

РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИАЛЬНО-ОГРАНИЧЕННЫХ ВИХРЕВЫХ ПУЧКОВ В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ. ЧАСТЬ II. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Хонина С.Н.^{1,2}, Ковалёв А.А.^{1,2}, Устинов А.В.¹, Волотовский С.Г.¹

¹ Учреждение Российской академии наук Институт систем обработки изображений РАН,

² Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва

Аннотация

Проведён детальный анализ дифракции вихревого пучка на круглой микроапертуре в ближней зоне с использованием различных алгоритмов расчёта: векторного интегрального преобразования Релея-Зоммерфельда, разложения по плоским волнам, в том числе с модификацией Мансурипура, а также конечно-разностного временного метода, реализованного в программном продукте фирмы R-Soft.

Результаты непараксиального моделирования дифракции вихревого пучка на круглой микроапертуре показывают осциллирующий характер теневой области вихревого пучка: размер световой воронки то увеличивается, то уменьшается при распространении пучка, и он может оказаться значительно меньше предсказанного параксиальной теорией. Такой характер подтверждён и в векторном случае.

В данной работе алгоритм быстрого расчёта ПВ был модифицирован на основе подхода, предложенного Мансурипуром. При такой модификации матрица поляризации не имеет особенностей, но зато предсказывает появление у-компоненты при распространении, даже если изначально волна была полностью х-поляризованной. Также анализ полученных для вихревых пучков выражений показывает, что осевые значения суммарной интенсивности не будут нулевыми при порядках вихря $|m| \leq 2$.

Ключевые слова: дифракция на круглой апертуре, вихревой пучок, разложение по плоским волнам в модификации Мансурипура.

Введение

В первой части статьи было проведено сравнение алгоритмов расчёта с использованием векторного интегрального преобразования Релея-Зоммерфельда (РЗ) и разложения по плоским волнам (ПВ) по точности и скорости вычислений на примере дифракции плоской волны на круглой апертуре.

Как было показано в предыдущей части, классические методы РЗ и ПВ не подразумевают наличия у-компоненты в дифракционной картине изначально х-поляризованного поля. В работе [1] Мансурипуром было рассмотрено изменение поляризации для линейно-поляризованной волны при прохождении призмы, а затем принцип виртуальных призм был применён к методу разложения по плоским волнам. На основе такого подхода [2] можно получить отличную от классической матрицу поляризации, не имеющую особенностей, но учитывающую наличие всех компонент электрического поля.

В данной работе предложен быстрый алгоритм реализации метода ПВ с модификацией Мансурипура для полей с радиальной симметрией. Результаты применения этого алгоритма в задаче расчёта дифракции вихревых пучков на круглой апертуре минимально отличаются (менее 1%) от результатов метода FDTD, реализованного в программном продукте фирмы R-Soft.

Вихревые пучки (лазерные пучки с винтовыми фазовыми особенностями) [3, 4] привлекают внимание исследователей своими особыми свойствами, в том числе наличием орбитального углового момента, кото-

рый используется в оптическом манипулировании для вращения захваченных пучком микрообъектов [5, 6].

Фазовые дислокации, определяющие нулевую интенсивность, представляют собой перспективное средство в метрологии. Т.к. точность определения положения дислокации не ограничена классическим дифракционным пределом (градиент изменения фазы в этом случае неограниченно возрастает), а лишь отношением сигнал/шум, то геометрия объекта при условии наличия априорной информации об объекте может быть определена с очень высокой точностью [7]. На этом подходе основывается метод оптико-вихревой метрологии [8], успешно применённый в оптико-вихревой интерферометре, позволяющем отслеживать смещение объектов с нанометрической точностью [9].

Чувствительность сингулярных пучков к изменениям волнового фронта и различного рода дефектам может использоваться для высокоточного тестирования оптических систем [10].

Таким образом, исследование вихревых пучков в микромасштабе является актуальной задачей. Однако аналитическое решение хорошо известно только для гауссовых вихревых пучков, а для других типов волн (плоской, конической) рассматривается как правило в рамках скалярной теории, в параксиальной области или дальней зоне дифракции [11-17].

Данная часть статьи посвящена детальному анализу дифракции вихревых пучков на круглой микроапертуре в ближней зоне с использованием непараксиальных векторных алгоритмов.

1. Непараксиальная скалярная модель: сравнение алгоритмов

Рассмотрим дифракцию вихревого пучка на круглой диафрагме радиуса r_0 :

$$E_0(r, \varphi) = E_0(r) \exp(im\varphi) \text{circ}(r/r_0), \quad (\text{II.1})$$

где (r, φ) – полярные координаты во входной плоскости, $\text{circ}(r/r_0) = \begin{cases} 1, & r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0. \end{cases}$

Ранее авторами рассматривалась [11, 12] дифракция конической волны и гауссова пучка на спиральной пластинке в дальней зоне (фокальной плоскости Фурье-линзы), и были получены выражения с модифицированными функциями Бесселя. В [13, 14] получены выражения для скалярной параксиальной дифракции и дифракции Фраунгофера гауссова пучка на спиральной фазовой пластинке через гипергеометрические функции.

В [18] рассматривалась уже дифракция с учётом векторного характера поля, были получены аналитические выражения для оптических вихрей с эллиптической поляризацией в начальной плоскости.

Была также предпринята попытка отойти от параксиального приближения и использовать менее грубую аппроксимацию [15]. В [16, 17] сделано то же самое, но получены аналитические выражения для оптических вихрей с радиальной или азимутальной поляризацией в начальной плоскости.

