

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПУЧКИ В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ ДИФРАКЦИИ В РАМКАХ СКАЛЯРНОЙ МОДЕЛИ

Светлана Николаевна Хонина^{1,2} (ведущий научный сотрудник, профессор, e-mail: khonina@smr.ru),
Сергей Анатольевич Балалаев² (аспирант, e-mail: sof.bix@mail.ru)

¹Учреждение Российской академии наук Институт систем обработки изображений РАН,

²Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева

Аннотация

В работе с использованием интеграла Релея-Зоммерфельда первого типа исследуется дифракция ограниченных гипергеометрических мод и обобщенных гипергеометрических пучков в ближней зоне дифракции (порядка нескольких длин волн). При рассмотрении частных случаев гипергеометрических пучков в рамках скалярной непараксиальной теории дифракции численно показана возможность преодоления дифракционного предела с помощью фазового логарифмического аксикона. На основе представления фазовой функции логарифмического аксикона как набора линейных кольцевых аксиконов проведен анализ полученных результатов.

Ключевые слова: гипергеометрические моды, обобщенные гипергеометрические пучки, непараксиальное интегральное преобразование, дифракционный логарифмический аксикон, линейный аксикон, преодоление дифракционного предела.

Введение

Гипергеометрические (ГГ) моды, рассмотренные впервые В. В. Котляром с соавторами [1-3], являются одним из типов модовых решений параксиального волнового уравнения в цилиндрических координатах. Эти решения описывают семейство световых полей, которые сохраняют свою структуру при распространении, изменяясь только масштабно.

Свойства нового типа мод интенсивно рассматривались как той же группой авторов [4-10], так и другими учеными [11-13].

Данные моды отличаются от известных параксиальных мод (гауссовых, бесселевых) тем, что их основной радиус увеличивается как корень квадратный от пройденного расстояния (а не пропорционально ему) и расстояние между соседними максимумами (или минимумами) в картине дифракции обратно пропорционально радиальной координате (а не эквидистантно, как у бесселевых).

ГГ моды, как и параксиальные моды Бесселя, обладают бесконечной поперечной протяженностью и энергией. На практике из-за поперечного ограничения их можно сформировать только приближенно и на конечном отрезке вдоль оптической оси. Однако более компактное, чем у бесселевых мод, распределение энергии (за счет уменьшающегося периода колец) позволяет ГГ модам дольше сопротивляться дифракционным искажениям, связанным с необходимостью обрезать моду до некоторого радиуса. Исследования показали, что отрезок бездифракционного распространения ГГ мод может увеличиваться в несколько раз по сравнению с бесселевыми модами, имеющими такой же размер центрального кольца [14].

Тем не менее, физическая реализация ГГ мод имеет дополнительные сложности: амплитуда и фаза в начальной плоскости ($z=0$) имеют особенности в центральной точке (при $r=0$), что приводит к необходимости также вырезать или аппроксимировать центральную область. Также резкий спад амплитудной функции при росте радиальной координаты за-

трудняет применение методов кодирования амплитудной информации в фазовую – периферийная часть прописывается очень плохо даже при большом числе уровней квантования. Приходится искать компромисс [14] между точностью воспроизведения ГГ моды и ее энергетической эффективностью, т.к. основная часть энергии сосредоточена в центральной (проблемной) области.

Наиболее энергетически эффективным решением является игнорирование амплитудной информации [8], но в этом случае формируемые пучки практически теряют свои модовые свойства.

Обобщение ГГ мод с добавлением гауссовой составляющей рассмотрено в работе [15], где вводится понятие ГГ пучков, энергия которых ограничена. Такие пучки при распространении будут «расплываться» еще быстрее, чем чисто фазовые аналоги ГГ мод [9], но они удобны для формирования и были успешно использованы в задачах оптического микроманипулирования [16].

Амплитудная и фазовая особенности распределения ГГ мод в центре начальной плоскости (в центре перетяжки), с одной стороны, затрудняют физическую реализацию этих мод, а с другой - являются причиной неограниченного увеличения пространственной частоты [4]. Данный факт позволяет рассматривать ГГ моды в качестве аналога так называемых суперосциллирующих функций [17, 18], используемых для сверхразрешения [19].

Исследования преобразования особенностей ГГ мод при их распространении в ближней зоне (несколько длин волн) были бы полезны в решении задачи субволновой локализации светового излучения.

В работе [10] были аналитически рассмотрены непараксиальные гипергеометрические пучки, однако оценки размера центрального светового пятна сделаны только для случая отсутствия логарифмической фазовой функции. Использование же амплитудной сингулярности энергетически неэффективно.

Сравнение линейного и логарифмического аксиконов, формирующих бесселевые и ГГ моды, соот-

ответственно, проводилось в работе [20], но только в параксиальной области.

В данной работе численно с использованием интеграла Релея-Зоммерфельда первого типа исследуется дифракция ограниченных ГГ мод и гипергеометрических пучков в ближней зоне дифракции (порядка нескольких длин волн). Интегральное преобразование реализовано на основе быстрого алгоритма, описанного в [21].

1. Гипергеометрические моды

Параксиальное волновое уравнение в цилиндрических координатах (уравнение типа Шредингера) имеет вид:

$$\left(2ik \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) E(r, \varphi, z) = 0, \quad (1)$$

где (r, φ) - поперечные полярные координаты, z - координата, направленная вдоль оптической оси, $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число света с длиной волны λ .

