

## ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИКА, ОПТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

## НЕПАРАКСИАЛЬНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ГАУССОВА ОПТИЧЕСКОГО ВИХРЯ С НАЧАЛЬНОЙ РАДИАЛЬНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ

Алексей Андреевич Ковалев<sup>1,2</sup> (научный сотрудник, e-mail: alanko@smr.ru),Виктор Викторович Котляр<sup>1,2</sup> (заведующий лабораторией, e-mail: kotlyar@smr.ru)<sup>1</sup> Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева,<sup>2</sup> Учреждение Российской академии наук Институт систем обработки изображений РАН

## Аннотация

Исследована непараксиальная дифракция гауссовых оптических вихрей с начальной радиальной поляризацией. Получены явные аналитические выражения для радиальной, азимутальной и продольной компонент вектора напряженности электрического поля. Моделирование показало, что непараксиальные формулы намного точнее при удалении от оптической оси, чем параксиальные. Дифракционное фокусное пятно по полуспаду интенсивности при фокусировке гауссового вихревого поля с топологическим единичным зарядом и радиальной начальной поляризацией получается меньше, чем значение, предсказываемое скалярной теорией.

**Ключевые слова:** непараксиальная дифракция, радиальная поляризация, гауссов оптический вихрь, фокусировка лазерного света.

## Введение

Радиально поляризованные пучки могут быть сгенерированы с помощью пространственно-переменных диэлектрических решеток [1], вращающихся изображений резонаторов [2], интерференционными методами [3] или с помощью оптических волокон [4]. Интерес к лазерным пучкам с радиальной или азимутальной поляризацией появился из-за таких потенциальных применений, как лазерная резка [5] и оптическая микроманипуляция [6], поскольку фокусировка таких пучков приводит к формированию круглого субволнового фокусного пятна.

Распространение радиально-поляризованных пучков рассматривается в [7–9]. В [7] не была изучена продольная компонента поля. В [8] исследована непараксиальная дифракция, но рассматривалось поле без оптических вихрей. В [9] рассмотрена дифракция гауссова пучка с радиальной поляризацией, но в рамках параксиальной теории и также без оптических вихрей. Распространение параксиальных и непараксиальных вихревых пучков рассматривалось в [10–15]. В [10–13] рассматривалась скалярная параксиальная дифракция вихревых пучков, в [14] –

векторная непараксиальная дифракция вихревого пучка с линейной поляризацией и в [15] – скалярная непараксиальная дифракция гипергеометрических лазерных пучков. Острая (непараксиальная) фокусировка невихревых лазерных пучков с радиальной поляризацией и вихревых пучков с эллиптической поляризацией рассматривалась соответственно в [16] и [17]. В основе рассмотрения в [16, 17] были приближенные теории Дебая и Ричардса-Вольфа.

В данной работе получены явные аналитические выражения для радиальной, азимутальной и продольной проекций вектора напряженности электрического поля, описывающие непараксиальную дифракцию гауссовых оптических вихрей (вихревых лазерных пучков) с начальной радиальной поляризацией.

### 1. Интегральные преобразования для описания распространения радиально и азимутально поляризованных лазерных пучков в свободном пространстве

Распространение света в свободном пространстве вдоль оси  $Oz$  описывается хорошо известными интегралами Рэлея-Зоммерфельда:

$$\begin{cases} E_x(u, v, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} E_x(x, y, 0) \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\exp(ikR)}{R} \right] dx dy, \\ E_y(u, v, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} E_y(x, y, 0) \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\exp(ikR)}{R} \right] dx dy, \\ E_z(u, v, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} \left\{ E_x(x, y, 0) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\exp(ikR)}{R} \right] + E_y(x, y, 0) \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\exp(ikR)}{R} \right] \right\} dx dy, \end{cases} \quad (1)$$

где  $R^2 = z^2 + (x-u)^2 + (y-v)^2$ ,  $(x, y)$  – декартовы координаты во входной плоскости, а  $(u, v)$  – декартовы координаты в выходной,  $E_{x,y}(x, y, 0)$  – проекции вектора напряженности электрического поля электромагнитной волны на оси  $x$  и  $y$  в плоскости  $z = 0$ ,

$E_{x,y}(u, v, z)$  – проекции вектора напряженности электрического поля на оси  $x, y, z$  но в произвольной плоскости  $z$ .

