ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Леонид Леонидович Досколович (д.ф.-м.н., в.н.с., e-mail leonid@smr.ru),
Николай Львович Казанский (д.ф.-м.н., зам. директора, e-mail: kazansky@smr.ru),
Сергей Иванович Харитонов (к.ф.-м.н., с.н.с., e-mail: prognoz@smr.ru)
Учреждение Российской академии наук Институт систем обработки изображений РАН

Аннотация

В работе получены интегральные представления решений системы уравнений Максвелла для анизотропных сред. Наряду с представлением решений в трехмерном пространстве, получены интегральные представления для решений системы уравнений Максвелла в виде поверхностных волн на границе диэлектрика с отрицательной диэлектрической проницаемостью и анизотропным материалом. Интегральные представления получены с помощью разложения по собственным волнам однородной анизотропной среды, распространяющимся в положительном направлении.

Ключевые слова: интеграл Релея-Зоммерфельда, анизотропная среда, дифракция, уравнения Максвелла, собственные значения, собственные функции, поверхностные электромагнитные волны, разложение по плоским волнам.

Введение

Для решения многих задач распространения и дифракции электромагнитных волн, не имеющих точных решений, используется теория дифракции Кирхгофа-Гюйгенса. Решению задач дифракции с помощью интеграла Кирхгофа-Гюйгенса посвящено много работ, в том числе опубликованных в течение последних нескольких лет [1]-[7]. Привлекательность этого метода состоит в том, что решение можно сразу записать в виде интегрального преобразования. Сам подход имеет наглядный физический смысл. Используя метод Кирхгофа, можно определить поле в различных точках за экраном. Этот метод можно использовать не только для скалярных полей, но и для векторных электромагнитных полей. Поле в любой точке трехмерного пространства можно найти по известным значениям тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей на некоторой поверхности. Обычно вывод интеграла Кирхгофа как в скалярном, так и векторном случае связывают с использованием формул Грина. Другим методом получения интегральных представлений является разложение по плоским волнам.

Интегральные представления для электромагнитных полей, полученные с помощью векторных формул Грина, имеют достаточно сложный вид. Кроме того, для вычисления поля используются одновременно компоненты электрического и магнитного полей. Это не всегда оправдано, так как во многих случаях мы не можем независимо задать тангенциальные компоненты электрического и магнитного поля.

В последнее время появились работы, в которых метод Кирхгофа обобщается на случай поверхностных волн (плазмонов), распространяющихся на границе раздела двух сред. Поверхностные электромагнитные волны имеют большое значение при проектировании различных устройств нанофотоники. Исследованию генерации и распространения плазмонов посвящено множество работ [7]-[16].

Однако в приведенных работах рассматриваются интегральные представления решений для объемных и поверхностных волн, распространяющихся в однородной изотропной среде. В данной работе получены интегральные представления для решений системы уравнений Максвелла для анизотропных сред. Наряду с представлением решений в трехмерном пространстве, получены интегральные представления для решений системы уравнений Максвелла в виде поверхностных волн на границе диэлектрика с отрицательной диэлектрической проницаемостью и анизотропным материалом. Интегральные представления получены с помощью разложения по собственным волнам, распространяющимся в положительном направлении однородной анизотропной среды.

1. Уравнения волн в однородной анизотропной среде

1.1. Основные уравнения

Система уравнений Максвелла в однородной анизотропной и гиротропной среде имеет вид

$$\partial_3 E_1 = \partial_1 E_3 + ik\sum_{k=1}^{3}\mu_{2k}H_k\,, \tag{1}$$

$$\partial_3 E_2 = \partial_2 E_3 - ik\sum_{k=1}^{3}\mu_{1k}H_k\,, \tag{2}$$

$$\partial_3 H_1 = \partial_1 H_3 - ik\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{2k}E_k\,, \tag{3}$$

$$\partial_3 H_2 = \partial_2 H_3 + ik\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{1k}E_k\,, \tag{4}$$

где

$$H_3 = -\left(\frac{i}{k\mu_{33}}\left(\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1\right) + \frac{1}{\mu_{33}}\sum_{\alpha=1}^{2}\mu_{3\alpha}H_\alpha\right), \tag{5}$$

$$E_3 = \left(\frac{i}{k\varepsilon_{33}}\left(\partial_1 H_2 - \partial_2 H_1\right) - \frac{1}{\varepsilon_{33}}\sum_{\alpha=1}^{2}\varepsilon_{3\alpha}H_\alpha\right). \tag{6}$$