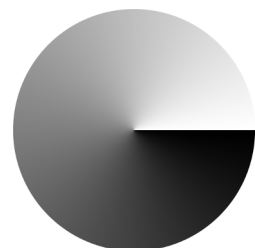
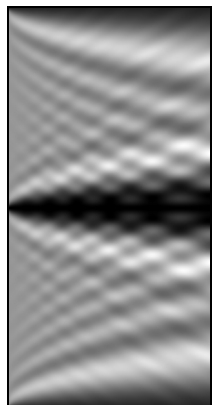
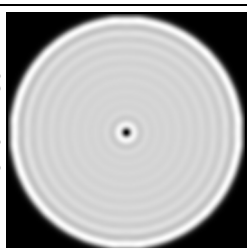
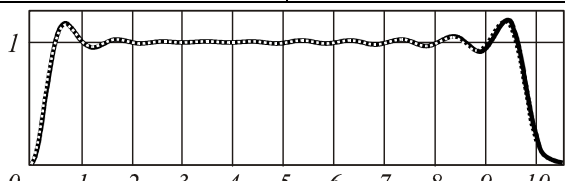
Как правило, дифракция на спиральной фазовой пластинке рассматривается в приближении тонкого оптического элемента, что фактически эквивалентно дифракции пучка с вихревой фазовой составляющей на апертуре того же радиуса соответствующего дифракционного оптического элемента.

При дифракции вихревого пучка с постоянной амплитудой на микроапертуре получить удобные аналитические выражения не удаётся.

В скалярной модели на оптической оси в этом случае будет нулевое значение интенсивности.

В табл. 1 показаны результаты моделирования в рамках скалярной непараксиальной модели дифракции вихревого пучка, имеющего порядок вихря $m = 1$, с постоянной амплитудой на круглой апертуре радиусом 10λ в области $z \in [0, 1\lambda, 10\lambda]$, $x \in [-10\lambda, 10\lambda]$.

Таблица 1. Распределение в ближней зоне дифракции на круглой апертуре вихревого пучка ($m=1$) с постоянной амплитудой

Фаза в области апертуры радиусом 10λ ($z = 0$)	Распределение интенсивности в области $z \in [0, 1\lambda, 10\lambda]$, $x \in [-10\lambda, 10\lambda]$	Распределение в плоскости $z = 0,3\lambda$, $r \in [0, 10\lambda]$
		  

Для моделирования использовался быстрый алгоритм ПВ (I.6), описанный в первой части и позволяющий корректно рассчитывать поперечные компоненты электрического поля на расстоянии вплоть до одной десятой длины волны. На графике в табл.1 приведены сечения интенсивности в плоскости $z = 0,3\lambda$, полученные при использовании формулы (I.1) (сплошная линия) и (I.6) (точечная линия).

В работе [19] было получено аналитическое выражение для радиуса центрального отверстия в вихревом пучке в зависимости от пройденного расстоя-

ния в параксиальном случае. Эта зависимость имела следующий вид: $\rho_m = \sqrt{(m+1)\lambda z / 2}$, где m – порядок вихревой фазовой сингулярности.

Однако при непараксиальном моделировании оказывается, что радиус теневой зоны имеет более сложный характер зависимости из-за явлений дифракции. Более подробно центральная часть вихревого пучка показана на рис. 1а, а на графике рис. 1б приведена зависимость радиуса воронки (до глобального максимума) в длинах волн от расстояния. Как видно из графика, радиус воронки растёт по па-

рабolicеской огибающей, предсказанной в [19], с флуктуациями, вызванными дифракционными эффектами. При этом в плоскости $z = \lambda$ радиус центрального отверстия равен λ , что в точности совпадает с формулой $\rho_1 = \sqrt{\lambda z}$.

На рис. 1в-д приведены радиальные сечения на расстояниях $z = \lambda$, $z = 7\lambda$, $z = 9\lambda$, на которых видно соответствие графика рис. 1б радиусу глобального максимума, хотя имеются также локальные макси-

мумы, которые и формируют цепочкообразную структуру на рис. 1а.

Заметим, что если принимать во внимание локальные максимумы, то размер световой воронки может оказаться значительно меньше ожидаемого. Например, как видно из рис. 1з,д, при $z = 7\lambda$ радиусом воронки можно считать $\rho_1 \approx \lambda$, а при $z = 9\lambda - \rho_1 \approx \lambda/2$.

Однако рассматриваемая зона дифракции (порядка нескольких длин волн) требует учитывать также векторный характер световых полей.