От декартовых составляющих электрического вектора вдоль осей  $x$  и  $y$  перейдем к радиальной и азимутальной составляющим:

$$\begin{bmatrix} E_r \\ E_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}, \quad (2)$$

или

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_r \\ E_\varphi \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (4)$$

Тогда для радиальной и азимутальной составляющих верны следующие выражения (в цилиндрических координатах):

$$E_r(\rho, \theta, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} [E_r(r, \varphi, 0) \cos(\varphi - \theta) - E_\varphi(r, \varphi, 0) \sin(\varphi - \theta)] \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\exp(ikR)}{R} \right] r dr d\varphi, \quad (5)$$

$$E_\varphi(\rho, \theta, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} [E_\varphi(r, \varphi, 0) \cos(\varphi - \theta) + E_r(r, \varphi, 0) \sin(\varphi - \theta)] \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\exp(ikR)}{R} \right] r dr d\varphi. \quad (6)$$

Видно, что если в начальной плоскости поле имело радиально-симметричное распределение и было радиально или азимутально поляризовано, то оно останется таким же радиально или азимутально поляризованным при распространении. Это следует из того, что в полярных координатах  $R^2 = z^2 + \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta)$  и интегрирование по переменной  $\varphi$  дает

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \sin(\varphi - \theta) \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\exp(ikR)}{R} \right] d\varphi = \\ & = -\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\exp(ikR)}{R} \right] d\cos(\varphi - \theta) = \\ & = -\chi[\cos(\varphi - \theta)]_{\varphi=0}^{2\pi} = 0, \end{aligned}$$

где  $\chi(\xi)$  – первообразная от функции

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\exp(ik\sqrt{z^2 + \rho^2 + r^2 - 2\rho r \xi})}{\sqrt{z^2 + \rho^2 + r^2 - 2\rho r \xi}} \right].$$

Общий множитель в подынтегральных выражениях (6) можно приближенно упростить:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\exp(ikR)}{R} \right] \approx \frac{ikz}{z^2 + \rho^2} \exp(ik\sqrt{z^2 + \rho^2}) \times \\ & \times \exp\left( \frac{ikr^2}{2\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right) \exp\left[ -\frac{ik\rho r \cos(\varphi - \theta)}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Это приближение непараксиальное, так как в знаменателе дроби, стоящей в показателе экспоненты, присутствует не только продольная координата  $z$ , но и поперечная координата  $\rho$  в плоскости наблюдения.

Тогда выражения для радиальной и азимутальной составляющих упрощаются, и вместо (6) получим:

$$E_r(\rho, \theta, z) = -\frac{ikz}{2\pi(z^2 + \rho^2)} \exp(ik\sqrt{z^2 + \rho^2}) \times \iint_{R^2} [E_r(r, \varphi + \theta, 0) \cos \varphi - E_\varphi(r, \varphi + \theta, 0) \sin \varphi] \times \quad (8)$$

$$\times \exp\left( \frac{ikr^2}{2\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right) \exp\left( -\frac{ik\rho r \cos \varphi}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right) r dr d\varphi,$$

$$E_\varphi(\rho, \theta, z) = -\frac{ikz}{2\pi(z^2 + \rho^2)} \exp(ik\sqrt{z^2 + \rho^2}) \times \iint_{R^2} [E_\varphi(r, \varphi + \theta, 0) \cos \varphi + E_r(r, \varphi + \theta, 0) \sin \varphi] \times \quad (9)$$

$$\times \exp\left( \frac{ikr^2}{2\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right) \exp\left( -\frac{ik\rho r \cos \varphi}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right) r dr d\varphi.$$

### 2. Распространение оптических вихрей с начальной радиальной поляризацией

Если в начальной плоскости радиально поляризованное поле с вихревой составляющей, т.е.

$$\begin{cases} E_r(r, \varphi, 0) = A_r(r) \exp(in\varphi), \\ E_\varphi(r, \varphi, 0) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

то из (5), (6) следует, что в общем случае ( $n \neq 0$ ) компоненты  $E_r$  и  $E_\varphi$  будут отличны от нуля. В этом разделе приводится подробный вывод выражения для  $E_r$ , и только в конце дается без вывода выражение для  $E_\varphi$ :

$$\begin{aligned} E_r(\rho, \theta, z) &= (-i)^n \frac{kz}{2(z^2 + \rho^2)} \times \\ & \times \exp(ik\sqrt{z^2 + \rho^2} + in\theta) \times \\ & \times \int_0^\infty A_r(r) \exp\left( \frac{ikr^2}{2\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right) \times \\ & \times \left[ J_{n-1}\left( \frac{k\rho r}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right) - J_{n+1}\left( \frac{k\rho r}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right) \right] r dr. \end{aligned} \quad (11)$$

В работе [9] рассмотрено распространение радиально поляризованного гауссова пучка с таким распределением в начальной плоскости:

$$\begin{cases} E_x(x, y, 0) = E_0 \left( \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} \right) x \exp[-\alpha(x^2 + y^2)], \\ E_y(x, y, 0) = E_0 \left( \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} \right) y \exp[-\alpha(x^2 + y^2)], \end{cases} \quad (12)$$

где  $\alpha = 1/\omega_0^2 - ik/(2f)$ ,  $\omega_0$  – радиус перетяжки гауссова пучка,  $k$  – волновое число,  $f$  – фокусное расстояние линзы.