E, H – компоненты электрического и магнитного полей, μ_{ij}, ε_{ij} – компоненты тензоров электрической и магнитной проницаемостей. (x^1, x^2, x^3) – декартовы координаты, x^3 – определяет направление распространения света. В случае, если $\mu_{13}, = \varepsilon_{13} = \mu_{23}, = \varepsilon_{23} = 0$, уравнения можно записать в виде

$$\frac{i}{k}\partial_3 E = AH\,,\ \frac{i}{k}\partial_3 H = BE\,, \tag{7}$$

где

$$E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

В этом случае оператор A

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2\varepsilon_{33}}\partial_1\partial_2 - \mu_{21} & -\frac{1}{k^2\varepsilon_{33}}\partial_1\partial_1 - \mu_{22} \\ \frac{1}{k^2\varepsilon_{33}}\partial_2\partial_2 + \mu_{11} & -\frac{1}{k^2\varepsilon_{33}}\partial_2\partial_1 + \mu_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{k^2\varepsilon_{33}}\begin{pmatrix} \partial_1\partial_2 & -\partial_1\partial_1 \\ \partial_2\partial_2 & -\partial_2\partial_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mu_{21} & -\mu_{22} \\ \mu_{11} & \mu_{12} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

оператор B

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{k^2\mu_{33}}\partial_1\partial_2 + \varepsilon_{21} & \frac{1}{k^2\mu_{33}}\partial_1\partial_1 + \varepsilon_{22} \\ -\frac{1}{k^2\mu_{33}}\partial_2\partial_2 - \varepsilon_{11} & \frac{1}{k^2\mu_{33}}\partial_2\partial_1 - \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = -\frac{1}{k^2\mu_{33}}\begin{pmatrix} \partial_1\partial_2 & -\partial_1\partial_1 \\ \partial_2\partial_2 & -\partial_2\partial_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\varepsilon_{21} & -\varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Можно свести к уравнению второго порядка

$$\partial_3^2 E = -k^2 (AB) E\,. \tag{11}$$

Осуществим переход в пространственно-частотное представление

$$E\left(x^1, x^2, x^3\right) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha_1, \alpha_2) \times \exp\left(ik\left(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \gamma(\alpha_1, \alpha_2) x^3\right)\right) d\alpha_1 d\alpha_2, \tag{12}$$

$$H\left(x^1, x^2, x^3\right) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha_1, \alpha_2) \times \exp\left(ik\left(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \gamma(\alpha_1, \alpha_2) x^3\right)\right) d\alpha_1 d\alpha_2. \tag{13}$$

$(\alpha_1,\ \alpha_2)$ – координаты в пространственно-частотном представлении.

Уравнения для функций $F(\alpha_1,\alpha_2)$ и $G(\alpha_1,\alpha_2)$ принимают вид

$$-\gamma(\alpha_1, \alpha_2) F(\alpha_1, \alpha_2) = C(\alpha_1, \alpha_2) G(\alpha_1, \alpha_2), \tag{14}$$

$$-\gamma(\alpha_1, \alpha_2) G(\alpha_1, \alpha_2) = D(\alpha_1, \alpha_2) F(\alpha_1, \alpha_2), \tag{15}$$

где матрицы C и D имеют вид

$$C(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{1}{\varepsilon_{33}}\begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 & -\alpha_1\alpha_1 \\ \alpha_2\alpha_2 & -\alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mu_{21} & -\mu_{22} \\ \mu_{11} & \mu_{12} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{\mu_{33}}\begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 & -\alpha_1\alpha_1 \\ \alpha_2\alpha_2 & -\alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\varepsilon_{21} & -\varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Подставляя первое уравнение во второе, получим уравнение на собственные значения

$$(CD) F = \gamma^2 F\,, \tag{18}$$

$$(CD) = M(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}.$$

M_{ij} -матричные элементы матрицы M. (19)

Функцию $G(\alpha_1,\alpha_2)$ можно представить в виде

$$G(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{D(\alpha_1, \alpha_2) F(\alpha_1, \alpha_2)}{\gamma(\alpha_1, \alpha_2)}. \tag{20}$$

Уравнение на собственные значения имеет вид

$$\det\begin{pmatrix} M_{11} - \gamma^2 & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} - \gamma^2 \end{pmatrix} = \left(M_{11} - \gamma^2\right)\left(M_{22} - \gamma^2\right) - M_{21}M_{12} = 0. \tag{21}$$

Условие совместности приводит к дисперсионному уравнению

$$\gamma^4 - (M_{11} + M_{22})\gamma^2 - M_{21}M_{12} = 0\,. \tag{22}$$

Выражение для корней имеет вид

$$\gamma^2 = \frac{1}{2}\left((M_{11} + M_{22}) \pm \sqrt{(M_{11} + M_{22})^2 + 4M_{21}M_{12}}\right). \tag{23}$$

Система уравнений для определения собственных векторов имеет вид

$$\begin{pmatrix} M_{11} - \gamma^2 & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} - \gamma^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \end{pmatrix} = 0\,. \tag{24}$$