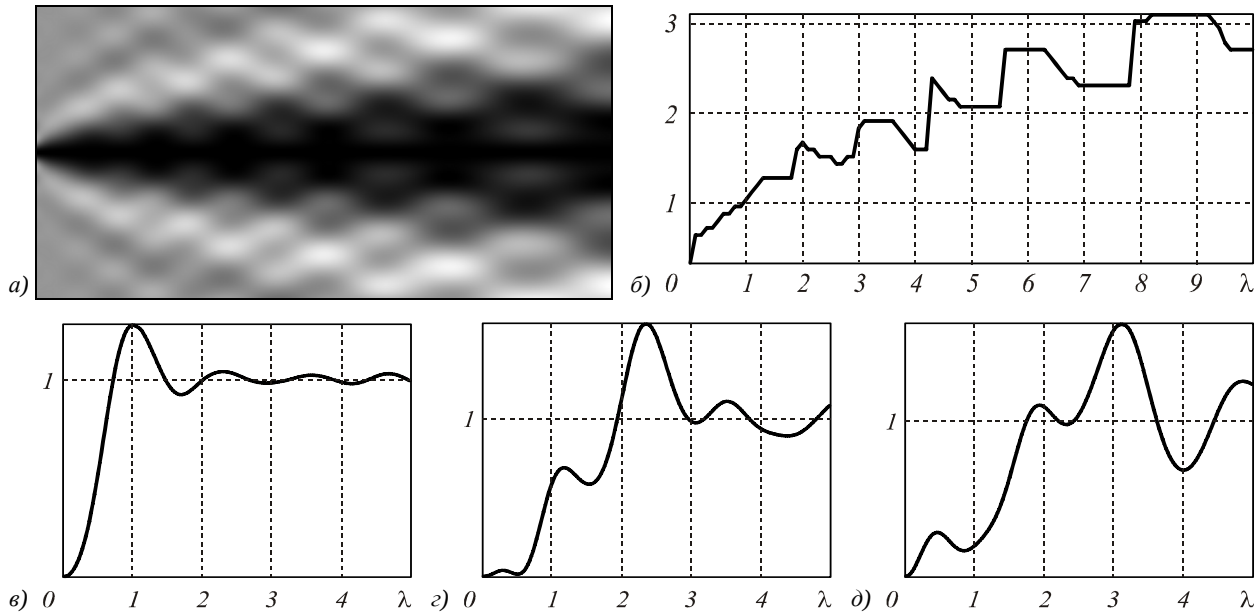


Рис. 1. Изменение размера световой воронки при распространении вихревого пучка: теневая область в плоскости XZ (а), зависимость радиуса воронки (до глобального максимума) от пройденного расстояния (б), радиальные сечения в поперечных плоскостях на расстояниях $z = \lambda$, $z = 7\lambda$, $z = 9\lambda$ (в)-(д)

2. Непараксиальная векторная модель

2.1. Дифракция плоской волны с вихревой фазовой сингулярностью первого порядка: сравнение дифракционных интегралов

При дифракции линейно-поляризованной вдоль оси x плоской волны с вихревой сингулярностью $m = 1$ на круглой апертуре выражения (I.17) из первой части приводят к следующим формулам:

$$E_x(\rho, \theta, z) = -\frac{i^2 z k \exp(ikR)}{R^2} \exp(i\theta) \times \\ \times \int_0^{\rho_0} \exp\left(ik \frac{r^2}{2R}\right) J_1\left(\frac{kr\rho}{R}\right) r dr, \\ E_y(\rho, \theta, z) = 0, \\ E_z(\rho, \theta, z) = -\frac{k \exp(ikR)}{R^2} \exp(i\theta) \left\{ \rho \cos \theta \times \right. \\ \times \int_0^{\rho_0} \exp\left(ik \frac{r^2}{2R}\right) J_1\left(\frac{kr\rho}{R}\right) r dr - i \int_0^{\rho_0} \exp\left(ik \frac{r^2}{2R}\right) \times \\ \times \left\{ e^{i\theta} J_2\left(\frac{kr\rho}{R}\right) - \left\{ -e^{-i\theta} J_0\left(\frac{kr\rho}{R}\right) \right\} r^2 dr \right\}. \quad (II.2)$$

Как было замечено в предыдущей части, при $|m| = 1$ для линейной x -поляризации по выражениям (II.2) легко видеть, что суммарная интенсивность на оптической оси не будет равна нулю, как это предсказывает скалярная теория. Осевые значения поперечной компоненты действительно обнуляются, но продольная компонента остаётся ненулевой:

$$E_z(0, 0, z) = -\frac{ik \exp(ikz)}{2z^2} \int_0^{\rho_0} \exp\left(ik \frac{r^2}{2z}\right) r^2 dr. \quad (II.3)$$

Выражения (I.25)-(I.26) в рассматриваемом случае сводятся к следующему виду [20]:

$$\begin{pmatrix} P_x(\sigma) \\ P_y(\sigma) \end{pmatrix} = \int_0^{\rho_0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} J_1(kr\sigma) r dr = \\ = \begin{pmatrix} \frac{k\sigma(r_0)^3}{6} {}_1F_2\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 2; -\frac{(k\sigma r_0)^2}{4}\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (II.4)$$

где ${}_1F_2(a; b; c; x)$ – гипергеометрическая функция.

Заметим, что часто интеграл (II.4) записывают через функции Струве [20]:

$$\int_0^{r_0} J_1(kr\sigma) r dr = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1,5)r_0}{k\sigma} \times \\ \times [J_1(k\sigma r_0)H_0(k\sigma r_0) - J_0(k\sigma r_0)H_1(k\sigma r_0)], \quad (\text{II.5})$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция, $H_\alpha(x)$ – функции Струве, которые, в свою очередь, также выражаются через гипергеометрические функции. Тогда:

$$E(\rho, \theta, z) = -0,5\pi k r_0 e^{i\sigma_2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \exp[ikz\sqrt{1-\sigma^2}] \times \\ \times \begin{pmatrix} J_1(k\sigma\rho) \\ 0 \\ -\frac{i\sigma}{2\sqrt{1-\sigma^2}} [e^{i\theta} J_2(k\sigma\rho) - e^{-i\theta} J_0(k\sigma\rho)] \end{pmatrix} \times \quad (\text{II.6}) \\ \times [J_1(k\sigma r_0)H_0(k\sigma r_0) - J_0(k\sigma r_0)H_1(k\sigma r_0)] d\sigma.$$

Вклад в осевую интенсивность определяется только z -компонентой:

$$E_z(0, 0, z) = -\frac{i\pi k r_0}{4} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}} \exp[ikz\sqrt{1-\sigma^2}] \times \quad (\text{II.7}) \\ \times [J_1(k\sigma r_0)H_0(k\sigma r_0) - J_0(k\sigma r_0)H_1(k\sigma r_0)] d\sigma.$$

Как следует из сравнения выражений (II.3) и (II.7), два рассмотренных метода приводят к различным аналитическим результатам. Возникает вопрос, насколько этот результат различен и в какой области.

На рис. 2 показано осевое распределение суммарной интенсивности, рассчитанной по (II.3) (сплошная линия) и по (I.25)–(I.26) (точечная линия) на отрезке оптической оси $z \in [0, 0,1\lambda, 10\lambda]$ при дифракции

линейно-поляризованной плоской волны с вихревой сингулярностью $m = 1$ на круглой апертуре радиусом 10λ . Как видно из рис. 2, два метода демонстрируют существенное отличие в области $z < 5\lambda$.