Поле с декартовыми составляющими (12) соответствует полю с радиальной составляющей

$$E_r(r, \varphi, 0) = E_0 \left( \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} \right) r \exp(-\alpha r^2). \quad (13)$$

Подставляя это выражение вместо  $A_r(r)$  в (11), получим:

$$E_r(\rho, \theta, z) = \frac{(-i)^n k z E_0}{\sqrt{2} \omega_0 (z^2 + \rho^2)} \times \exp\left(ik\sqrt{z^2 + \rho^2} + in\theta\right) \times \int_0^\infty r^2 \exp(-\beta r^2) [J_{n-1}(\gamma r) - J_{n+1}(\gamma r)] dr, \quad (14)$$

где

$$\gamma = \frac{k\rho}{\sqrt{z^2 + \rho^2}},$$

$$\beta = \alpha - \frac{ik}{2\sqrt{z^2 + \rho^2}} = \frac{\alpha q}{\sqrt{z^2 + \rho^2}},$$

$$q = \sqrt{z^2 + \rho^2} - \frac{ik}{2\alpha}.$$

Интеграл в (14) можно вычислить с помощью следующего справочного интеграла [9, выражение 6.618.1]:

$$\int_0^\infty \exp(-\alpha x^2) J_\nu(\beta x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} \exp(-y) I_{\frac{\nu}{2}}(y), \quad (15)$$

где  $\text{Re } \nu > -1$ ,  $\text{Re } \alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $y = \beta^2 / (8\alpha)$ ,  $I_n(x)$  – функция Бесселя второго рода. Дифференцируя (15) по  $\alpha$ , можно получить:

$$\int_0^\infty x^2 \exp(-\alpha x^2) J_\nu(\beta x) dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha\sqrt{\alpha}} \exp(-y) \times \left[ (\nu - 1 + 2y) I_{\frac{\nu}{2}}(y) - 2y I_{\frac{\nu-2}{2}}(y) \right]. \quad (16)$$

Используя этот интеграл, а также рекуррентное соотношение для функций  $I_\nu(z)$  [19, выражение 9.6.26], получим:

$$E_z(\rho, \theta, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} \left\{ E_r(r, \varphi, 0) [r - \rho \cos(\varphi - \theta)] + E_\varphi(r, \varphi, 0) \rho \sin(\varphi - \theta) \right\} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{\exp(ikR)}{R} \right] r dr d\varphi. \quad (21)$$

В частности, если в начальной плоскости поле было радиально поляризовано, то с использованием (7) можно получить:

$$E_z(\rho, \theta, z) \approx \frac{ik}{2\pi(z^2 + \rho^2)} \exp\left(ik\sqrt{z^2 + \rho^2}\right) \times \iint_{R^2} E_r(r, \varphi, 0) [r - \rho \cos(\varphi - \theta)] \exp\left(\frac{ikr^2}{2\sqrt{z^2 + \rho^2}}\right) \exp\left[-\frac{ikpr \cos(\varphi - \theta)}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}\right] r dr d\varphi. \quad (22)$$

$$E_r(\rho, \theta, z) = \frac{(-i)^n \sqrt{\pi} k z E_0}{4\sqrt{2} \omega_0 \beta \sqrt{\beta} (z^2 + \rho^2)} \times \left[ (n - 4x) I_{\frac{n-1}{2}}(x) + (n + 4x) I_{\frac{n+1}{2}}(x) \right] \times \exp\left(ik\sqrt{z^2 + \rho^2} - x + in\theta\right), \quad (17)$$

где  $x = \gamma^2 / (8\beta)$ .

Аналогично можно получить выражение для азимутальной составляющей:

$$E_\varphi(\rho, \theta, z) = \frac{(-i)^{n+1} n \sqrt{\pi} k z E_0}{4\sqrt{2} \omega_0 \beta \sqrt{\beta} (z^2 + \rho^2)} \times \left[ I_{\frac{n+1}{2}}(x) + I_{\frac{n-1}{2}}(x) \right] \times \exp\left(ik\sqrt{z^2 + \rho^2} - x + in\theta\right), \quad (18)$$

Выражения (17) и (18) являются общими для описания гауссова оптического вихря произвольного порядка  $n$  с радиальной начальной поляризацией (10).

В [9] рассматривался случай, когда  $n = 0$ . Его также можно получить из уравнения (17) (как следует из (18), в этом случае  $E_\varphi = 0$ ):

$$E_r(\rho, \theta, z) = \frac{-k^2 z E_0 \rho}{2\sqrt{2} \omega_0 \alpha^2 q^2 \sqrt{z^2 + \rho^2}} \times \exp\left(ik\sqrt{z^2 + \rho^2} - \frac{k^2 \rho^2}{4\alpha q \sqrt{z^2 + \rho^2}}\right). \quad (19)$$

В параксиальном приближении  $q \approx z - ik/(2\alpha)$ ,  $(z^2 + \rho^2)^{1/2} \approx z + \rho^2/(2z) \approx z$ . Следовательно,

$$E_r(\rho, \theta, z) = \frac{-k^2 E_0 \rho}{2\sqrt{2} q^2 \alpha^2 \omega_0} \exp(ikz) \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2q}\right). \quad (20)$$

Подобное выражение было получено и в работе [9] (формулы (27)), оно отличается от (20) только комплексной сопряженностью.