В [2, 3] было показано, что уравнению (1) удовлетворяют функции, образующие ортонормированный базис:

$$E_{\gamma,n}(r, \varphi, z) = \frac{(-1)^{|n|}}{2\pi |n|!} \left(\frac{2z}{kw^2} \right)^{i\gamma-1} \times \exp \left[-\frac{i\pi}{4} (|n| - i\gamma + 1) \right] \left(\frac{kr^2}{2z} \right)^{|n|/2} \Gamma \left(\frac{|n| + i\gamma + 1}{2} \right) \times {}_1F_1 \left(\frac{|n| + 1 - i\gamma}{2}, |n| + 1; \frac{ikr^2}{2z} \right) \exp(in\varphi), \quad (2)$$

где n - целое число (порядок вихревой фазовой сингулярности, топологический заряд), γ - комплексное число, являющееся вторым индексом ГГ моды; w - вещественный параметр, задающий масштаб ГГ моды, аналогичен радиусу перетяжки гауссова пучка; $\Gamma(x)$ - гамма функция; ${}_1F_1(a, b; x)$ - вырожденная (или конфлюэнтная) гипергеометрическая функция [22]:

$${}_1F_1(a, b, x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} \exp(xt) dt. \quad (3)$$

Выражение (3) может также быть записано в виде ряда Тейлора (функция Куммера):

$${}_1F_1(a, b, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m x^m}{(b)_m m!}, \quad (4)$$

где $(a)_m = a(a+1)(a+2)\dots(a+m-1)$ - символ Похгаммера, $(a)_0 = 1$.

В работе [5] было показано, что при расчете ГГ мод интегральное представление (3) является более устойчивым к росту значения аргумента $x = ikr^2/2z$, чем полиномиальное представление (4).

Обобщенные ГГ пучки, энергия которых ограничена за счет добавления гауссовой составляющей, рассмотрены в [15]. Они представляют собой трехпараметрическое семейство функций и являются обобщением гипергеометрических мод [2, 3] и двухпараметрических гипергеометрических пучков [4].

Для исследования дифракции обобщенных ГГ пучков в ближней зоне дифракции было использовано следующее выражение для комплексного распределения во входной плоскости ($z=0$):

$$E_{\gamma,n,m}(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r}{w} \right)^m \exp \left(-\frac{r^2}{2\sigma^2} \right) \times \exp \left(i\gamma \ln \frac{r}{w} + in\varphi \right), \quad (5)$$

где σ - радиус перетяжки гауссова пучка, m - целое число, определяющее поведение амплитудной составляющей.

Заметим, что при $\sigma \rightarrow \infty$ и $m = -1$ выражение (5) сводится к ГГ модам (2) в плоскости перетяжки. Если же $\sigma \rightarrow \infty$ и $m = 0$, то амплитудная функция заменяется на постоянную величину и в плоскости перетяжки в комплексном распределении ГГ пучка остается только особенность, связанная с логарифмической фазовой функцией.

Выражение (5) рассматривалось как входная функция при численном моделировании распространения ограниченных апертурой ГГ мод и обобщенных ГГ пучков с помощью интеграла Релея-Зоммерфельда первого типа:

$$E(u, v, z) = -\frac{z}{2\pi} \iint_{\Sigma} E_0(x, y) \frac{e^{ik\ell}}{\ell^2} \left(ik - \frac{1}{\ell} \right) dx dy, \quad (6)$$

где $\ell = \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2 + z^2}$, $E_0(x, y)$ - входное поле (5) в декартовых координатах.

Для вычисления интеграла (6) был применен быстрый алгоритм, использующий возможность факторизации функции (5) на радиальную и угловую составляющие [5, 21]:

$$E_{\gamma,n,m}(r, \varphi, z) = G(r, z, \gamma, n, m) \exp(in\varphi). \quad (7)$$

2. Численные эксперименты

Рассмотрим дифракцию ограниченной ГГ моды (5) при следующих параметрах: $\sigma \rightarrow \infty$, $w = 1$, $\gamma = -10$, $n = 0$, $m = -1$, длина волны освещающего пучка $\lambda = 633$ нм, внутренний и внешний радиусы ограничивающей кольцевой диафрагмы $R_1 = 0,03\lambda$, $R_2 = 3\lambda$, число отсчетов по радиусу равно 100 (т.е. около 30 точек на длину волны).

Вид амплитуды и фазы входной функции (5) при таких параметрах показан на рис. 1, на котором хорошо видно, что из-за резко спадающего амплитудного распределения формирование ГГ мод является крайне энергетически неэффективным. Поэтому в ряде работ [4, 7-9] рассматривались ГГ пучки, сформированные при замене аналитической амплитудной функции на гауссовую или постоянную.

В данной работе, наряду с ограниченной идеальной ГГ модой, рассмотрена ее чисто фазовая аппроксимация (эффективность при этом возрастает пропорционально площади оптического элемента). В этом случае в параметрах входной функции (5) вместо $m = -1$ полагается $m = 0$. На рис. 2 показаны соответствующие радиальные сечения амплитуды и фазы.

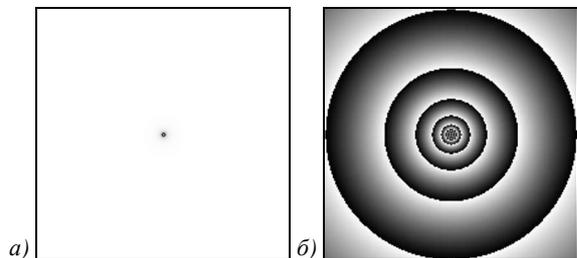


Рис. 1. Амплитуда (негатив) (а) и фаза(б) ГГ моды с $\gamma = -10, n = 0, m = -1$

В табл. 1 приведены результаты численного моделирования распространения комплексных распределений, представленных на рис. 1, 2 в ближней зоне (порядка несколько длин волн) с помощью преобразования Релея-Зоммерфельда первого типа (6) и преобразования Френеля для радиально-вихревых полей:

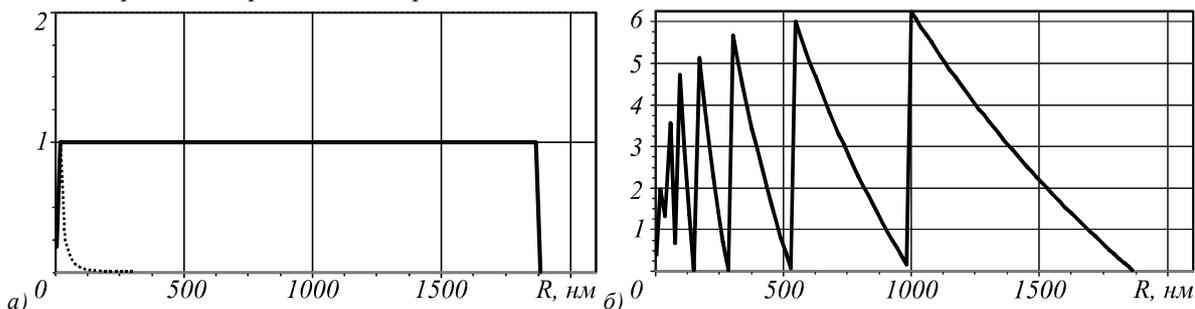


Рис. 2. Радиальное сечение ГГ моды с $\gamma = -10$: амплитуды при $m = -1$ (точечная линия) и $m = 0$ (сплошная линия)(а), а также фазы (б)

Таблица 1. Дифракция ограниченной ГГ моды (5) $\gamma = -10$, при $m = -1$ и $m = 0$ в ближней зоне при использовании непараксиального и параксиального операторов распространения

z, λ		Преобразование (6)		Преобразование Френеля (8)	
		$m = -1$	$m = 0$	$m = -1$	$m = 0$
$z = 0,001\lambda$	интенсивность	FWHM = 113 нм	FWHM = 3770 нм	FWHM = 19 нм	FWHM = 14 нм
	фаза				

$$E(\rho, \theta, z) = \frac{k}{iz} \exp(ikz) \exp(in\theta) \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z}\right) \times \quad (8)$$

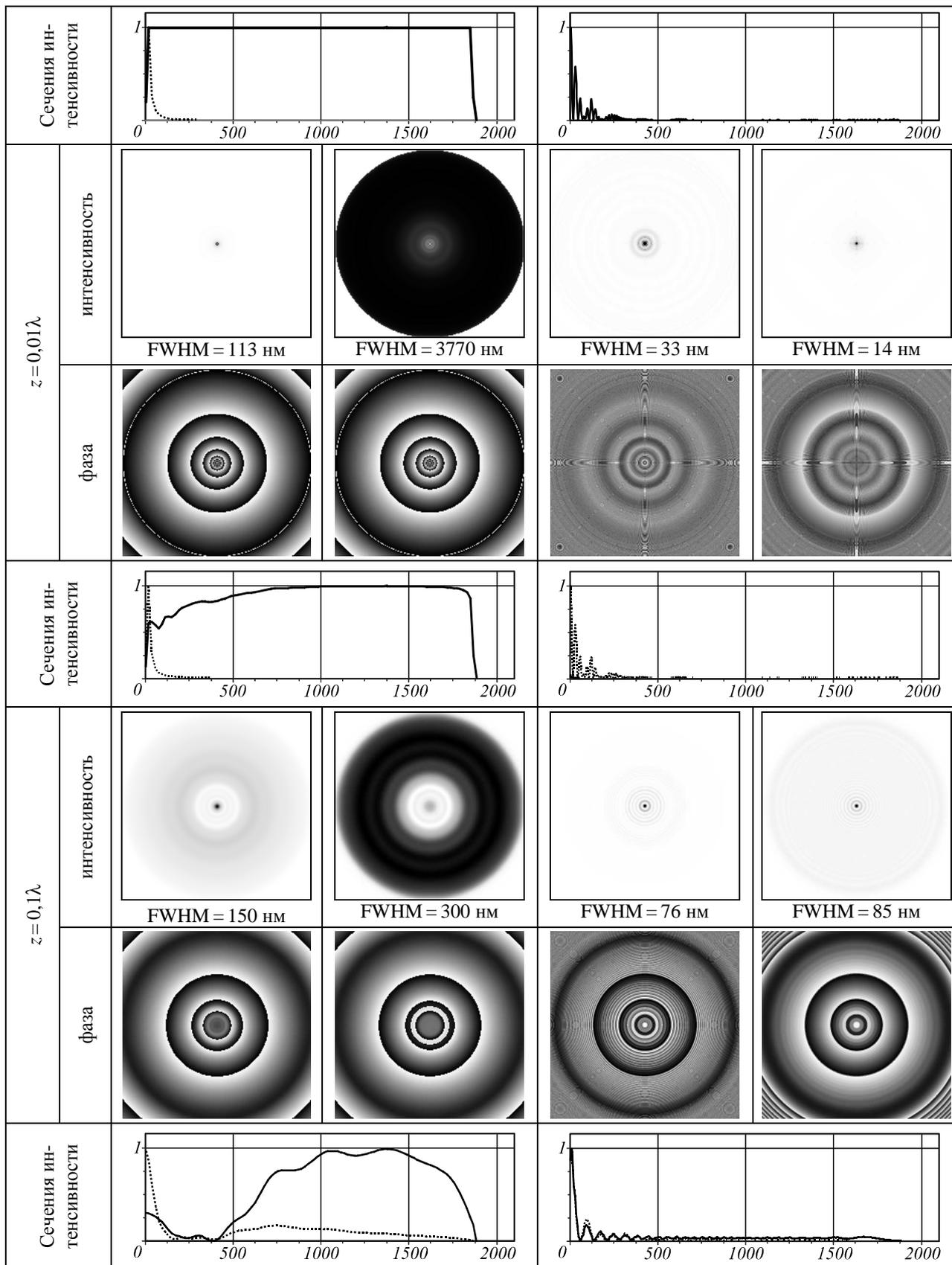
$$\times \int_0^\infty E(r, 0, 0) \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) J_n\left(\frac{kr\rho}{z}\right) r dr.$$

