /под ред. В.А.Сойфера – М.: Физматлит, 2003. – 780 с.
3. **Уилкинсон, Дж.Х.** Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра / Дж.Х. Уилкинсон, К. Райнш - М.: Машиностроение, 1976. - 392 с.
4. **Soifer, V.A.** Fuzzy Direction Field Method for Fringe and Tree-like Patterns Analysis / V.A. Soifer, A.G. Khramov, A.O.Korepanov // Proceedings of the 17th International Conference on Pattern Recognition. -2004. Volime 2.- P.779-782

В редакцию поступила 10.11.2008г.

AVERAGING OF THREE-DIMENSIONAL DIRECTIONS FIELD

Ustinov Andrey Vladimirovich
RAS Image Processing Systems Institute; leading programmer; e-mail: andr@smr.ru

Abstract

A method of averaging of the three-dimensional directions field is described in present article. It has constructed by analogy with averaging of the conventional planar directions field. The method gives results, quite coordinating with geometrically obvious ones in case, if corporal angle formed by averaged vectors is comparatively small. At increasing of this angle uncommon effects appear. Also it should be noted some interesting feature of the described averaging – it is not associative.

Key words: directions field, three-dimensional directions field, non-associativity of addition.

Citation: Ustinov AV. Averaging of three-dimensional directions field. Computer Optics 2009; 33(1): 101-6.

References

[1] Korn GA, Korn TM. Mathematical Handbook for scientists and engineers. New York: McGraw-Hill Book Company; 1968.
[2] Computer Image Processing, Part II: Methods and algorithms. Edited by Soifer VA. VDM Verlag, 2009.
[3] Wilkinson JH, Reinsch C. Handbook for Automatic Computation. Linear Algebra. Springer-Verlag, 1971.
[4] Soifer VA, Khramov AG, Korepanov AO Fuzzy Direction Field Method for Fringe and Tree-like Patterns Analysis. Proceedings of the 17th International Conference on Pattern Recognition 2004; 2: 779-82.