### 3. Выражения для продольной составляющей

Продольная составляющая вычисляется с помощью третьего интеграла в (1).

При переходе к радиальной и азимутальной компонентам получится следующее выражение (в цилиндрических координатах):

Если в начальной плоскости радиально поляризованное вихревое поле (10), то по аналогии с выражениями для поперечных составляющих можно показать, что для продольной составляющей получится выражение:

$$E_z(\rho, \theta, z) = (-i)^n \frac{ik}{2(z^2 + \rho^2)} \exp(ik\sqrt{z^2 + \rho^2} + in\theta) \times \left\{ 2 \int_0^\infty r^2 A_r(r) \exp\left(\frac{ikr^2}{2\sqrt{z^2 + \rho^2}}\right) J_n\left(\frac{kpr}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}\right) dr + \right. \\ \left. + ip \int_0^\infty r A_r(r) \exp\left(\frac{ikr^2}{2\sqrt{z^2 + \rho^2}}\right) \left[ J_{n+1}\left(\frac{kpr}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}\right) - J_{n-1}\left(\frac{kpr}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}\right) \right] dr \right\}. \quad (23)$$

Рассмотрим распространение радиально поляризованного гауссова пучка (13). Тогда

$$E_z(\rho, \theta, z) = (-i)^n \frac{ikE_0}{\sqrt{2}\omega_0(z^2 + \rho^2)} \exp(ik\sqrt{z^2 + \rho^2} + in\theta) \times \\ \times \left\{ 2 \int_0^\infty r^3 \exp(-\beta r^2) J_n(\gamma r) dr + ip \int_0^\infty r^2 \exp(-\beta r^2) [J_{n+1}(\gamma r) - J_{n-1}(\gamma r)] dr \right\}, \quad (24)$$

где

$$\beta = \alpha - \frac{ik}{2\sqrt{z^2 + \rho^2}}, \\ \gamma = \frac{k\rho}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}.$$

Второй интеграл имеет ту же форму, что и (16). Первый интеграл берется при дифференцировании по  $\alpha$  следующего справочного интеграла [18, выражение 6.631.7]:

$$\int_0^\infty x \exp(-\alpha x^2) J_\nu(\beta x) dx = \frac{\sqrt{\pi}\beta}{8\alpha^{3/2}} \times \\ \times \exp\left(-\frac{\beta^2}{8\alpha}\right) \left[ I_{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right) - I_{\frac{\nu+1}{2}}\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right) \right], \quad (25)$$

где  $\text{Re } \alpha > 0, \text{Re } \nu > -2$ .

С помощью (25) можно получить:

$$\int_0^\infty x^3 \exp(-\beta x^2) J_\nu(\gamma x) dx = \frac{\sqrt{\pi}\gamma}{8\beta^2\sqrt{\beta}} \exp(-t) \times \\ \times \left\{ \frac{3}{2} \left[ I_{\frac{\nu-1}{2}}(t) - I_{\frac{\nu+1}{2}}(t) \right] + \frac{t}{2} \left[ I_{\frac{\nu-3}{2}}(t) - 3I_{\frac{\nu-1}{2}}(t) + 3I_{\frac{\nu+1}{2}}(t) - I_{\frac{\nu+3}{2}}(t) \right] \right\}, \quad (26)$$

где  $t = \gamma^2/(8\beta)$ .

Подставляя выражения (25), (26) в (24), получим:

$$E_z(\rho, \theta, z) = (-i)^n \frac{\sqrt{\pi}ikE_0}{4\sqrt{2}\beta^2\sqrt{\beta}\omega_0(z^2 + \rho^2)} \times \\ \times \exp(ik\sqrt{z^2 + \rho^2} - t + in\theta) \times \\ \times \left\{ \frac{3\gamma}{2} \left[ I_{\frac{n-1}{2}}(t) - I_{\frac{n+1}{2}}(t) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\gamma t}{2} \left[ I_{\frac{n-3}{2}}(t) - 3I_{\frac{n-1}{2}}(t) + 3I_{\frac{n+1}{2}}(t) - I_{\frac{n+3}{2}}(t) \right] - \right. \\ \left. - i\beta\rho \left[ (n-4t)I_{\frac{n-1}{2}}(t) + (n+4t)I_{\frac{n+1}{2}}(t) \right] \right\}. \quad (27)$$

Заметим, что выражение (27) похоже по своей структуре на выражение, полученное авторами в [14] для гауссового оптического вихря с эллиптической поляризацией.