Подставляем выражение γ^2 и получаем следующие выражения для собственных векторов матрицы

$$e_1(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} F_1^1(\alpha_1, \alpha_2) \\ F_1^2(\alpha_1, \alpha_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{12}(\alpha_1, \alpha_2) \\ \frac{1}{2}\left((M_{22} - M_{11}) + \sqrt{(M_{11} + M_{22})^2 + 4M_{21}M_{12}}\right) \end{pmatrix}, \tag{25}$$

$$e_2(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} F_2^1(\alpha_1, \alpha_2) \\ F_2^2(\alpha_1, \alpha_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{12}(\alpha_1, \alpha_2) \\ \frac{1}{2}\left((M_{22} - M_{11}) - \sqrt{(M_{11} + M_{22})^2 + 4M_{21}M_{12}}\right) \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Собственные вектора можно собрать в матрицу

$$\left(e_1(\alpha_1, \alpha_2), e_2(\alpha_1, \alpha_2)\right) = \begin{pmatrix} F_1^1(\alpha_1, \alpha_2) & F_2^1(\alpha_1, \alpha_2) \\ F_1^2(\alpha_1, \alpha_2) & F_2^2(\alpha_1, \alpha_2) \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Произвольное решение для компонент электрического поля в пространственно-частотном представлении можно записать в виде

$$F(\alpha_1, \alpha_2) = g^1(\alpha_1, \alpha_2) e_1(\alpha_1, \alpha_2) + g^2(\alpha_1, \alpha_2) e_2(\alpha_1, \alpha_2). \tag{28}$$

$g^1(\alpha_1, \alpha_2)$, $g^2(\alpha_1, \alpha_2)$ – функции, подлежащие определению.

Если известны компоненты электрического поля в пространственно-частотном представлении, то можно найти компоненты магнитного поля в том же представлении.

1.2. Интегральные представления решения системы уравнений Максвелла в анизотропной среде

Рассмотрим только электрическое поле в волне. В случае, когда в волновой пакет входят только волны, распространяющиеся в положительном направлении, общее решение имеет вид

$$E\left(x^1,x^2,x^3\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} g^1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)e_1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\times \\ \times exp\left(ik\left(\alpha_1 x^1+\alpha_2 x^2+\gamma_1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)x^3\right)\right)d\alpha_1\alpha_2+ \\ +\int_{-\infty}^{+\infty} g^2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)e_2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\times \\ \times exp\left(ik\left(\alpha_1 x^1+\alpha_2 x^2+\gamma_2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)x^3\right)\right)d\alpha_1\alpha_2. \quad (29)$$

В плоскости $x^3=0$ выражение для электрического поля имеет вид

$$E\left(x^1,x^2,0\right)= \\ =\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\begin{pmatrix} e_1\left(\alpha_1,\alpha_2\right) & e_2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g^1\left(\alpha_1,\alpha_2\right) \\ g^2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\end{pmatrix}\right)\times \\ \times exp\left(ik\left(\alpha_1 x^1+\alpha_2 x^2\right)\right)d\alpha_1\alpha_2. \quad (30)$$

Обращая предыдущее уравнение, получаем выражение

$$\begin{pmatrix} e_1\left(\alpha_1,\alpha_2\right) & e_2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g^1\left(\alpha_1,\alpha_2\right) \\ g^2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\end{pmatrix}= \\ =\frac{k^2}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} E\left(x^1,x^2,0\right)\times \\ \times exp\left(-ik\left(\alpha_1 x^1+\alpha_2 x^2\right)\right)dx^1dx^2. \quad (31)$$

Далее, решая систему линейных уравнений, получаем выражения $g^1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$, $g^2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$

$$\begin{pmatrix} g^1\left(\alpha_1,\alpha_2\right) \\ g^2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\end{pmatrix}=\frac{k^2}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\begin{pmatrix} e_1\left(\alpha_1,\alpha_2\right) & e_1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\end{pmatrix}^{-1}\times \\ \times\begin{pmatrix} E_1\left(x^1,x^2,0\right) \\ E_2\left(x^1,x^2,0\right)\end{pmatrix}exp\left(-ik\left(\alpha_1 x^1+\alpha_2 x^2\right)\right)dx^1dx^2. \quad (32)$$

Выражение для обратной матрицы, состоящей из базисных векторов, имеет вид

$$\begin{pmatrix} e_1\left(\alpha_1,\alpha_2\right) & e_2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} F_1^1\left(\alpha_1,\alpha_2\right) & F_2^1\left(\alpha_1,\alpha_2\right) \\ F_1^2\left(\alpha_1,\alpha_2\right) & F_2^2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\end{pmatrix}^{-1}= \\ =\begin{pmatrix} F_2^2\left(\alpha_1,\alpha_2\right) & -F_1^2\left(\alpha_1,\alpha_2\right) \\ -F_2^1\left(\alpha_1,\alpha_2\right) & F_1^1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\end{pmatrix}\Delta^{-1}, \quad (33)$$

