АВТОМОДУЛЯЦИЯ ОДНОМЕРНЫХ ВОЛН НА ОСНОВЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С НЕКЕРРОВСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Иван Васильевич Алименков (доцент кафедры прикладной математики, e-mail: i-alimenkov@mail.ru)
Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева

Аннотация

Показано, что нелинейное уравнение Шредингера с *некерровской нелинейностью* имеет решение в виде локализованного импульса, движущегося с постоянной скоростью без дисперсионного уширения. Данное решение найдено прямым методом, основанном на теории гамильтоновых систем, и содержит в себе, как частный случай, известное решение кубичного нелинейного уравнения Шредингера.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, нелинейность пятой степени, теория гамильтоновых систем, канонические преобразования, уравнение Гамильтона-Якоби, солитонные решения для степенной нелинейности.

Введение

Перечень физических приложений стандартного нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) $i\partial\psi/\partial t+\partial^2\psi/\partial x^2+2\bar{\eta}|\psi|^2\psi=0$, описывающего в общем случае эволюцию огибающей несущей квазимонохроматической волны в слабонелинейной системе, и связанных с ним нелинейных уравнений в настоящее время чрезвычайно обширен, и вряд ли можно сомневаться в их физической значимости. Нелинейный кубический член $|\psi|^2\psi$ в различных физических моделях, описываемых этим уравнением, возникает обычно из степенного разложения некоторой физической величины n_{NL}, зависящей от интенсивности $I=|\psi|^2$. Это разложение имеет вид:

$$n_{NL}(I)=n_2I+n_4I^2+....=n_2|\psi|^2+n_4|\psi|^4+.... .$$

К примеру, в нелинейной оптике n_{NL} – нелинейная часть показателя преломления $n = n_0 + n_{NL}$. Стандартный безразмерный вид НУШ, приведенный выше, записан при учете наинизшего члена разложения $n_{NL}\approx n_2I=n_2|\psi|^2$. При этом коэффициент нелинейности $\bar{\eta}$ пропорционален n_2.

Функция нелинейного отклика системы $n_{NL}(I)$ на внешнее воздействие несущей квазимонохроматической волны в общем случае имеет сложный вид, определяемый конкретным физическим механизмом взаимодействия системы с полем несущей волны. Для нахождения явного вида $n_{NL}(I)$ часто требуется квантовомеханический расчет, не позволяющий определить аналитическую зависимость функции отклика от интенсивности в широком диапазоне. Функция отклика должна обладать двумя очевидными свойствами, а именно: обращаться в ноль при $I = 0$ и выходить на насыщение при I >>1. Степенное разложение, указанное выше, применимо при малых значениях интенсивности, но даже в этом случае, если ось I является правой касательной к графику функции $n_{NL}(I)$ в нуле, то разложение начинается только с члена $n_4I^2=n_4|\psi|^4$, что приводит к НУШ

$$i\partial\psi/\partial t+\partial^2\psi/\partial x^2+2\eta|\psi|^4\psi=0$$

с нелинейностью пятой степени.

Чтобы включить в решение и керровскую нелинейность третьей степени, рассмотрим более общее уравнение

$$i\partial\psi/\partial t+\partial^2\psi/\partial x^2+2\eta|\psi|^{2\nu}\psi=0. \quad (1)$$

При $\nu=1$ уравнение (1) очень хорошо изучено [1] и его решение имеет вид

$$\psi=A\frac{\exp\{i[\upsilon x/2+(u^2-\upsilon^2)t/4+\varphi_0]\}}{ch\frac{u}{2}(x-x_0-\upsilon t)},$$

где $u=2A\sqrt{\eta}$. Здесь A,υ,x_0,φ_0 - свободные параметры.

Основной формализм

Целью данной работы является решение уравнения (1) при произвольном $\nu > 0$ (не обязательно целом) прямым методом, основанном на теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка и теории гамильтоновых систем.

Подстановка полевой функции ψ вида

$$\psi=\sqrt{I}\exp\{i(x\upsilon/2-t\delta+\varphi_0)\}, \quad (2)$$

где $\upsilon,\delta,\varphi_0$ - свободные параметры, в (1) приводит после отделения мнимой и вещественной частей к двум уравнениям

$$\frac{\partial I}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial I}{\partial x}=0, \quad (3)$$

$$2I\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2=a^2I^2-8\eta I^{\nu+2}, \quad (4)$$

где

$$a^2=\upsilon^2-4\delta \quad . \quad (5)$$

Уравнение (3) является линейным однородным уравнением первого порядка с детально разработанной теорией [2]. Как известно из теории таких уравнений, общим решением (3) является любая дифференцируемая функция $I = u(s(x,t))$, где $s(x,t)$ – левая часть первого интеграла уравнения характеристик, имеющая, как легко проверить, вид $s = x - x_0 - \upsilon t$.