Используя рекуррентные соотношения для модифицированных функций Бесселя и приводя подобные слагаемые, получим окончательно:

$$E_z(\rho, \theta, z) = \frac{(-i)^n \sqrt{\pi}ikE_0}{4\sqrt{2}\beta^2\sqrt{\beta}\omega_0(z^2 + \rho^2)} \times \\ \times \exp(ik\sqrt{z^2 + \rho^2} - t + in\theta) \times \\ \times \left\{ \left[ \frac{\gamma(n+2)}{2} - 2\gamma t - i\beta\rho(n-4t) \right] I_{\frac{n-1}{2}}(t) + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\gamma(n-2)}{2} + 2\gamma t - i\beta\rho(n+4t) \right] I_{\frac{n+1}{2}}(t) \right\}. \quad (28)$$

Если пучок во входной плоскости невихревой (т.е.  $n = 0$ ), то

$$E_z(\rho, \theta, z) = \frac{ikE_0}{\sqrt{2}q^2\alpha^2\omega_0} \left( 1 + \frac{ik\rho^2}{2q} \right) \times \\ \times \exp\left( ik\sqrt{z^2 + \rho^2} - \frac{k^2\rho^2}{4q\alpha\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right). \quad (29)$$

В параксиальном приближении верно следующее равенство:

$$ik\sqrt{z^2 + \rho^2} - \frac{k^2\rho^2}{4q\alpha\sqrt{z^2 + \rho^2}} \approx \\ \approx ikz + \frac{ik\rho^2}{2z} - \frac{k^2\rho^2}{4q\alpha z} = ikz + \frac{ik\rho^2}{2q}.$$

Используя его, получим:

$$E_z(\rho, \theta, z) \approx \frac{ikE_0}{\sqrt{2}q^2\alpha^2\omega_0} \times \\ \times \left( 1 + \frac{ik\rho^2}{2q} \right) \exp\left( ikz + \frac{ik\rho^2}{2q} \right). \quad (30)$$

Это выражение так же совпадает (с точностью до комплексного сопряжения) с выражением для продольной компоненты радиально-поляризован-

ного гауссова пучка, полученным в работе [9] (формула (32)).

**4. Численное моделирование**

При численном моделировании интегралы (1) вычислялись по методу прямоугольников и сравнивались со значениями, получаемыми при использовании формул (19) и (29) и формул, получаемых из (19) и (29) для параксиального приближения.

Для расчетов были использованы следующие значения параметров: длина волны  $\lambda = 633$  нм, мощность пучка  $E_0 = 1$  Вт/см<sup>2</sup>, радиус перетяжки гауссова пучка  $\omega_0 = 1$  мкм, фокусное расстояние параболической линзы  $f = 5$  мкм, расстояние, пройденное светом  $z = 5$  мкм (т.е. поле рассматривалось в фокусе линзы), полярный угол в выходной плоскости  $\theta = 0$ , пределы интегрирования для вычисления поля по формулам (1)  $x, y \in [-4\omega_0, +4\omega_0] \times [-4\omega_0, +4\omega_0]$ , шаг дискретизации по обеим переменным  $8\omega_0/N, N = 300$ .

На рис. 1а показана зависимость радиальной составляющей  $E_r$  (вещественной части) от радиальной координаты  $\rho$ . Кривая 1 соответствует полю, вычисленному по формуле (1), кривая 2 – по непараксиальной формуле (19), кривая 3 – по параксиальной формуле (20). На рис. 1б показаны те же зависимости для компоненты  $E_z$ : кривая 1 соответствует полю, вычисленному по формуле (1) (третий интеграл), кривая 2 – по непараксиальной формуле (29), кривая 3 – по параксиальной формуле (30). На рис. 1в показана интенсивность  $I = E_r^2 + E_z^2$ , рассчитанная по формулам (1).

Из рис. 1 видно, что ближе к оптической оси параксиальные формулы (20) и (30) дают распределение амплитуды, близкое к значениям, даваемым интегралами (1), однако при удалении от оси непараксиальные формулы намного точнее.

Аналогичные сравнительные исследования проводились и для пучка (13) с добавлением оптического вихря с  $n = 1$ . На рис. 2 также показаны распределения амплитуд компонент  $E_r$  и  $E_z$ , а также интенсивности  $I$ . Кривая 1 соответствует полю, вычисленному по формуле (1), кривая 2 – по непараксиальным формулам (17) и (28).

Расчет интенсивности (рис. 2в) проведен по формуле (1), в ней автоматически учтена составляющая  $E_\phi$ , не показанная на рис. 2.

Интересно отметить, что невихревой гауссов пучок ( $n = 0$ ) формирует в фокусе кольцевое распределение интенсивности (хотя  $I \neq 0$  при  $\rho = 0$ ), а вихревой гауссов пучок (при  $n = 1$ ) собирается в круглое фокальное пятно.

**Заключение**

В работе исследована непараксиальная дифракция гауссовых оптических вихрей с начальной радиальной поляризацией. Получены выражения для радиальной, азимутальной и продольной компонент вектора напряженности электрического поля. При  $n = 0$  в пара-

ксимальном случае полученные выражения (17), (18) сводятся к выражению (20), которое совпадает с уравнением (27) в [9], а (28) сводится к (30), которое совпадает с уравнением (32) в [9]. Численное моделирование показало, что ближе к оптической оси параксиальные формулы (20) и (30) дают распределение амплитуды, близкое к значениям, даваемым интегралами (1), однако при удалении от оси полученные непараксиальные формулы намного точнее. Дифракционное фокусное пятно по полуспаду интенсивности для рассмотренного случая (рис. 2в)  $FWHM \approx 2,2\lambda$ , хотя числовая апертура линзы  $NA \approx 1/\sqrt{1+5^2} \approx 0,196$ . Согласно скалярной теории диаметр фокусного пятна (по полуспаду интенсивности) должен быть равен  $FWHM \approx 0,5\lambda/NA$ . В нашем случае он должен быть равен  $FWHM \approx 2,5\lambda$ .