где определитель матрицы

$$\Delta\left(\alpha_1,\alpha_2\right)= \\ =F_1^1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)F_2^2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)-F_2^1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)F_1^2\left(\alpha_1,\alpha_2\right). \quad (34)$$

Подставляя эти выражения в исходные уравнения, получаем выражения $g^1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$, $g^2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$ через компоненты электрического поля в плоскости $x^3=0$

$$g^1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=\frac{k^2}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\times \\ \times\left(F_2^2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)E_1\left(x^1,x^2,0\right)- \right. \\ \left. -F_1^2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)E_1\left(x^1,x^2,0\right)\right)\times \\ \times exp\left(-ik\left(\alpha_1 x^1+\alpha_2 x^2\right)\right)dx^1dx^2, \quad (35)$$

$$g^2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=\frac{k^2}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\times \\ \times\left(-F_2^1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)E_1\left(x^1,x^2,0\right)+ \right. \\ \left. +F_1^1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)E_1\left(x^1,x^2,0\right)\right)\times \\ \times exp\left(-ik\left(\alpha_1 x^1+\alpha_2 x^2\right)\right)dx^1dx^2. \quad (36)$$

Подставляя выражения $g^1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$, $g^2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$ в выражение для поля, получаем выражение для поля в пространстве

$$E\left(x^1,x^2,x^3\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} g^1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)e_1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\times \\ \times exp\left(ik\left(\alpha_1 x^1+\alpha_2 x^2+\gamma_1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)x^3\right)\right)d\alpha_1\alpha_2+ \\ +\int_{-\infty}^{+\infty} g^2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)e_2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\times \\ \times exp\left(ik\left(\alpha_1 x^1+\alpha_2 x^2+\gamma_2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)x^3\right)\right)d\alpha_1\alpha_2. \quad (37)$$

Меняя порядок интегрирования и вычисляя полученный интеграл, используя метод стационарной фазы, получаем выражение для пропагатора электрического поля в анизотропной среде. Следует отметить, что для наиболее интересных случаев выражения для функций $g^i\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$ (гауссовы пучки: сходящиеся гауссовы пучки, фокусатор в кольцо) получаются в явном виде, если входящие интегралы вычислить методом стационарной точки или методом перевала. В этом случае расчет поля сводится только к двухкратному интегрированию в области пространственно-частотного спектра.

2. Уравнения поверхностных электромагнитных волн на границе металла и анизотропной среды

2.1. Уравнения для магнитного поля в однородной среде

Рассмотрим распространение поверхностных электромагнитных волн на границе металл-диэлектрик. Сначала рассмотрим представление волн в анизотропной среде. В отличие от предыдущего параграфа рассмотрим магнитное поле.

Пусть

$$E=F\left(\alpha_1,\alpha_2\right)exp\left(ik\left(\alpha_1 x^1+\alpha_2 x^2+\gamma\left(\alpha_1,\alpha_2\right)x^3\right)\right), \quad (38)$$

$$H=G\left(\alpha_1,\alpha_2\right)exp\left(ik\left(\alpha_1 x^1+\alpha_2 x^2+\gamma\left(\alpha_1,\alpha_2\right)x^3\right)\right). \quad (39)$$

Используя эти представления, получим уравнение на собственные значения для функции $G(\alpha_1,\alpha_2)$.

$$(DC)G=\gamma^2 G, \tag{40}$$

где

$$M(\alpha_1,\alpha_2)=(DC)=\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}\end{pmatrix}. \tag{41}$$

Электрическое поле определяется следующим образом

$$F(\alpha_1,\alpha_2)=-\frac{C(\alpha_1,\alpha_2)G(\alpha_1,\alpha_2)}{\gamma(\alpha_1,\alpha_2)}. \tag{42}$$

Условие совместности приводит к дисперсионному уравнению

$$\begin{aligned} &det\begin{pmatrix} M_{11}-\gamma^2 & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}-\gamma^2\end{pmatrix}=\\ &=\left(M_{11}-\gamma^2\right)\left(M_{22}-\gamma^2\right)-M_{21}M_{12}=0,\end{aligned} \tag{43}$$

$$\gamma^4-\left(M_{11}+M_{22}\right)\gamma^2-M_{21}M_{12}=0. \tag{44}$$

Выражение для корней дисперсионного уравнения имеет вид

$$\gamma^2=\frac{1}{2}\left(\left(M_{11}+M_{22}\right)\pm\sqrt{\left(M_{11}+M_{22}\right)^2+4M_{21}M_{12}}\right). \tag{45}$$

Система уравнений для определения собственных векторов имеет вид

$$\begin{pmatrix} M_{11}-\gamma^2 & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}-\gamma^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} G^1\\ G^2\end{pmatrix}=0.$$