Подстановка $I = u(s)$ в (4) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$2u(s)u''(s) - u'^2(s) = a^2u^2(s) - 8\eta u^{\nu+2}(s). \quad (6)$$

Упрощающее масштабное преобразование $u = \left(\frac{a^2}{\eta}\right)^{1/\nu} f(\tau), \quad \tau = as$ приводит (6) к виду

$$2f\ddot{f} - \dot{f}^2 = f^2 - 8f^{\nu+2}, \quad (7)$$

где $\dot{f} = df(\tau)/d\tau$.

Как легко проверить, (7) следует из нормальной системы гамильтоновых уравнений $\dot{f} = \partial H/\partial p_f$, $\dot{p}_f = -\partial H/\partial f$ с функцией Гамильтона

$$H = -f\left(\frac{1}{8} - 2p_f^2\right) + f^{\nu+1}/(\nu+1). \quad (8)$$

Решение уравнения (7) можно провести с помощью канонических преобразований и теории Гамильтона-Якоби. Как следует из теоремы Якоби-Пуанкаре, если существует принадлежащая классу C^2 функция $S(f, p, \tau)$, такая, что $\left|\partial^2 S/\partial f\partial p\right| \neq 0$, то преобразование $(f, p_f) \leftrightarrow (q, p)$, генерируемое этой функцией: $p_f = \partial S/\partial f$; $q = \partial S/\partial p$, является каноническим, а новая функция Гамильтона имеет вид

$$\overline{H}(q,p,\tau) = H\big(f(q,p,\tau),\ p_f(q,p,\tau),\ \tau\big) + \frac{\partial S}{\partial \tau}\big(f(q,p,\tau),\ p,\ \tau\big).$$

В теории канонических преобразований для двумерного фазового пространства можно исходить из четырех типов производящих функций [3]. Для дальнейших целей наиболее подходящей является функция $F = R_2(p_f, q, \tau)$. Тогда явный вид преобразований найдется из разрешения уравнений

$$f = \frac{\partial F}{\partial p_f}; \quad p = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad (9)$$

а новая функция Гамильтона

$$\overline{H}(q,p,\tau) = H\big(f(q,p,\tau),\ p_f(q,p,\tau),\ \tau\big) - \frac{\partial F}{\partial \tau}\big(p_f(q,p,\tau),\ q,\ \tau\big). \quad (10)$$

Перейдем от динамической системы $\{f, p_f, H\}$ к представлению взаимодействия $\{q, p, \overline{H}\}$ с помощью производящей функции $F = 2qArth4p_f - q\tau$. Из уравнений (9) следует явный вид преобразований:

$$f = 8qch^2\frac{p+\tau}{2}; \quad p_f = \frac{1}{4}th\frac{p+\tau}{2}, \quad (11)$$

а из (10) явный вид функции Гамильтона:

$$\overline{H} = \frac{(8q)^{\nu+1}}{\nu+1}ch^{2(\nu+1)}\frac{p+\tau}{2}. \quad (12)$$

На заключительном этапе совершим второе преобразование от $\{q, p, \overline{H}\}$ к $\{Q, P, \tilde{H} \equiv 0\}$, откуда следует, что $Q = const$; $P = const$, а производящая функция преобразования $\overline{F}(p, Q, \tau)$ удовлетворяет уравнению $\overline{H}(\partial\overline{F}/\partial p,\ p, \tau) = \partial\overline{F}/\partial\tau$.

Теперь соотношения

$$q = \partial\overline{F}/\partial p, \quad P = \partial\overline{F}/\partial Q \quad (13)$$

в неявной форме задают первые интегралы гамильтоновой системы

$$\dot{q} = \partial\overline{H}/\partial p; \quad \dot{p} = -\partial\overline{H}/\partial q. \quad (14)$$

Уравнение для производящей функции с учетом (12) имеет вид

$$\frac{\left(8\partial\overline{F}/\partial p\right)^{\nu+1}}{\nu+1}ch^{2(\nu+1)}\frac{p+\tau}{2} = \frac{\partial\overline{F}}{\partial\tau}. \quad (15)$$

Покажем, что частное решение системы (14) для случая нулевых значений произвольных постоянных *Q = 0, P = 0* приводит к солитонному решению исходного уравнения (1). В этом случае производящую функцию можно представить в виде

$$\overline{F}(p, Q/\tau) = g(p,\tau) + Qh(p,\tau), \quad (16)$$

ограничившись первой степенью по Q, имея в виду, что после составления уравнений (13) следует положить *Q = 0, P = 0*.