Причём основное отличие касается z -компоненты, что подтверждается сравнительными результатами в табл. 2, из которой также видно, что при расстояниях от апертуры более пяти длин волн оба метода полностью совпадают, в том числе по внеосевым распределениям. В таблице 2 сплошной линией показаны графики для алгоритма РЗ (I.17), а точечной – для алгоритма ПВ (I.25)–(I.26).

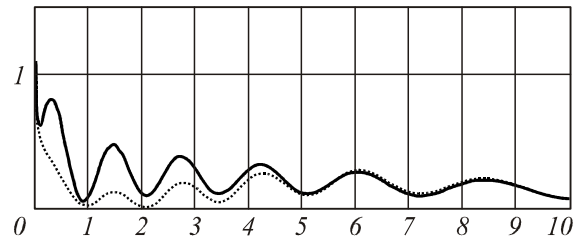


Рис. 2. Осевое распределение суммарной интенсивности, рассчитанной по (II.3) (РЗ, сплошная линия) и по (I.25)–(I.26) (ПВ, точечная линия) на отрезке оптической оси $z \in [0, 0,1\lambda, 10\lambda]$ при дифракции x -поляризованной плоской волны с вихревой фазовой сингулярностью $m=1$ на круглой апертуре радиусом 10λ

Также различие двух рассмотренных методов может усугубляться наличием в (I.25)–(I.26) особенности при вычислении z -компоненты, возникающей при $\sigma \rightarrow 1$, т.е. очень близко к плоскости апертуры. Это также легко видеть в формуле (II.7).

Таким образом, проблемы с расчётом продольной компоненты, обнаруженные в первой части статьи, также проявляются в случае вихревых пучков.

Таблица 2. Сравнительные результаты вычислений дифракционных интегралов РЗ (I.17) и разложения ПВ (I.25)–(I.26) для дифракции плоской волны с вихревой фазовой сингулярностью $m = 1$ при линейной x -поляризации

Плос- кость	Сечение амплитуды x -компоненты, $ E_x $	Сечение амплитуды z -компоненты, $ E_z $	Сечение суммарной интенсивности, $ E ^2$
$z = 0,3\lambda$			
$z = 6\lambda$			

2.2. Быстрый алгоритм ПВ с модификацией Мансурипура

В [1] Мансурипуром было рассмотрено спектральное разложение падающей линейно-поляризованной волны как прохождение через виртуальные призмы, которые меняют направление вектора распространения волны. На основе такого подхода получается иная, чем в (I.20), матрица преобразования спектральных координат:

$$\mathbf{M}_E(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\xi^2}{1 + \sqrt{1 - (\xi^2 + \eta^2)}} & -\frac{\xi\eta}{1 + \sqrt{1 - (\xi^2 + \eta^2)}} \\ -\frac{\xi\eta}{1 + \sqrt{1 - (\xi^2 + \eta^2)}} & 1 - \frac{\eta^2}{1 + \sqrt{1 - (\xi^2 + \eta^2)}} \\ -\xi & -\eta \end{bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

Интересно, что матрица Мансурипура предсказывает появление у-компоненты при распространении, даже если изначально волна была полностью х-поляризованной. Достоинство матрицы (II.8) также в отсутствии каких-либо особенностей.

В полярных координатах матрица (II.8) принимает следующий вид:

$$\mathbf{P}(\sigma, \phi) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\sigma^2 \cos^2 \phi}{1 + \sqrt{1 - \sigma^2}} & -\frac{\sigma^2 \cos \phi \sin \phi}{1 + \sqrt{1 - \sigma^2}} \\ -\frac{\sigma^2 \cos \phi \sin \phi}{1 + \sqrt{1 - \sigma^2}} & 1 - \frac{\sigma^2 \sin^2 \phi}{1 + \sqrt{1 - \sigma^2}} \\ -\sigma \cos \phi & -\sigma \sin \phi \end{bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

и может быть использована вместо (I.22).

При наличии радиально-вихревой симметрии входного поля в предложенном в первой части быстром алгоритме (I.25)-(I.26) модификация Мансурипура приводит к изменению матрицы (I.26), которая примет следующий вид:

$$\mathbf{Q}_m(t, \theta) = \begin{bmatrix} J_m(t) - \frac{\sigma^2 C_{2m}(t)}{1 + \sqrt{1 - \sigma^2}} & -\frac{\sigma^2 S C_m(t)}{1 + \sqrt{1 - \sigma^2}} \\ -\frac{\sigma^2 S C_m(t)}{1 + \sqrt{1 - \sigma^2}} & J_m(t) - \frac{\sigma^2 S_{2m}(t)}{1 + \sqrt{1 - \sigma^2}} \\ -\sigma C_m(t) & -\sigma S_m(t) \end{bmatrix} \times (\text{II.10})$$

$$\times \begin{pmatrix} P_x(\sigma) \\ P_y(\sigma) \end{pmatrix}, \quad t = k\sigma\rho,$$

где $C_m(t)$ и $S_m(t)$, как в (I.26), и

$$S C_m(t) = \frac{i}{4} [e^{i2\phi} J_{m+2}(t) - e^{-i2\phi} J_{m-2}(t)],$$

$$C_{2m}(t) = \frac{1}{4} [2J_m(t) - e^{i2\phi} J_{m+2}(t) - e^{-i2\phi} J_{m-2}(t)],$$

$$S_{2m}(t) = \frac{1}{4} [2J_m(t) + e^{i2\phi} J_{m+2}(t) + e^{-i2\phi} J_{m-2}(t)].$$

Из выражений (II.10) легко видеть ещё один интересный факт: осевые значения суммарной интенсивности не будут нулевыми при $|m| \leq 2$. В классических вариантах это возможно только при $|m| \leq 1$.

Чтобы оценить корректность всех рассмотренных выше алгоритмов в ближней зоне дифракции, в следующем разделе было проведено сравнение с результатами алгоритма FDTD.