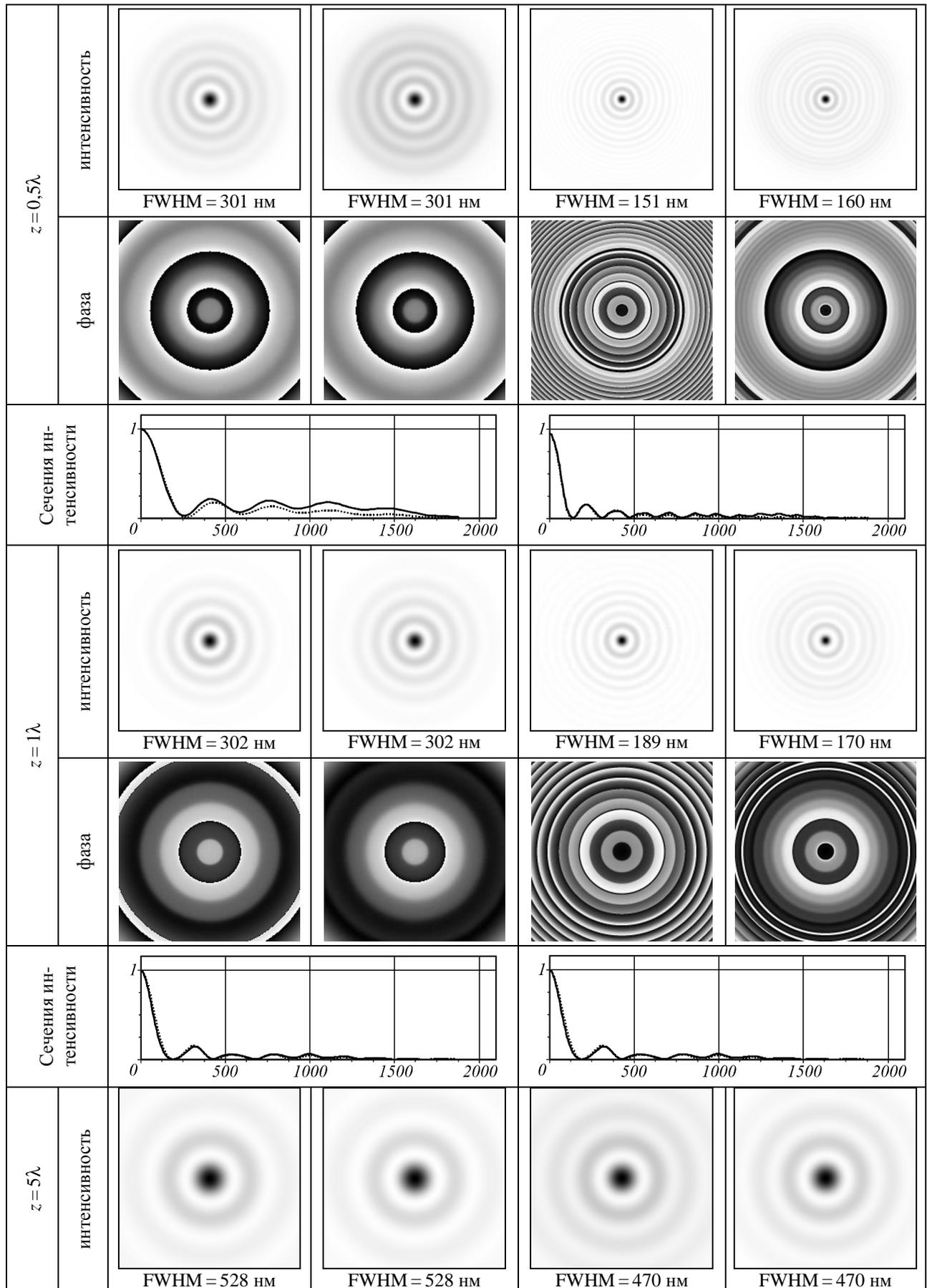
Последнее преобразование является параксиальным, т.е. используется при выполнении условия параксиальности:

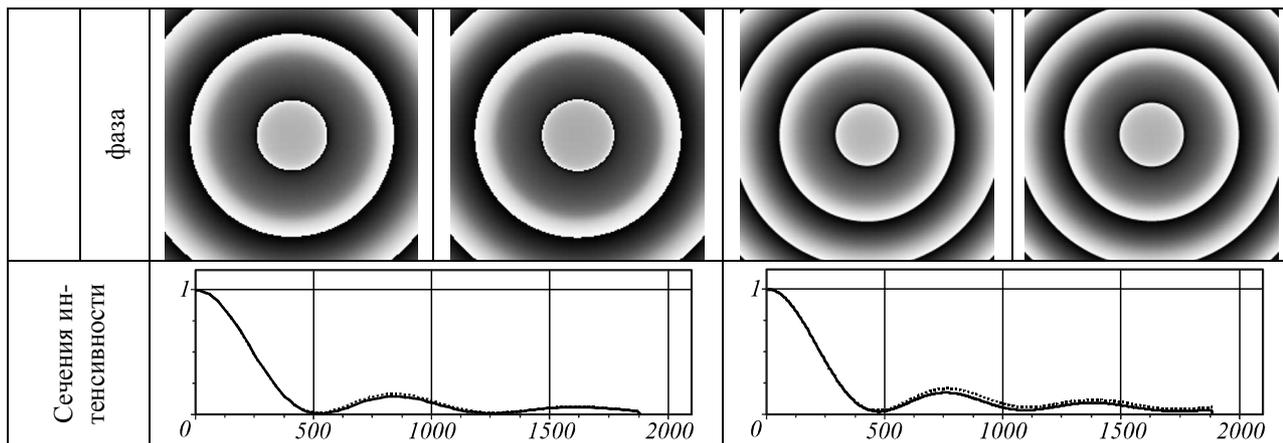
$$z \gg \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2}, \quad (9)$$

и его применение в ближней зоне дифракции является некорректным. Однако выполнение преобразования (8) требует значительно меньших временных затрат, чем преобразование (6). Сравнение результатов действия этих двух операторов распространения позволяет выяснить более точную, чем (9), границу применимости интеграла (8) в рассматриваемой задаче.

Стоит отметить, что при моделировании дифракции ограниченных ГГ мод шаг дискретизации имеет решающее значение, т.к. в этом случае амплитуда входного комплексного распределения близка к дельта-функции (имеет особенность в центре).







К сожалению, несмотря на использование быстрого алгоритма, для выполнения преобразования (6) с высокой степенью дискретизации требуются значительные временные ресурсы (см. табл. 2).