Подставляя (16) в (15) и удерживая только члены линейные по Q, находим

$$\frac{8^{\nu+1}}{\nu+1}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)^{\nu+1} + (\nu+1)\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)^{\nu} Q\frac{\partial h}{\partial p}\right]ch^{2(\nu+1)}\frac{p+\tau}{2} = \frac{\partial g}{\partial\tau} + Q\frac{\partial h}{\partial\tau},$$

отсюда следуют два уравнения для g и h:

$$\frac{8^{\nu+1}}{\nu+1}\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)^{\nu+1}ch^{2(\nu+1)}\frac{p+\tau}{2} = \frac{\partial g}{\partial\tau}, \quad (17)$$

$$8^{\nu+1}\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)^{\nu}\frac{\partial h}{\partial p}ch^{2(\nu+1)}\frac{p+\tau}{2} = \frac{\partial h}{\partial\tau}. \quad (18)$$

Полагая $g = g(p+\tau)$, из (17) находим

$$\frac{\partial g}{\partial p} = \frac{(\nu+1)^{1/\nu}}{8^{1+1/\nu}}\left[ch\frac{p+\tau}{2}\right]^{-2(1+1/\nu)}. \quad (19)$$

Подстановка этого выражения в (18) приводит к линейному однородному уравнению первого порядка

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} - (\nu + 1)\frac{\partial h}{\partial p} = 0 ,$$

простейшее нетривиальное решение которого имеет вид

$$h = p + (\nu + 1)\tau . \qquad (20)$$

Соотношения (13) с учетом (16) дают:

$$q = \frac{\partial g}{\partial p} + Q\frac{\partial h}{\partial p}; \quad P = h .$$

Полагая здесь $Q = P = 0$, с учетом (19) и (20), находим:

$$p = -(\nu + 1)\tau ,$$

$$q = \frac{(\nu + 1)^{1/\nu}}{8^{1+1/\nu}} \left(ch(\nu\tau / 2)\right)^{-2(1+1/\nu)} .$$

Подстановка последних двух формул в (11) дает решение исходной гамильтоновой системы с гамильтонианом (8):

$$\begin{aligned} f &= \left(\frac{\nu + 1}{8}\right)^{1/\nu} \left[ch(\nu\tau / 2)\right]^{-2/\nu}; \\ p_f &= -\frac{1}{4} th(\nu\tau / 2) \end{aligned} \quad . \qquad (21)$$

Подстановка первой из этих формул в уравнение (7) обращает его в тождество.

Из приведенного выше масштабного преобразования и первой формулы (21) получается следующее выражение для интенсивности I :

$$I = \left(\frac{a^2(\nu + 1)}{8\eta}\right)^{1/\nu} \left[ch(as\nu / 2)\right]^{-2/\nu} .$$

Учитывая (5) и вводя обозначение $a^2 = = 8\eta A^{2\nu} / (\nu + 1)$, окончательно находим решение (2):

$$\psi = A \frac{\exp\left\{ i \left[\frac{x\upsilon}{2} - \left(\frac{\upsilon^2}{4} - \frac{A^{2\nu} 2\eta}{\nu + 1} \right) t + \varphi_0 \right] \right\}}{ch^{1/\nu}\left(\nu A^\nu \sqrt{\frac{2\eta}{\nu + 1}} (x - x_0 - \upsilon t) \right)} ,$$

которое является гладкой функцией, локализованной вдоль направления $x(t) = x_0 + \upsilon t$, и представляет собой волновой пакет, движущийся без дисперсионного уширения с постоянной скоростью υ. Очевидно, что при $\nu = 1$ последняя формула превращается в известное решение НУШ с кубичной нелинейностью [1].

Заключение

Таким образом, модуляция нелинейной системой (со степенным по интенсивности откликом на квазигармоническое возмущение) несущей волны в последовательность локализованных импульсов, имеющих форму гиперболического секанса, возведенного в некоторую степень, является общей чертой НУШ с любой положительной степенью нелинейности.

Литература

1. **Тахтаджян, Л.А.,** Гамильтонов подход в теории солитонов / Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев // М.: «Наука», 1986. – 528с.
2. **Степанов, В.В.,** Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов // М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. – 468с.
3. **Шмутцер, Э.,** Основные принципы классической механики и классической теории поля / Э. Шмутцер, // М.: Мир, 1976. – 160с.

References

1. **Takhtajan L.A., Faddeev L.D.** Hamilton approach in theory of solitons. – Moscow: Nauka, 1986, - 528p.
2. **Stepanov V.V.** Course of differential equations. – Moscow: GITTL, 1953. – 468p.
3. **Schmutzer E.** Grundprinzipien der klassischen Mechanik und der klassischen Feldtheorie (kanonischer Apparat). – Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1973. – 160p.

AUTOMODULATION OF ONE-DIMENSIONAL WAVES BASED ON NONLINEAR SCHREDINGGER EQUATION WITH NON-KERR NONLIANERITY

Ivan V. Alimenkov (associated professor, e-mail: i-alimenkov@mail.ru)
S.P. Korolyov Samara State Aerospace University

Abstract

It is shown that nonlinear Schredinger equation with non-Kerr nonlinearity has a localized solution moving with constant velocity without dispersion. This solution is found by straight method based on Hamilton systems theory and it contains the well-known solution of cubic nonlinear Schredinger equation.

Key words: nonlinear Schredinger equation, nonlinearity 5^{th}order, theory of Hamilton systems, canonical transformations, Hamilton-Jacoby equation, soliton solutions for degree nonlinearity.

В редакцию поступила 28.05.2009г.