2.3. Дифракция плоской волны с вихревой фазовой сингулярностью первого порядка: сравнение с FDTD

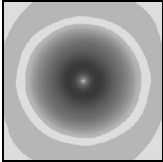
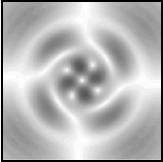
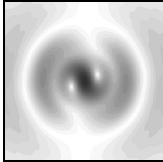
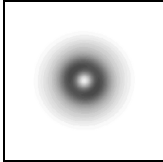
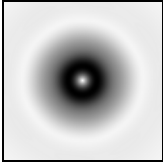
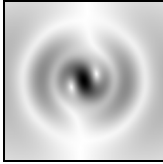
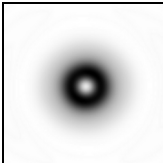
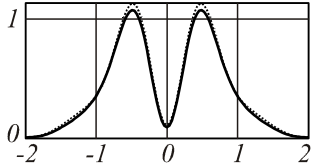
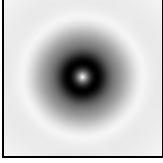
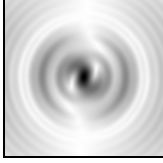
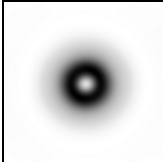
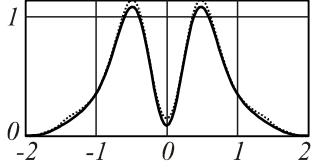
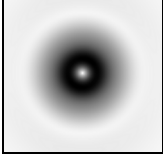
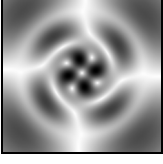
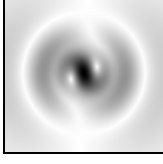
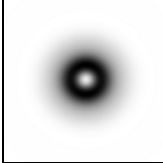
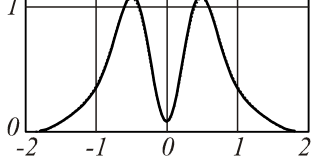
Параметры расчёта при использовании алгоритма FDTD, реализованного в программном продукте R-Soft: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус круглой апертуры $r_0 = 2\lambda$, порядок вихря $m = 1$, размер расчётной области $x \in [-5\lambda, 5\lambda]$, $y \in [-5\lambda, 5\lambda]$, $z \in [0, 5\lambda]$. Толщина PML – λ , шаг дискретизации по пространству: $\lambda/15$, шаг дискретизации по времени: $\lambda/(30c)$, c – скорость света, положение плоскости экрана для измерений: $z = 0,3\lambda$ (≈ 160 нм) и $z = 4\lambda$ (≈ 2 мкм). Время моделирования на компьютере Intel(R) Celeron(R) CPU 3,06 ГГц, ОЗУ 512 Мб примерно 30 минут.

В табл. 3 приведены сравнительные результаты расчёта дифракции плоской волны с вихревой фазовой сингулярностью $m = 1$ при линейной х-поляризации на расстоянии $z = 4\lambda$ от апертуры с помощью метода FDTD (первая строка), дифракционных интегралов Релея-Зоммерфельда (I.17) (вторая строка), разложения по плоским волнам (I.25)-(I.26) (третья строка) и в модификации Мансурипура (II.10) (третья строка). В двух последних случаях диапазон спектра рассматривался в радиусе $\sigma_0 = 1,1$ в соответствии с формулой (I.12). В таблице также приведены сравнительные графики и относительные погрешности сечений полученной интенсивности для каждого метода: точечной линией показан график, полученный с помощью дифракционных интегралов, а сплошной – полученный с помощью метода FDTD.

Как видно из табл. 3, наименьшее отличие от результатов, предсказываемых FDTD, демонстрирует алгоритм ПВ с модификацией Мансурипура. В этом случае наблюдается не только наименьшее среднеквадратичное отклонение (менее 1%), но и полное качественное согласование – присутствует у-компонента.

На рис. 3 показаны графики осевых распределений интенсивности, рассчитанных всеми рассмотренными в этом разделе методами.

Таблица 3. Сравнительные результаты расчёта дифракции плоской волны с вихревой фазовой сингулярностью $m = 1$ при линейной x -поляризации с помощью метода FDTD и дифракционных интегралов на расстоянии $z = 4\lambda$

Метод, время расчёта	$ E_x $	$ E_y $	$ E_z $	$ E ^2$
FDTD 30 мин.*				
РЗ (I.17), 4 мин.**				  $\delta=1,6\%$
ПВ (I.25)-(I.26), 1 мин.**				  $\delta=2,6\%$
Мансурипур (I.25), (II.10) 2 мин.**				  $\delta=0,8\%$

* расчёт на компьютере Intel® Celeron® CPU 3,06GHz, ОЗУ 512 Мб

** расчёт на компьютере Intel® Pentium®4 CPU 2,40GHz, ОЗУ 512 Мб

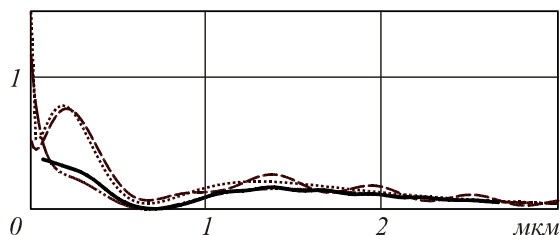


Рис. 3. Распределение интенсивности на оптической оси при дифракции вихревого ($m=1$) линейно-поляризованного плоского пучка, рассчитанное с использованием выражений (I.17) (РЗ, точечная линия), (I.25)-(I.26) (ПВ, пунктирная линия), (I.25), (II.10) (ПВ-Мансурипур, штрихпунктирная линия), FDTD (сплошная линия)

Т.к. при наличии вихревой фазовой сингулярности первого порядка у линейно-поляризованного пучка интенсивность на оптической оси связана только с продольной компонентой электрического поля, то особенности каждого из методов хорошо видны на этом графике. На рис. 3 видно, что методы РЗ (I.17) и ПВ (I.25)-(I.26) аналогичны, но в последнем случае требуется для каждой зоны дифракции

выбирать свой диапазон учитываемых спектральных частот, а также решать проблему с наличием особенности в поляризационной матрице. Метод Мансурипура (I.25), (II.10), являясь очень удобным для алгоритмизации, позволяет получать результаты, практически совпадающие с расчётами FDTD, кроме области очень близкой к апертуре. В этой области, как видно из табл. 4, имеется определённое отличие во внеосевом распределении, хотя погрешность остаётся минимальной из всех исследуемых интегральных методов.