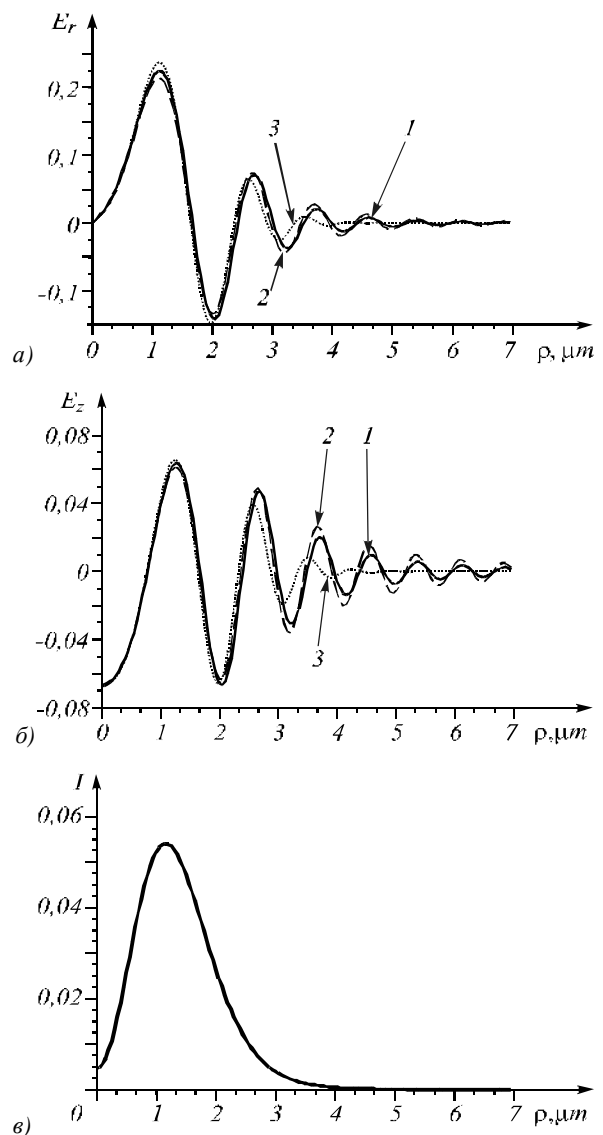


Рис. 1. Амплитуда радиально поляризованного гауссового пучка в плоскости геометрического фокуса линзы: радиальная составляющая  $E_r$  (а), продольная составляющая  $E_z$  (б) и интенсивность  $I$  (в)

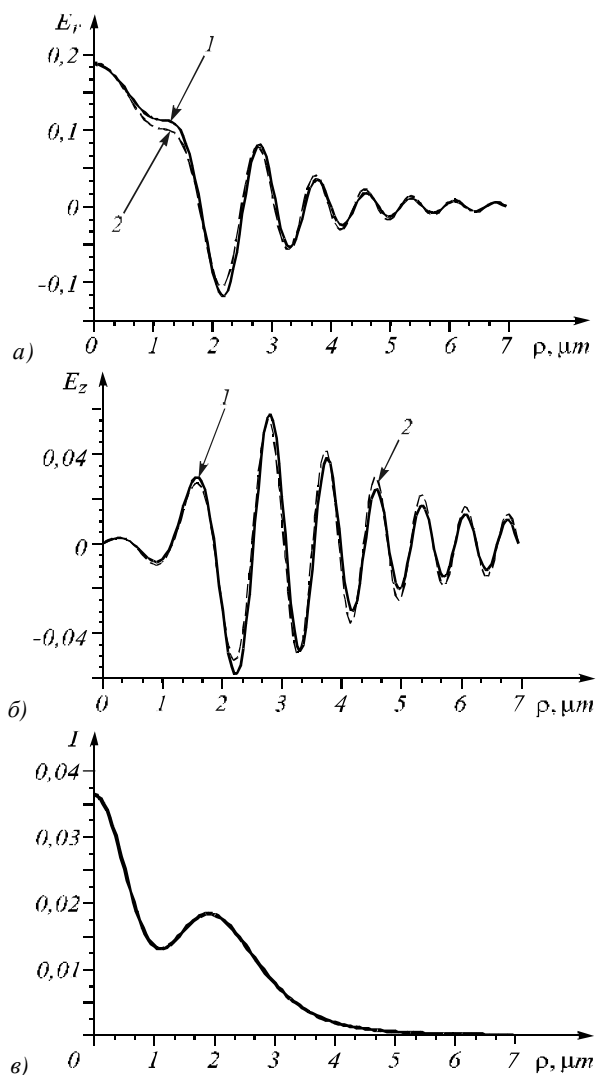


Рис. 2. Амплитуда радиально поляризованного вихревого гауссового пучка ( $n = 1$ ) в плоскости геометрического фокуса линзы: радиальная составляющая  $E_r$  (а), продольная составляющая  $E_z$  (б) и интенсивность  $I$  (в)

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (грант CRDF PG08-014-1), гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-3086.2008.9).