Решение уравнения

$$e_1=\begin{pmatrix} M_{12}(\alpha_1,\alpha_2)\\ \left(\gamma_1^2(\alpha_1,\alpha_2)-M_{11}(\alpha_1,\alpha_2)\right)\end{pmatrix}, \tag{46}$$

$$e_2=\begin{pmatrix} M_{12}(\alpha_1,\alpha_2)\\ \left(\gamma_2^2(\alpha_1,\alpha_2)-M_{11}(\alpha_1,\alpha_2)\right)\end{pmatrix}. \tag{47}$$

Подставляем выражение γ^2, получаем окончательное выражение для собственных векторов

$$\begin{aligned} e_1(\alpha_1,\alpha_2)&=\begin{pmatrix} G_1^1(\alpha_1,\alpha_2)\\ G_1^2(\alpha_1,\alpha_2)\end{pmatrix}=\\ &=\begin{pmatrix} M_{12}(\alpha_1,\alpha_2)\\ \frac{1}{2}\left(\left(M_{22}-M_{11}\right)+\sqrt{\left(M_{11}+M_{22}\right)^2+4M_{21}M_{12}}\right)\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} e_2(\alpha_1,\alpha_2)&=\begin{pmatrix} G_2^1(\alpha_1,\alpha_2)\\ G_2^2(\alpha_1,\alpha_2)\end{pmatrix}=\\ &=\begin{pmatrix} M_{12}(\alpha_1,\alpha_2)\\ \frac{1}{2}\left(\left(M_{22}-M_{11}\right)-\sqrt{\left(M_{11}+M_{22}\right)^2+4M_{21}M_{12}}\right)\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{49}$$

Четырехкомпонентный вектор, состоящий из поперечных компонент электрического и магнитного поля, имеет вид

$$W_1(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{pmatrix} -C(\alpha_1,\alpha_2)e_1(\alpha_1,\alpha_2)\\ \gamma_1(\alpha_1,\alpha_2)e_1(\alpha_1,\alpha_2)\end{pmatrix}, \tag{50}$$

$$W_2(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{pmatrix} -C(\alpha_1,\alpha_2)e_2(\alpha_1,\alpha_2)\\ \gamma_2(\alpha_1,\alpha_2)e_2(\alpha_1,\alpha_2)\end{pmatrix}. \tag{51}$$

2.2. Самовоспроизводящиеся решения на границе двух сред

Поле в первой среде представляется в виде линейной комбинации

$$W^{(1)}(\alpha_1,\alpha_2)=a^1W_1^{(1)}(\alpha_1,\alpha_2)+a^2W_2^{(1)}(\alpha_1,\alpha_2), \tag{52}$$

где α_1,α_2 – коэффициенты линейной комбинации, подлежащие определению.

Поле во второй среде имеет вид

$$W^{(2)}(\alpha_1,\alpha_2)=b^1W_1^{(2)}(\alpha_1,\alpha_2)+b^2W_2^{(2)}(\alpha_1,\alpha_2), \tag{53}$$

где b_1, b_2 – коэффициенты линейной комбинации, подлежащие определению.

Условия непрерывности тангенциальных компонент полей на границе раздела сред имеют вид

$$\begin{aligned} &a^1C^{(1)}(\alpha_1,\alpha_2)e_1^{(1)}(\alpha_1,\alpha_2)+\\ &+a^2C^{(1)}(\alpha_1,\alpha_2)e_2^{(1)}(\alpha_1,\alpha_2)-\\ &-b^1C^{(2)}(\alpha_1,\alpha_2)e_1^{(2)}(\alpha_1,\alpha_2)-\\ &-b^2C^{(2)}(\alpha_1,\alpha_2)e_2^{(2)}(\alpha_1,\alpha_2)=0,\end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned} &a^1\gamma_1(\alpha_1,\alpha_2)e_1^{(1)}(\alpha_1,\alpha_2)+\\ &+a^2\gamma_1(\alpha_1,\alpha_2)e_2^{(1)}(\alpha_1,\alpha_2)-\\ &-b^1\gamma_2(\alpha_1,\alpha_2)e_1^{(2)}(\alpha_1,\alpha_2)-\\ &-b^2\gamma_2(\alpha_1,\alpha_2)e_2^{(2)}(\alpha_1,\alpha_2)=0.\end{aligned} \tag{55}$$