В табл. 4 показаны результаты работы рассматриваемых алгоритмов для области, очень близкой к апертуре, а именно: на расстоянии $z = 0,3\lambda$ от неё. В соответствии с формулой (I.12) было выбрано $\sigma_0 = 3$. Несмотря на рост погрешности (до десятка процентов), имеется хорошее качественное согласование результатов, особенно для метода ПВ. На графиках также точечной линией показаны результаты, полученные с помощью дифракционных интегралов, а сплошной – полученные с помощью метода FDTD.

Таблица 4. Сравнительные результаты расчёта дифракции плоской волны с вихревой фазовой сингулярностью $m = 1$ при линейной x -поляризации с помощью метода FDTD и дифракционных интегралов на расстоянии $Z = 0,3\lambda$ (160 нм)

Метод, время расчёта	$ E_x $	$ E_y $	$ E_z $	$ E ^2$
FDTD 29 мин.*				
РЗ (1.17), 4 мин.**				 $\delta=16,5\%, \delta_0=12,2\%$
ПВ (1.25)-(1.26), 2,5 мин.**				 $\delta=11,3\%, \delta_0=6,9\%$
Мансурипур (1.25), (П.10) 3,5 мин.**				 $\delta=6,9\%, \delta_0=6,5\%$

* расчёт на компьютере Intel® Celeron® CPU 3,06GHz, O3V 512 Mб

** расчёт на компьютере Intel® Pentium®4 CPU 2,40GHz, O3V 512 Mб

На рис. 4 показано распределение интенсивности вихревого пучка в плоскости XZ при $y = 0$ в области $x \in [-5\lambda, 5\lambda]$, $z \in [0, 5\lambda]$, рассчитанное методом FDTD и ПВ с матрицей Мансурипура. Как видно, полученные картины вполне согласованы друг с другом. При этом хорошо видна структура теневой области вихревого пучка: размер световой воронки то увеличивается, то уменьшается при распространении пучка, и он может быть достаточно мал (диаметр между максимумами $1,7\lambda$ на расстоянии $z = 3\lambda$).

Таким образом, в данном разделе показано, что интегральные методы позволяют получить структурно верную картину дифракции за существенно меньшее время, чем метод FDTD.

Причём метод ПВ в модификации Мансурипура обеспечивает при этом погрешность менее 1% в ближней зоне вплоть до одной длины волны. В очень близкой к апертуре области (менее длины волны) структурная адекватность сохраняется, но погрешность увеличивается до нескольких процентов.

В табл. 5 показаны результаты расчёта дифракции плоской волны с вихревой фазовой сингулярностью $m = 2$ при линейной x -поляризации с помощью

метода ПВ Мансурипура на расстоянии $z = 0,3\lambda$ (160 нм). Как видно из таблицы, в этом случае на оптической оси поперечные компоненты имеют ненулевое значение. Подробнее это видно на графике: точечная линия соответствует интенсивности x -компоненты, штрихпунктирная – y -компоненты, пунктирная – z -компоненты, сплошная – суммарная интенсивность.

Заключение

В скалярной модели вихревой пучок на оптической оси имеет нулевое значение интенсивности. При этом непараксиальное моделирование дифракции плоской вихревой волны на круглой диафрагме позволяет увидеть достаточно сложную из-за явления дифракции конфигурацию теневой области вихревого пучка. Радиус световой воронки растёт по параболической огибающей, предсказанной в [19], но с флуктуациями, вызванными локальными максимумами. Если учитывать эти локальные максимумы, то размер световой воронки может оказаться значительно меньше ожидаемого, в частности при $z = 9\lambda$ $\rho_1 \approx \lambda/2$.