Таблица 2. Сравнение операторов распространения по временным затратам на расчет

Число отсчетов N	Время выполнения	
	Преобразование (6)	Преобразование (8)
100	4 секунды	0,5 секунды
200	79 секунд	1 секунда
400	29 минут	3 секунды
800	11 часов	20 секунд

Повышение числа отсчетов при использовании преобразования (8) на несколько порядков меньше сказывается на временных затратах, но значительно улучшает визуальную картину и позволяет получить приемлемые результаты (с погрешностью порядка 10%) значительно раньше, чем предполагается выполнение условия парааксиальности (9) (при этом расстояние от входной плоскости должно быть значительно больше 8λ).

3. Анализ результатов

Как видно из табл. 1, уже на расстоянии в половину длины волны картины дифракции при использовании непарааксиальной модели для аналитической ограниченной ГГ моды и ГГ пучка, который фактически является ее фазовой аппроксимацией, очень близки. При дальнейшем увеличении расстояния различие между ними становится все меньше и на расстоянии в пять длин волн они полностью совпадают.

Размер центрального светового пятна по полуспаду на расстоянии $z = 1\lambda$ ($\text{FWHM} = 300 \text{ нм} \approx 0,47\lambda$) оказывается меньшим, чем дифракционный предел, равный в воздухе половине длины волны.

Таким образом, в рамках скалярной непарааксиальной теории численно показана возможность преодоления дифракционного предела с помощью дифракционного фазового логарифмического аксикона.

Хотя на расстоянии в несколько длин волн применение интегрального преобразования Релея-

Зоммерфельда считается вполне корректным [23, 24], полученные результаты требуют дополнительной проверки с использованием более строгой теории.

Интересно также отметить, что на расстоянии $z = 5\lambda$ применение парааксиального оператора распространения дает очень близкий результат, хотя условие парааксиальности еще не вступает в силу, а числовая апертура рассмотренных дифракционных оптических элементов достаточно велика $NA \approx \sin(\arctg(R/z)) = 0,5$ и соответствует примерно 30° для периферийных лучей.

Объяснить данный факт можно специфическим распределением входной функции. При зависимости амплитудной функции $1/r$ вклад в картину дифракции даже на очень малых расстояниях вносит только центральная зона входного поля, что соответствует низкому значению числовой апертуры.

Для постоянной амплитуды ситуация несколько сложнее. Фазовую функцию на рис. 2б можно приближенно представить как набор линейных аксиконов $\exp(i\alpha r)$ с переменным параметром α .

На рис. 3 показан вид логарифмической функции (смещенной вверх) с $\gamma = -10$ для нормированного отрезка оси абсцисс, из которого наглядно видно, что данную функцию можно условно разбить на несколько зон:

$$\exp(i\alpha \ln r) = \sum_{q=1}^Q g_q(r), \tag{10}$$

$$\text{где } g_q(r) = \begin{cases} \exp(i\alpha_q r), & r \in [r_{q-1}, r_q] \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

соответствующих области кольцевого диафрагмирования (или аппроксимации значением в ближайшем дискретном отсчете), области высоких и средних частот (порождающих затухающие волны в ближней зоне дифракции), а также область, связанную с распространяющимися волнами. Последняя может быть разделена на две части: причем та часть, где значение фазовой функции меньше 2π (ниже сплошной линии), не участвует в формировании бездифракционных пучков [20].

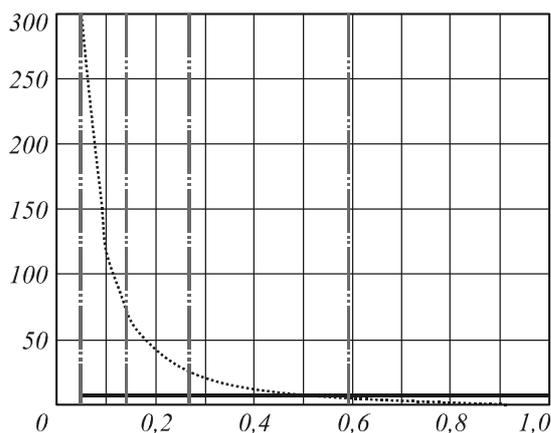


Рис. 3. Деление логарифмической фазовой функции на частотные зоны

Таким образом, в формировании распространяющихся волн, имеющих бездифракционные свойства, участвует только средняя часть дифракционного логарифмического аксикона, а, следовательно, условие параксиальности удовлетворяется значительно раньше, чем можно ожидать, учитывая полный размер входной апертуры.

Оценить параметр линейного аксикона в каждой точке логарифмического аксикона можно по следующей формуле:

$$\alpha(r) = \gamma \frac{\ln r}{r}, \quad (11)$$

используя которую легко оценить переменную числовую апертуру [20]:

$$NA(r) = \alpha(r)\lambda / 2\pi. \quad (12)$$

На рис. 4 показан график $\alpha(r)$ для логарифмического аксикона с $\gamma = -10$. На рис. 5 приведены соответствующие значения числовой апертуры для периферийной части. Известно, что для дифракционного линейного аксикона числовая апертура определяется не по отношению поперечного радиуса оптического элемента к продольному расстоянию, а по периоду кольцевой решетки. В данном случае распространяющиеся в свободном пространстве волны будут формировать только периферийная часть, имеющая числовую апертуру меньше единицы.

Как видно из рис. 5, в периферийной части логарифмический аксикон можно аппроксимировать кусочно-линейной функцией со средней числовой апертурой на каждом отрезке:

$$NA = \begin{cases} 0,9, & r \in [1200\text{нм}, 1300\text{нм}] \\ 0,8, & r \in [1300\text{нм}, 1500\text{нм}] \\ 0,7, & r \in [1500\text{нм}, 1800\text{нм}] \\ 0,6, & r > 1800\text{нм} \end{cases} \quad (13)$$

В этом случае в параксиальной модели можно считать, что каждое фазовое кольцо формирует поперечную интенсивность, пропорциональную квадрату функции Бесселя нулевого порядка [25]: $J_0^2(k \cdot NA \cdot \rho)$

на расстоянии до $z_{\max} \approx r/NA$. Радиус центрального светового пятна такого распределения оценивается как $\rho_0 \approx 0,38\lambda/NA$ и примерно равен FWHM.