Эта система двух матричных уравнений эквивалентна системе четырех скалярных уравнений. Равенство нулю определителя системы уравнений дает дисперсионное уравнение для поверхностных волн в виде $\alpha_1=\alpha_1(\alpha_2)$. Для дальнейших рассуждений преобразуем систему уравнений к виду

$$C^{(1)}(\alpha_1,\alpha_2)c^1(\alpha_1,\alpha_2)-C^{(2)}(\alpha_1,\alpha_2)c^2(\alpha_1,\alpha_2)=0, \tag{56}$$

$$\gamma_1(\alpha_1,\alpha_2)c^1(\alpha_1,\alpha_2)-\gamma_2(\alpha_1,\alpha_2)c^2(\alpha_1,\alpha_2)=0, \tag{57}$$

где вектора $c^1(\alpha_1,\alpha_2)$ и $c^2(\alpha_1,\alpha_2)$ имеют вид

$$c^1(\alpha_1,\alpha_2)=\left(a^1e_1^{(1)}(\alpha_1,\alpha_2)+a^2e_2^{(1)}(\alpha_1,\alpha_2)\right), \tag{58}$$

$$c^2(\alpha_1,\alpha_2)=\left(b^1e_1^{(2)}(\alpha_1,\alpha_2)+b^2e_2^{(2)}(\alpha_1,\alpha_2)\right). \tag{59}$$

Исключаем $c^1(\alpha_1,\alpha_2)$, получаем уравнение для определения для $c^2(\alpha_1,\alpha_2)$

$$\begin{aligned} &\left(\gamma_1(\alpha_1,\alpha_2)C^{(2)}(\alpha_1,\alpha_2)-\gamma_2(\alpha_1,\alpha_2)C^{(1)}(\alpha_1,\alpha_2)\right)\times\\ &\times c^2(\alpha_1,\alpha_2)=0.\end{aligned} \tag{61}$$

Система уравнений для определения функции $c^2(\alpha_1,\alpha_2)$ представляет собой однородную систему уравнений. Для существования ненулевых решений однородной системы уравнений необходимо, чтобы определитель системы был равен нулю. Из этого условия получаем дисперсионное уравнение для функции $\alpha_1=(\alpha_2)$.

После определения $c^2(\alpha_1,\alpha_2)$ и $\alpha_1=(\alpha_2)$ находим функции $b^1(\alpha_1,\alpha_2)$, $b^2(\alpha_1,\alpha_2)$ с помощью уравнения

$$c^2(\alpha_1,\alpha_2)=\left(b^1e_1^{(2)}(\alpha_1,\alpha_2)+b^2e_2^{(2)}(\alpha_1,\alpha_2)\right). \qquad (62)$$

Далее записываем решение во второй среде в виде

$$\begin{gathered}W^{(2)}\left(x^1,x^2,\alpha_2\right)=\\=\left(b^1(\alpha_2)W_1^{(2)}\left(\alpha_1(\alpha_2),\alpha_2\right)+\right.\\\left.+b^2(\alpha_2)W_2^{(2)}\left(\alpha_1(\alpha_2),\alpha_2\right)\right)\times\\\times exp\left(ik\left(\alpha_1(\alpha_2)x^1+\alpha_2x^2\right)\right),\end{gathered} \qquad (63)$$

$$W_1(\alpha_2)=\begin{pmatrix}-C^{(2)}\left(\alpha_1(\alpha_2),\alpha_2\right)e_1^{(2)}\left(\alpha_1(\alpha_2),\alpha_2\right)\\\gamma_1^{(2)}\left(\alpha_1(\alpha_2),\alpha_2\right)e_1\left(\alpha_1(\alpha_2),\alpha_2\right)\end{pmatrix}, \qquad (64)$$

$$W_2(\alpha_2)=\begin{pmatrix}-C^{(2)}\left(\alpha_1(\alpha_2),\alpha_2\right)e_2^{(2)}\left(\alpha_1(\alpha_2),\alpha_2\right)\\\gamma_2^{(2)}\left(\alpha_1(\alpha_2),\alpha_2\right)e_2^{(2)}\left(\alpha_1(\alpha_2),\alpha_2\right)\end{pmatrix}. \qquad (65)$$

2.3. Интегральные представления для решений системы уравнений Максвелла в виде поверхностных волн

Общее решение для поверхностных волн, распространяющихся на границе раздела двух сред, имеет вид

$$\begin{gathered}W\left(x^1,x^2\right)=\\=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\alpha_2)G(\alpha_2)exp\left(ik\left(\alpha_1(\alpha_2)x^1+\alpha_2x^2\right)\right)d\alpha_2,\end{gathered} \qquad (66)$$

где четырехкомпонентный вектор (α_2) имеет вид

$$\begin{gathered}G(\alpha_2)=\\=\left(b^1(\alpha_2)W_1^{(2)}\left(\alpha_1(\alpha_2),\alpha_2\right)+\right.\\\left.+b^2(\alpha_2)W_2^{(2)}\left(\alpha_1(\alpha_2),\alpha_2\right)\right).\end{gathered} \qquad (67)$$