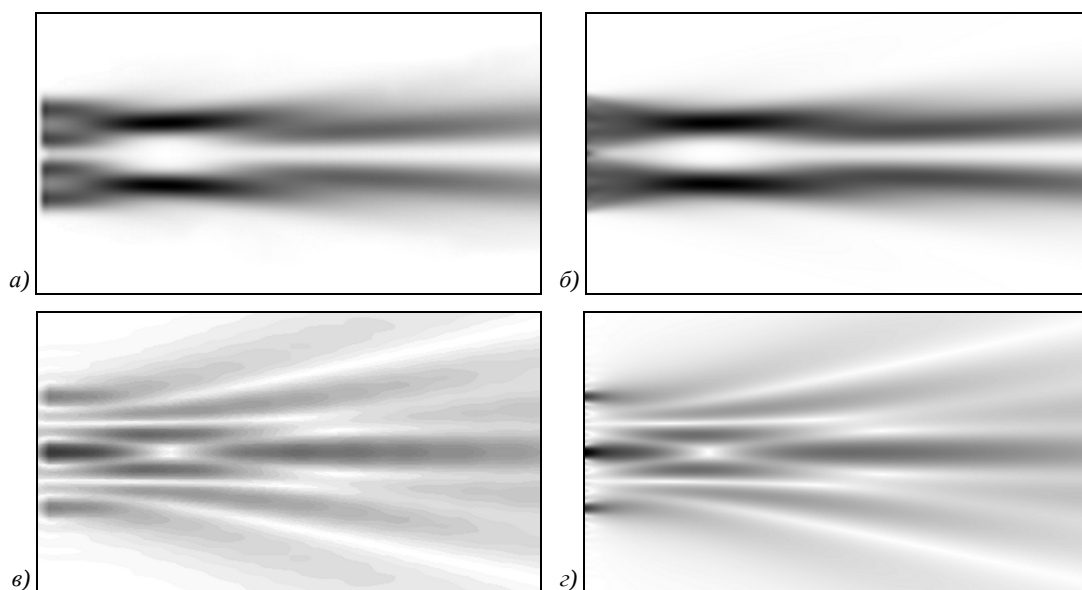


Рис.4. Распределение общей интенсивности (а), (б) и амплитуды продольной компоненты (в), (г) вихревого пучка в плоскости yz при $y=0$ в области $x \in [-5\lambda, 5\lambda]$, $z \in [0, 5\lambda]$, рассчитанное методом FDTD (а), (в) и ПВ с матрицей Мансурипура (I.25), (II.10) (б), (г)

Таблица 5. Результаты расчёта дифракции плоской волны с вихревой фазовой сингулярностью $m = 2$ при линейной x -поляризации с помощью метода ПВ Мансурипура на расстоянии $z = 0,3\lambda$ (160 нм)

$ E_x , \arg E_x$	$ E_y , \arg E_y$	$ E_z , \arg E_z$	$ E ^2$, сечение

Однако рассматриваемая зона дифракции (порядка нескольких длин волн) требует учитывать также векторный характер световых полей. В этом случае наличие вихревой фазовой сингулярности первого порядка не гарантирует нулевое значение осевой интенсивности из-за существенного вклада в ближней зоне дифракции продольной компоненты. Именно в вычислении этой компоненты электрического поля в результатах двух классических методов – дифракционные интегралы Релея-Зоммерфельда и разложение по плоским волнам – имеются существенные отличия как между собой, так и от результатов алгоритма FDTD, который в данной работе принимается за наиболее точный.

Для решения этой проблемы в данной работе алгоритм быстрого расчёта ПВ был модифицирован на осно-

ве подхода, предложенного Мансурипуrom [1]. При такой модификации матрица поляризации не имеет особенностей, но зато предсказывает появление y -компоненты при распространении, даже если изначально волна была полностью x -поляризованной. Это можно объяснить тем, что при дифракции плоской волны на апертуре появляются волны, направление распространения которых имеет наклон к оптической оси.

Кроме того, анализ полученных для вихревых пучков выражений (II.10) показывает, что осевые значения суммарной интенсивности не будут нулевыми не при $|m| \leq 1$, как следует из классических выражений, а при $|m| \leq 2$.

Сравнение результатов применения интегральных методов с результатами работы алгоритма

FDTD, реализованного в программном продукте фирмы R-Soft, позволяет сделать вывод о возможности применения дифракционных интегралов в ближней зоне дифракции. Все рассмотренные алгоритмы позволяют получить структурно верную картину дифракции в ближней зоне вплоть до одной длины волны за существенно меньшее время, чем метод FDTD. Причём метод разложения по плоским волнам в модификации Мансурипура обеспечивает погрешность менее 1%. В очень близкой к апертуре области (менее длины волны) структурная адекватность сохраняется, но погрешность увеличивается до нескольких процентов даже в методе Мансурипура.

Заметим, что в более строгой векторной модели подтверждается осциллирующий характер теневой области вихревого пучка: размер световой воронки то увеличивается, то уменьшается при распространении пучка, и он может оказаться достаточно мал (диаметр между максимумами $1,7\lambda$ на расстоянии $z = 3\lambda$).

Благодарности

Работа выполнена при поддержке российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (грант CRDF PG08-014-1), грантов РФФИ 10-07-00109-а, 10-07-00438-а, гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-7414.2010.9 и молодого кандидата наук (МК-64571.2010.2).

Литература

1. **Mansuripur, M.** Certain computational aspects of vector diffraction problems // J. Opt. Soc. Am. A. – 1989. – Vol. 6, No. 5. – P. 786-805.
2. **Lin, Y.** Vector fuzzy control iterative algorithm for the design of sub-wavelength diffractive optical elements for beam shaping, / Yong Lin, Jiasheng Hu, Kenan Wu // Optics Communications. – 2009. – Vol. 282. – P. 3210-3215.
3. **Soskin, M.S., Vasnetsov, M.V.** Singular optics // Prog. Opt. – 2001. – Vol. 42. – P. 219-276.
4. **Desyatnikov, A.S.** Optical Vortices and Vortex Solitons / Anton S. Desyatnikov, Lluís Torner, and Yuri S. Kivshar // E. Wolf, Progress in Optics. – 2005. – Vol. X. – P. 47.
5. **Сойфер, В.А.** Оптическое манипулирование микро-объектами: достижения и новые возможности, порождённые дифракционной оптикой / В.А. Сойфер, В.В. Котляр, С.Н. Хонина // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 2004. – № 35(6). – С. 1368-1432.
6. **Dienerowitz, M.** Optical vortex trap for resonant confinement of metal nanoparticles / Maria Dienerowitz, Michael Mazilu, Peter J. Reece, Thomas F. Krauss and Kishan Dholakia // Opt. Express. – 2008. – Vol. 16(7). – P. 4991-4999.
7. **Тычинский, В.П.** Сверхразрешение и сингулярности в фазовых изображениях // Успехи физических наук. – 2008. – № 178(11). – С. 1205-1214.
8. **Wang, W.** Phase singularities in analytic signal of white-light speckle pattern with application to micro-displacement measurement / W. Wang, N. Ishii, S.G. Hanson, Y. Miyamoto and M. Takeda // Opt. Commun. – 2005. – Vol. 248. – P. 59-68.
9. **Wang, W.** Optical vortex metrology for nanometric speckle displacement measurement / Wei Wang, Tomoaki Yokozeki, Reika Ishijima, Atsushi Wada, Yoko Miyamoto and Mitsuo Takeda // Opt. Express. – 2006. – Vol. 14(1). – P. 120-127.
10. **Singh, R.K.** Structure of a tightly focused vortex beam in the presence of primary coma / Rakesh Kumar Singh, P.