### Литература

1. **Bomzon, Z.** Formation of radially and azimuthally polarized light using spacevariant subwavelength metal strip grating / Z. Bomzon, V. Kleiner, E. Hasman // *Appl. Phys. Lett.* 2001. – Vol. 79. – p. 1587-1589.
2. **Armstrong, D.J.** Generation of radially polarized beams with an image rotating resonator / D.J. Armstrong, M.C. Phillips, A.V. Smith // *Appl. Opt.* 2003. – Vol. 42. – p. 3550-3554.
3. **Passilly, N.** Simple interferometric technique for generation of a radially polarized light beam / N. Passilly [and other] // *J. Opt. Soc. Am. A* 2005 22. – p. 984-991.
4. **Volpe, G.** Generation of cylindrical vector beams with few-mode fibers by Laguerre-Gaussian beams / G. Volpe, D. Petrov // *Opt. Commun.* 2004. – Vol. 237. – p. 89-95.

5. **Niziev, V.G.** Influence of beam polarization on laser cutting efficiency / V.G. Niziev, A.V. Nesterov // *J. Phys. D* 1999. – Vol. 32. – p. 1455-1461.
6. **Gahagan, K.T.** Simultaneous trapping of low-index and high-index microparticles observed with an optical-vortex trap / K.T. Gahagan, G.A. Swartzlander, Jr. // *J. Opt. Soc. Am. B* 1999. – Vol. 16. – p. 533-537.
7. **Wu, G.** Focal shift in focused radially polarized ultrashort pulsed laser beams / G. Wu [and other] // *Appl. Opt.* 2007. – Vol. 46. – p. 6251-6255.
8. **Deng, D.** Nonparaxial propagation of radially polarized light beams / D. Deng // *J. Opt. Soc. Am. B* 2006. – Vol. 23. – p. 1228-1234.
9. **Banerjee, P.** A q-parameter approach to analysis of propagation, focusing, and waveguiding of radially polarized Gaussian beams / P. Banerjee, G. Cook, and D. Evans // *J. Opt. Soc. Am. A* 2009. – Vol. 26(6). – p. 1366-1374.
10. **Kotlyar, V.V.** Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate / V. Kotlyar [and other] // *J. Opt. Soc. Am. A* 2005. – Vol. 22. – p. 849-861.
11. **Котляр, В.В.** Дифракция конической волны и гауссового пучка на спиральной фазовой пластинке / В.В. Котляр [и др.] // *Компьютерная оптика*, 2005. – № 28. – С. 29-36. – ISSN 0134-2452.
12. **Котляр, В.В.** Дифракция Гауссового пучка на спиральном аксиконе / В.В. Котляр [и др.] // *Компьютерная оптика*, 2006. – № 30. – С. 30-35. – ISSN 0134-2452.
13. **Ковалев, А.А.** Параксиальные гипергеометрические лазерные пучки с особенностью в центре перетяжки / А.А. Ковалев [и др.] // *Компьютерная оптика*, 2007. – № 31(1). – С. 9-13. – ISSN 0134-2452.
14. **Ковалев, А.А.** Непараксиальная векторная дифракция гауссового пучка на спиральной фазовой пластинке / А.А. Ковалев, В.В. Котляр // *Компьютерная оптика*, 2007. – № 31(4). – С. 19-22. – ISSN 0134-2452.
15. **Котляр, В.В.** Непараксиальные гипергеометрические моды / В.В. Котляр, А.А. Ковалев // *Компьютерная оптика*, 2008. – № 32(3). – С. 222-225. – ISSN 0134-2452.
16. **Rashid, M.** Focusing of high order cylindrical vector beams / M Rashid, O M Marago, P H Jones // *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* 2009. – Vol. 11. – p. 065204 (7pp).
17. **Chen, B.** Tight focusing of elliptically polarized vortex beams / B. Chen, J. Pu // *Appl. Opt.* 2009. – Vol. 48. – p. 1288-1294.
18. *Table of Integrals, Series, and Products* / I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. - Elsevier, 2007.
19. *Handbook of Mathematical Functions* / ed. M. Abramowitz, I.A. Stegun. - National Bureau of Standards, Washington, DC, 1964. - 1044p.