При $x^1=0$

$$W\left(0,x^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\alpha_2)G(\alpha_2)exp\left(ik\alpha_2x^2\right)d\alpha_2. \qquad (68)$$

Обращая выражение, получаем

$$g(\alpha_2)G(\alpha_2)=\frac{k}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}W\left(0,y^2\right)exp\left(-ik\alpha_2y^2\right)dy^2. \qquad (69)$$

Объединяя вышеприведенные выражения, получаем интегральное представление решения системы уравнений Максвелла в виде поверхностных волн в анизотропных и гиротропных средах

$$W\left(x^1,x^2\right)=\frac{k}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma\left(x^2-y^2,x^3\right)W\left(0,y^2\right)dy^2, \qquad (70)$$

где ядро пропагатора для поверхностных волн имеет вид

$$\begin{gathered}\Gamma\left(x^2-y^2,x^3\right)=\\=\frac{k}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}exp\left(ik\left(\alpha_1(\alpha_2)x^1+\alpha_2\left(x^2-y^2\right)\right)\right)d\alpha_2.\end{gathered} \qquad (71)$$

Заключение

В работе получены интегральные представления для поля в анизотропной среде (35), (36), (37) в пространстве. Получены также интегральные представления для поля на границе раздела диэлектриков с различными знаками диэлектрической проницаемости (70), (71).

Интегральные представления могут быть использованы для моделирования распространения света в магнитоактивной плазме, анизотропных диэлектриках и ферромагнитных средах.

Полученные в работе интегральные представления на границе двух сред могут быть использованы для моделирования работы наноустройств интегральной оптики, принцип работы которых основан на использовании поверхностных волн.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке фонда «Фундаментальные исследования и высшее образование» (PG08-014-1), грантов РФФИ № 09-07-12147, 09-07-92421, Фонда содействия отечественной науке и грантов Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-3086.2008.9 и НШ-7414.2010.9).

Литература

1. **Marathey A.S.** On the usual approximation used in the Rayleigh-Sommerfeld diffraction theory / A.S. Marathey, J.F. McCalmont // J. Opt. Soc. Am. -2004. -A21, -P.510–516.
2. **Osterberg. H.** Closed solutions of Rayleigh’s diffraction integral for axial points / H. Osterberg., L. Smith // J. Opt. Soc. Am. -1961. -A51, -P.1050–1054.
3. **Marathay S.** Vector diffraction theory for electromagnetic waves / S.Marathay**,** J.F. McCalmont // J. Opt. Soc. Am. -2001. -A 18, -P.2585–2593.
4. **Romero J. A.** Vectorial approach to Huygens’s principle for plane waves: circular aperture and zone plates / J. A. Romero, L.Hernández, // J. Opt. Soc. Am. -A 23, -P.1141–1145 (2006).
5. **Romero J. A**. Diffraction by circular aperture: an application of the vectorial theory of Huygens’s principle in the near field / J. A. Romero, L. Hernández //J. Opt. Soc. Am. -2008. –A. 25, -P.2040–2043.
6. **Kang X.** Vectorial nonparaxial flattened gaussian beams and their beam quality in terms of the power in the bucket/ X. Kang, B. Lu // Opt.Comm. -2006. -262, -P.1–7.
7. **Barnes W.L.** Surface plasmon subwavelength optics./ W.L. Barnes, F. Dereux., T.W.Ebbesen // Nature. -2003. – P.424-830.
8. **Berini P**. Long range surface plasmons on ultrathin membranes/ P. Berini, R Charbonneau., N. Lohaud //. Nano Lett. -2007. -7 -P.1376-80.

9. **Lee I. M.** Dispersion characterictics of channell plasmon polariton waveguides with block-trench-type groves./ I. M. Lee, J .Jang, J. H .Park,Kim, B.Lee // Opt Express. -2007 -Dec 10;15(25):-P.16596-603.
10. **Hohenau. A.** Dielectric optical element for surface plasmons./ A.Hohenau, J.R. Krenn, A.L. Stepanov, A. Drezet, H. Ditlbacher, B. Steinberger, A.L Leitner, F.R. Authenegg // Opt Lett. -2005 Apr 15;30(8):893-5.
11. **Radko I.P.**. Surface plasmon polariton beam focusing with parabolic nanoparticle chains. / I.P. Radko, S.I. Bozhevalnyi, // Optics express -2007. -15(11):-6576-82.
12. **Fan X..** Nanoscale metal waveguide arrays as plasmon lenses/ X. Fan, G.P. Wang // Opt. Lett. 31, -2006. –P.1332-4.
13. **Steele J.M.** Resonant and non-resonant generation and focusing of surface plasmons with circular gratting ./ J.M. Steele, Z. Liu, Y. Wang, X. Zhang // Opt. Express -2006. -14, -P.5664-70.
14. **Soifer V.A.** Method for computer design of difractive optical elements / V.A. Soifer. - New York Willey, -2002
15. **Besus E.A**. Design of diffractive lenses for focusing surface plasmons / E.A. Besus, L.L. Doskolovich. N.L. Kazansky. V.A. Soifer, S.I. Kharitonov // Jornal of Optics -2010. -01501.