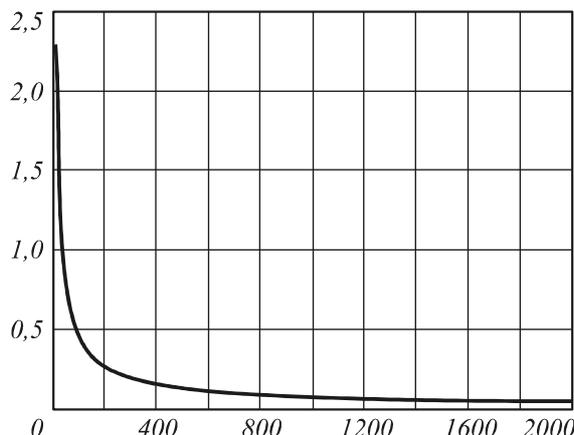


Рис. 4. Переменный параметр линейного аксикона (8) для фазовой функции ГГ моды $\gamma = -10, t = 0$

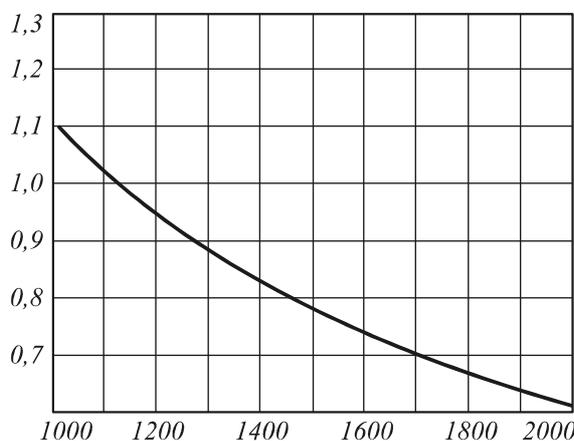


Рис. 5. Переменная числовая апертура в периферийной части, соответствующая фазовой функции ГГ моды $\gamma = -10, t = 0$

Используя (13), можно определить, что кольцо, вносящее основной вклад на расстоянии около 1 мкм, будет формировать световое пятно диаметром (до нулевых значений интенсивности) около 200 нм. Далее пятно будет уширяться, и на расстоянии 5 мкм от входной плоскости будет работать только самое крайнее фазовое кольцо с $NA = 0,6$, формируя световое пятно с $\text{FWHM} = 400$ нм.

Эти цифры вполне согласуются с результатами, получаемыми с помощью параксиального оператора. Однако непараксиальная модель предсказывает, что размеры центрального светового пятна будут несколько больше. На меньших расстояниях, т.е. при более сильном нарушении условия параксиальности рассогласование соответствующих результатов для преобразований (6) и (8) становится значительным.

Заключение

Амплитудная и фазовая особенности распределения ГГ мод в центре начальной плоскости, с одной стороны, затрудняют физическую реализацию

этих мод, а с другой - являются причиной неограниченного увеличения пространственной частоты.

В данной работе в рамках скалярной непараксиальной теории дифракции численно проведены исследования преобразования особенностей ГГ мод при их распространении в ближней зоне (несколько длин волн) и показана возможность субволновой локализации светового излучения (FWHM 300 нм \approx 0,47 λ) на расстояниях, превышающих длину волны, т.е. в области распространяющихся волн.

Важно, что такой эффект можно получить с помощью чисто фазового дифракционного логарифмического аксикона, т.е. без использования амплитудной сингулярности, приводящей к большим потерям энергии.

Также в ходе вычислительного эксперимента обнаружено, что параксиальный интегральный оператор позволяет получать корректные результаты значительно раньше, чем предсказывает условие параксиальности. Данный факт объяснен на основе представления фазовой функции логарифмического аксикона как набора линейных кольцевых аксиконов.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (грант CRDF PG08-014-1), гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-3086.2008.9) и гранта РФФИ 08-07-99007.