### References

1. **Bomzon, Z.** Formation of radially and azimuthally polarized light using spacevariant subwavelength metal strip grating / Z. Bomzon, V. Kleiner, E. Hasman // *Appl. Phys. Lett.* 2001. – Vol. 79. – p. 1587-1589.
2. **Armstrong, D.J.** Generation of radially polarized beams with an image rotating resonator / D.J. Armstrong, M.C. Phillips, A.V. Smith // *Appl. Opt.* 2003. – Vol. 42. – p. 3550-3554.
3. **Passilly, N.** Simple interferometric technique for generation of a radially polarized light beam / N. Passilly [and other] // *J. Opt. Soc. Am. A* 2005 22. – p. 984-991.
4. **Volpe, G.** Generation of cylindrical vector beams with few-mode fibers by Laguerre-Gaussian beams / G. Volpe, D. Petrov // *Opt. Commun.* 2004. – Vol. 237. – p. 89-95.
5. **Niziev, V.G.** Influence of beam polarization on laser cutting efficiency / V.G. Niziev, A.V. Nesterov // *J. Phys. D* 1999. – Vol. 32. – p. 1455-1461.

6. **Gahagan, K.T.** Simultaneous trapping of low-index and high-index microparticles observed with an optical-vortex trap / K.T. Gahagan, G.A. Swartzlander, Jr. // *J. Opt. Soc. Am. B* 1999. – Vol. 16. – p. 533-537.
7. **Wu, G.** Focal shift in focused radially polarized ultrashort pulsed laser beams / G. Wu [and other] // *Appl. Opt.* 2007. – Vol. 46. – p. 6251-6255.
8. **Deng, D.** Nonparaxial propagation of radially polarized light beams / D. Deng // *J. Opt. Soc. Am. B* 2006. – Vol. 23. – p. 1228-1234.
9. **Banerjee, P.** A q-parameter approach to analysis of propagation, focusing, and waveguiding of radially polarized Gaussian beams / P. Banerjee, G. Cook, and D. Evans // *J. Opt. Soc. Am. A* 2009. – Vol. 26(6). – p. 1366-1374.
10. **Kotlyar, V.V.** Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate / V. Kotlyar [and other] // *J. Opt. Soc. Am. A* 2005. – Vol. 22. – p. 849-861.
11. **Kotlyar, V.V.** Diffraction of conic wave and Gaussian beam by a spiral phase plate / V.V. Kotlyar [and other] // *Computer Optics.* – 2005. – Vol. 28. – P. 29–36. – ISSN 0134-2452. – (in Russian).
12. **Kotlyar, V.V.** Diffraction of Gaussian beam by a spiral axicon / V.V. Kotlyar [and other] // *Computer Optics.* – 2006. – Vol. 30. – P. 30-35. – ISSN 0134-2452. – (in Russian).
13. **Kovalev, A.A.** Paraxial hypergeometric laser beams with singularity at the center of the waist / A.A. Kovalev [and other] // *Computer Optics.* – 2007. – Vol. 31(1). – P. 9-13. – ISSN 0134-2452. – (in Russian).
14. **Kovalev, A.A.** Nonparaxial vectorial diffraction of Gaussian beam by a spiral phase plate / A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar // *Computer Optics.* – 2007. – Vol. 31(4). – P. 19-22. – ISSN 0134-2452. – (in Russian).
15. **Kotlyar, V.V.** Nonparaxial hypergeometric modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // *Computer Optics.* – 2008. – Vol. 32(3). – P. 222-225. – ISSN 0134-2452. – (in Russian).
16. **Rashid, M.** Focusing of high order cylindrical vector beams / M Rashid, O M Marago, P H Jones // *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* 2009. – Vol. 11. – P. 065204 (7pp).
17. **Chen, B.** Tight focusing of elliptically polarized vortex beams / B. Chen, J. Pu // *Appl. Opt.* 2009. – Vol. 48. – p. 1288-1294.
18. *Table of Integrals, Series, and Products* / I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. - Elsevier, 2007.
19. *Handbook of Mathematical Functions* / ed. M. Abramowitz, I.A. Stegun. - National Bureau of Standards, Washington, DC, 1964.- 1044p.

## NONPARAXIAL PROPAGATION OF VECTORIAL GAUSSIAN OPTICAL VORTEX WITH RADIAL POLARIZATION

*Alexey Andreevich Kovalev<sup>1,2</sup> (researcher, e-mail: alanko@smr.ru),  
Victor Victorovich Kotlyar<sup>1,2</sup> (head of laboratory, e-mail: kotlyar@smr.ru)  
<sup>1</sup> S.P. Korolyov Samara State Aerospace University,  
<sup>2</sup> Image Processing Systems Institute of the RAS*

### Abstract

Nonparaxial diffraction of Gaussian optical vortices with initial radial polarization has been investigated. We have obtained explicit analytical expressions for radial, azimuthal, and longitudinal components of the electric vector. The simulation showed that nonparaxial formulae are more accurate than paraxial ones for areas located far from optical axis. The focal spot (area with intensity exceeding half of its maximal value) of focused Gaussian vortex field with unit topological charge and radial polarization appears to be less than that predicted by scalar theory.

**Key words:** nonparaxial diffraction, radial polarization, Gaussian optical vortex, focusing of laser light.

*В редакцию поступила 11.09.2009г.*