References

1. **Marathey A.S.** On the usual approximation used in the Rayleigh-Sommerfeld diffraction theory / A.S. Marathey, J.F. McCalmont // J. Opt. Soc. Am. -2004. -A21, -P.510–516.
2. **Osterberg. H.** Closed solutions of Rayleigh’s diffraction integral for axial points / H. Osterberg., L. Smith // J. Opt. Soc. Am. -1961. -A51, -P.1050–1054.
3. **Marathay S.** Vector diffraction theory for electromagnetic waves / S.Marathay**,** J.F. McCalmont // J. Opt. Soc. Am. -2001. -A 18, -P.2585–2593.
4. **Romero J. A.** Vectorial approach to Huygens’s principle for plane waves: circular aperture and zone plates / J. A. Romero, L.Hernández, // J. Opt. Soc. Am. -A 23, -P.1141–1145 (2006).
5. **Romero J. A**. Diffraction by circular aperture: an application of the vectorial theory of Huygens’s principle in the near field / J. A. Romero, L. Hernández //J. Opt. Soc. Am. -2008. –A. 25, -P.2040–2043.
6. **Kang X.** Vectorial nonparaxial flattened gaussian beams and their beam quality in terms of the power in the bucket/ X. Kang, B. Lu // Opt.Comm. -2006. -262, -P.1–7.
7. **Barnes W.L.** Surface plasmon subwavelength optics./ W.L. Barnes, F. Dereux., T.W.Ebbesen // Nature. -2003. –P.424-830.
8. **Berini P**. Long range surface plasmons on ultrathin membranes/ P. Berini, R Charbonneau., N. Lohaud //. Nano Lett. -2007. -7 -P.1376-80.
9. **Lee I. M.** Dispersion characterictics of channell plasmon polariton waveguides with block-trench-type groves./ I. M. Lee, J .Jang, J. H .Park,Kim, B.Lee // Opt Express. -2007 -Dec 10;15(25):-P.16596-603.
10. **Hohenau. A.** Dielectric optical element for surface plasmons./ A.Hohenau, J.R. Krenn, A.L. Stepanov, A. Drezet, H. Ditlbacher, B. Steinberger, A.L Leitner, F.R. Authenegg // Opt Lett. -2005 Apr 15;30(8):893-5.
11. **Radko I.P.**. Surface plasmon polariton beam focusing with parabolic nanoparticle chains. / I.P. Radko, S.I. Bozhevalnyi, // Optics express -2007. -15(11):-6576-82.
12. **Fan X..** Nanoscale metal waveguide arrays as plasmon lenses/ X. Fan, G.P. Wang // Opt. Lett. 31, -2006. –P.1332-4.
13. **Steele J.M.** Resonant and non-resonant generation and focusing of surface plasmons with circular gratting ./ J.M. Steele, Z. Liu, Y. Wang, X. Zhang // Opt. Express -2006. -14, -P.5664-70.
14. **Soifer V.A.** Method for computer design of difractive optical elements / V.A. Soifer. - New York Willey, -2002
15. **Besus E.A**. Design of diffractive lenses for focusing surface plasmons / E.A. Besus, L.L. Doskolovich. N.L. Kazansky. V.A. Soifer, S.I. Kharitonov // Jornal of Optics -2010. -01501.

INTEGRAL REPRESENTATIONS FOR SOLUTIONS OF MAXWELL'S EQUATIONS FOR ANISOTROPIC MEDIA

Leonid Leonidovich Doskolovich (Doctor in Physics & Maths, leading researcher, e-mail leonid@smr.ru),
Nikolai Lvovich Kazanskiy (Doctor in Physics & Maths, vice director, e-mail kazansky@smr.ru),
Sergei Ivanovich Kharitonov (Cand. In Physics. & Maths, senior researcher, e-mail: prognoz@smr.ru)
Image Processing Systems Institute of the RAS

Abstract

Solutions of Maxwell’s equations for anisotropic media are deduced in the integral form. Alongside solutions in three-dimensional space, integral relations are derived to represent solutions of Maxwell’s equations in the form of surface plasmons propagating along the interface between a dielectric with negative refraction and an anisotropic material. The integral relationships are derived using the expansion in terms of eigenwaves of the homogeneous anisotropic medium, which travel in the positive direction.

Key words: Rayleigh-Sommerfeld integral, anisotropic medium, gyrotropic medium, diffraction, Maxwell’s equations, surface plasmons, plane waves.

Поступила в редакцию 4.12.2009 г.