Литература

1. **Котляр, В.В.** Оптические чистые вихри и гипергеометрические моды / В.В. Котляр, С.Н. Хонина, А.А. Алмазов, В.А. Соيفер // Компьютерная оптика – 2005. – Т. 27. – С. 21-28 – ISSN 0134-2452.
2. **Котляр, В.В.** Гипергеометрические моды / В.В. Котляр, Р.В. Скиданов, С.Н. Хонина, С.А. Балалаев // Компьютерная оптика. – 2006. – Т. 30. – С. 16-22 – ISSN 0134-2452.
3. **Kotlyar, V.V.** Hypergeometric modes, / V.V. Kotlyar, R.V. Skidanov, S.N. Khonina, and V.A. Soifer // Opt. Lett. – 2007. -V. 32. –P. 742-744.
4. **Ковалев, А.А.** Параксиальные гипергеометрические лазерные пучки с особенностью в центре перетяжки / А.А. Ковалев, В.В. Котляр, С.Н. Хонина, В.А.Соифер // Компьютерная оптика – 2007. – Т. 31. -№1. – С. 9-13 – ISSN 0134-2452.
5. **Балалаев, С.А.** Расчет гипергеометрических мод / С.А. Балалаев, С.Н. Хонина, В.В. Котляр // Известия Самарского научного центра РАН – 2007. – Т. 9. -№3. – С. 584-591.
6. **Балалаев, С.А.** Сравнение свойств гипергеометрических мод и мод Бесселя / С.А. Балалаев, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика – 2007. – Т. 31. -№4. – С. 23-28 – ISSN 0134-2452.
7. **Котляр, В.В.** Некоторые типы гипергеометрических лазерных пучков для оптического микроманипулирования / В.В. Котляр, А.А. Ковалев, Р.В. Скиданов, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика – 2008. – Т. 32. -№2. – С. 180-186 – ISSN 0134-2452.
8. **Балалаев, С.А.** Исследование возможности формирования гипергеометрических лазерных пучков методами дифракционной оптики / С.А. Балалаев, С.Н. Хонина, Р.В. Скиданов // Известия Самарского научного центра РАН – 2008. – Т. 10, -№3. – С. 694-706.
9. **Хонина, С.Н.** Исследование свойств ограниченных гипергеометрических лазерных пучков / С.Н. Хонина, С.А. Балалаев // Компьютерная оптика – 2008. – Т. 32. -№3. – С. 226-233 – ISSN 0134-2452.
10. **Котляр, В.В.** Непараксиальные гипергеометрические моды / В.В. Котляр, А.А. Ковалев // Компьютерная оптика – 2008. – Т. 32. -№3. – С. 222-225 – ISSN 0134-2452.
11. **Karimi, E.** Hypergeometric-Gaussian modes / E. Karimi, G. Zito, B. Piccirillo, L. Marrucci, and E. Santamato // Optics Letters – 2007. V. 32, No. 21. – P. 3053-3055.
12. **Bandres, M.A.** Circular beams / M.A. Bandres and J.C. Gutiérrez-Vega // Optics Letters – 2008. V. 33. No. 2. – P. 177-179.
13. **Karimi, E.** Improved focusing with Hypergeometric-Gaussian type-II optical modes / E. Karimi, B. Piccirillo, L. Marrucci, and E. Santamato // Opt. Express – 2008. -V. 16. -No. 25. – P. 21069- 21075.
14. **Khonina, S.N.** Encoded binary diffractive element to form hyper-geometric laser beams / S.N. Khonina, S.A. Balalayev, R.V. Skidanov, V.V. Kotlyar, B. Paivanranta, J. Turunen // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. – 2009. -V. 11. - 065702 (7pp).
15. **Kotlyar, V.V.** Family of hypergeometric laser beams / V.V. Kotlyar and A.A. Kovalev // J. Opt. Soc. Am. A – 2008. -V. 25. – P. 262-270.
16. **Скиданов, Р.В.** Расчет силы, действующей на сферический микрообъект в гипергеометрических пучках / Р.В. Скиданов, С.Н. Хонина, А.А. Морозов, В.В. Котляр // Компьютерная оптика – 2008. – Т. 32. -№1. – С. 39-44 – ISSN 0134-2452.
17. **Berry, M.V.** Evolution of quantum superoscillations and optical superresolution without evanescent waves / M.V. Berry and S. Popescu // J. Phys. A: Math. Gen. – 2006. -V. 39. – P. 6965–6977.
18. **Ferreira, P. J. S. G.** Superoscillations: faster than the Nyquist rate / P. J. S. G. Ferreira, and A. Kempf // IEEE transactions on signal processing – 2006. -V. 54. -No. 10. – P. 3732-3740.
19. **Huang, F. M.** Super-Resolution without Evanescent Waves / F. M. Huang and N. I. Zheludev // NANO LETTERS – 2009. -V. 9, -No. 3. – P. 1249-1254.
20. **Хонина, С.Н.** Сравнительный анализ распределений интенсивности, формируемых дифракционным аксиконом и дифракционным логарифмическим аксиконом / С.Н. Хонина, С.А. Балалаев // Компьютерная оптика – 2009. – Т. 33. -№2. – С. 162-174 – ISSN 0134-2452.
21. **Балалаев, С.А.** Реализация быстрого алгоритма преобразования Кирхгофа на примере бесселевых пучков / С.А. Балалаев, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика – 2006. – Т. 30. – С. 69-73 – ISSN 0134-2452.
22. **Справочник по специальным функциям** / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган; пер. с англ. - М.: Наука, 1979. - 832 с. (Handbook of mathematical functions / edited by M. Abramowitz and I. A. Stegun - National Bureau of Standards, 1964).
23. **Totzeck, M.** Validity of the scalar Kirchhoff and Rayleigh-Sommerfeld diffraction theories in the near field of small phase objects / M. Totzeck // J. Opt. Soc. Am. A – 1991. -V. 8, -No. 1. – P. 27-32.
24. **Tsoy, V.I.** The use of Kirchhoff approach for the calculation of the near field amplitudes of electromagnetic field / V.I. Tsoy, L.A. Melnikov // Optics Communications – 2005. -V. 256. – P. 1–9.
25. **Хонина, С.Н.** Фраксикон – дифракционный оптический элемент с переменным радиусом фокального пятна / С.Н. Хонина, С.Г. Волотовский // Компьютерная оптика – 2009. – Т. 33. -№4. – С. 401-411 – ISSN 0134-2452.

References

1. **Kotlyar, V.V.** Optical pure vortices and hypergeometric modes / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, A.A. Almazov and V.A. Soifer // Computer Optics. – 2005. – V. 27. – P. 21-28 – ISSN 0134-2452 [in Russian]

2. **Kotlyar, V.V.** Hypergeometric modes, / V.V. Kotlyar, R.V. Skidanov, S.N. Khonina, and S.A. Balalayev // Computer Optics. – 2006. – V. 30. – P. 16-22 – ISSN 0134-2452 [in Russian]
3. **Kotlyar, V.V.** Hypergeometric modes, / V.V. Kotlyar, R.V. Skidanov, S.N. Khonina, and V.A. Soifer // Opt. Lett. – 2007. V. 32. – P. 742-744.
4. **Kovalev, A.A.** Paraxial hypergeometric laser beams with peculiarity in the centre of the waist / A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, and V.A. Soifer // Computer Optics. – 2007. – V. 31, No.1. – P. 9-13 – ISSN 0134-2452 [in Russian]
5. **Balalayev, S.A.** Calculation of hypergeometric modes / S. A. Balalayev, S. N. Khonina, V. V. Kotlyar // Izvest. Samarskogo nauchnogo centra RAS. – 2007. – V. 9, No.3. – P. 584-591 [in Russian]
6. **Balalayev, S.A.** Comparison of properties of hypergeometric modes and Bessel modes / S. A. Balalayev, S. N. Khonina // Computer Optics. – 2007. – V. 31, No.4. – P. 23-28– ISSN 0134-2452 [in Russian]
7. **Kotlyar, V.V.** Particular cases of hypergeometric laser beams in optical micromanipulation / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, R.V. Skidanov, S.N. Khonina // Computer Optics. – 2008. – V. 32, No.2. – P. 180-186– ISSN 0134-2452 [in Russian]
8. **Balalayev, S.A.** Examination of possibility to form hypergeometric laser beams by means of diffractive optics / S.A. Balalayev, S.N. Khonina, R.V. Skidanov // Izvest. Samarskogo nauchnogo centra RAS – 2008. – V.10, No.3. – P. 694-706 [in Russian]
9. **Khonina, S.N.** Examination of bounded hypergeometric laser beams properties / S.N. Khonina, S.A. Balalayev // Computer Optics. – 2008. – V. 32, No.3. – P. 226-233 – ISSN 0134-2452 [in Russian]
10. **Kotlyar, V.V.** Nonparaxial hypergeometric modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // Computer Optics. – 2008. – V. 32, No.3. – P. 222-225 – ISSN 0134-2452 [in Russian]
11. **Karimi, E.** Hypergeometric-Gaussian modes / E. Karimi, G. Zito, B. Piccirillo, L. Marrucci, and E. Santamato // Optics Letters – 2007. V. 32, No. 21. – P. 3053-3055.
12. **Bandres, M.A.** Circular beams / M.A. Bandres and J.C. Gutiérrez-Vega // Optics Letters – 2008. V. 33, No. 2. – P. 177-179.
13. **Karimi, E.** Improved focusing with Hypergeometric-Gaussian type-II optical modes / E. Karimi, B. Piccirillo, L. Marrucci, and E. Santamato // Opt. Express – 2008. V. 16, No. 25. – P. 21069- 21075.
14. **Khonina, S.N.** Encoded binary diffractive element to form hyper-geometric laser beams / S.N. Khonina, S.A. Balalayev, R.V. Skidanov, V.V. Kotlyar, B. Paivanranta, J. Turunen // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. – 2009. V. 11. - 065702 (7pp)
15. **Kotlyar, V.V.** Family of hypergeometric laser beams / V.V. Kotlyar and A.A. Kovalev // J. Opt. Soc. Am. A – 2008. V. 25. – P. 262-270.
16. **Skidanov, R.V.** Расчет силы, действующей на сферический микрообъект в гипергеометрических пучках / R.V. Skidanov, S.N. Khonina, A.A. Morozov, V.V. Kotlyar // Computer Optics. – 2008. – V. 32, No.1. – P. 39-44 – ISSN 0134-2452 [in Russian]
17. **Berry, M.V.** Evolution of quantum superoscillations and optical superresolution without evanescent waves / M.V. Berry and S. Popescu // J. Phys. A: Math. Gen. – 2006. V. 39. – P. 6965–6977.
18. **Ferreira, P. J. S. G.** Superoscillations: faster than the Nyquist rate / P. J. S. G. Ferreira, and A. Kempf // IEEE transactions on signal processing – 2006. V. 54, No. 10. – P. 3732-3740.
19. **Huang, F. M.** Super-Resolution without Evanescent Waves / F. M. Huang and N. I. Zheludev // NANO LETTERS – 2009. V. 9, No. 3. – P. 1249-1254.
20. **Khonina, S.N.** The comparative analysis of the intensity distributions formed by diffractive axicon and diffractive logarithmic axicon / S.N. Khonina, S.A. Balalayev // Computer Optics. – 2009. – V. 33, No.2. – P. 162-174 – ISSN 0134-2452 [in Russian]
21. **Balalayev, S.A.** Realisation of fast algorithm of Kirchhoff's diffraction integral on an example of Bessel modes / S.A. Balalayev, S.N. Khonina // Computer Optics – 2006. – V. 30. – P. 69-73 – ISSN 0134-2452 [in Russian]
22. Handbook of mathematical functions / edited by M. Abramowitz and I. A. Stegun - National Bureau of Standards, 1964.
23. **Totzeck, M.** Validity of the scalar Kirchhoff and Rayleigh-Sommerfeld diffraction theories in the near field of small phase objects / M. Totzeck // J. Opt. Soc. Am. A – 1991. V. 8, No. 1. – P. 27-32.
24. **Tsoy, V.I.** The use of Kirchhoff approach for the calculation of the near field amplitudes of electromagnetic field / V.I. Tsoy, L.A. Melnikov // Optics Communications – 2005. V. 256. – P. 1–9.
25. **Khonina, S.N.** Fraxicon - diffractive optical element with variable size of focal spot / S.N. Khonina, S.G. Volotovskiy // Computer Optics. – 2009. – V. 33, No.4. – P. 401-411 – ISSN 0134-2452 [in Russian]

HYPERGEOMETRICAL BEAMS IN A NEAR ZONE OF DIFFRACTION WITHIN THE LIMITS OF SCALAR MODEL

Svetlana Nikolaevna Khonina^{1,2} (leading researcher, professor, e-mail: khonina@smr.ru),

Sergey Anatolyevich Balalaev² (postgraduate-student, e-mail: sof.bix@mail.ru)

¹Institution of Russian Academy of Sciences, Image Processing Systems Institute RAS,

²S.P. Korolyov Samara State Aerospace University

Abstract

Diffraction of the truncated hyper-geometrical modes and generalized hyper-geometrical beams with use of Rayleigh-Sommerfeld integral of the first type in a near zone (an order of few wavelengths) is investigated. Possibility of overcoming the diffraction limit for phase-only logarithmic axicon (as special case of hyper-geometrical beams) is shown by numerical simulation in the context of scalar nonparaxial diffraction theory. The analysis of the received results is carried out on the basis of representation of logarithmic axicon phase function as a set of ring zones with linear axicons.

Key words: hyper-geometrical modes, generalized hyper-geometrical beams, nonparaxial integral transform, diffractive logarithmic axicon, linear axicon, overcoming the diffraction limit.

В редакцию поступила 18.11.2009г.