Senthilkumaran, Kehar Singh // Optics Communications. – 2009. – Vol. 282. – P. 1501-1510.

11. **Котляр, В.В.** Дифракция конической волны и гауссового пучка на спиральной фазовой пластинке / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, С.Н. Хонина, Р.В. Скиданов, В.А. Сойфер, Я. Турунен // Компьютерная оптика. – 2005. – № 28. – С. 29-36.
12. **Kotlyar, V.V.** Turunen Diffraction of conic and Gaussian beams by a spiral phase plate / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, S.N. Khonina, R.V. Skidanov, V.A. Soifer, H. Elfstrom, N. Tossavainen, J. Turunen // Appl. Opt. – 2006. – V.45, No.12. – P. 2656-2665.
13. **Котляр, В.В.** Дифракция Гауссова пучка на спиральном аксиконе / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, Д. Коджек, В. Гарбини, Е. Феррари // Компьютерная оптика. – 2006. – №30. – С. 30-35.
14. **Kotlyar, V.V.** Diffraction of a finite-radius plane wave and a Gaussian beam by a helical axicon and a spiral phase plate / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, R.V. Skidanov, O.Yu. Moiseev, V.A. Soifer // J. Opt. Soc. Am. A. – 2007. – Vol. 24, No. 7. – P. 1955-1964.
15. **Mei, Z.** Nonparaxial analysis of vectorial Laguerre-Bessel-Gaussian beams / Z. Mei and D. Zhao // Opt. Express. – 2007. – Vol. 15. – P. 11942-11951.
16. **Ковалёв, А.А.** Непараксиальное распространение векторного гауссова оптического вихря с начальной радиальной поляризацией // А.А. Ковалёв, В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2009. – Т. 33, № 3. – С. 226-232.
17. **Kotlyar, V.** Nonparaxial propagation of a Gaussian optical vortex with initial radial polarization / V. Kotlyar and A. Kovalev // J. Opt. Soc. Am. A. – 2010. – Vol. 27(3). – P. 372-380.
18. **Ковалёв, А.А.** Непараксиальная векторная дифракция гауссова пучка на спиральной фазовой пластинке / А.А. Ковалёв, В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2007. – Т. 31, № 4. – С. 19-22.
19. **Kotlyar, V.V.** Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate / Victor V. Kotlyar, Anton A. Almazov, Svetlana N. Khonina, and Victor A. Soifer, Henna Elfstrom and Jari Turunen // J. Opt. Soc. Am. A. – 2005. – Vol. 22, No. 5. – P. 849-861.
20. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 752 с.

References

1. **Mansuripur, M.** Certain computational aspects of vector diffraction problems // J. Opt. Soc. Am. A. – 1989. – Vol. 6, No. 5. – P. 786-805.
2. **Lin, Y.** Vector fuzzy control iterative algorithm for the design of sub-wavelength diffractive optical elements for beam shaping, / Yong Lin, Jiasheng Hu, Kenan Wu // Optics Communications. – 2009. – Vol. 282. – P. 3210-3215.
3. **Soskin, M.S., Vasnetsov, M.V.** Singular optics // Prog. Opt. – 2001. – Vol. 42. – P. 219-276.
4. **Desyatnikov, A.S.** Optical Vortices and Vortex Solitons / Anton S. Desyatnikov, Lluís Torner, and Yuri S. Kivshar // E. WOLF, PROGRESS IN OPTICS. – 2005. – Vol. X, – P. 47.
5. **Soifer, V.A.** Optical Microparticle Manipulation: Advances and New Possibilities / V.A. Soifer, V.V. Kotlyar, S.N. Khonina // Created by Diffractive Optics, Physics of Particles and Nuclei. – 2004. – Vol. 35, No. 6. – P. 733-766. – (in Russian).
6. **Dienerowitz, M.** Optical vortex trap for resonant confinement of metal nanoparticles / Maria Dienerowitz, Michael Mazilu, Peter J. Reece, Thomas F. Krauss and Kishan Dholakia // Opt. Express. – 2008. – Vol. 16(7). – P. 4991-4999.

7. **Tychinskii, V.P.** Super-resolution and singularities in phase images // *Uspekhi Fizicheskikh Nauk.* – 2008. – V. 178(11). – P. 1205-1214. – (in Russian).
8. **Wang, W.** Phase singularities in analytic signal of white-light speckle pattern with application to micro-displacement measurement / W. Wang, N. Ishii, S.G. Hanson, Y. Miyamoto and M. Takeda // *Opt. Commun.* – 2005. – Vol. 248. – P. 59-68.
9. **Wang, W.** Optical vortex metrology for nanometric speckle displacement measurement, / Wei Wang, Tomoaki Yokozeki, Reika Ishijima, Atsushi Wada, Yoko Miyamoto and Mitsuo Takeda // *Opt. Express.* – 2006. – Vol. 14(1). – P. 120-127.
10. **Singh, R.K.** Structure of a tightly focused vortex beam in the presence of primary coma / Rakesh Kumar Singh, P. Senthilkumaran, Kehar Singh // *Optics Communications.* – 2009. – Vol. 282. – P. 1501-1510.
11. **Kotlyar, V.V.** Diffraction of conic and Gaussian beams by a spiral phase plate / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, S.N. Khonina, R.V. Skidanov, V.A. Soifer, H. Elfstrom, N. Tossavainen, and J. Turunen // *Computer Optics.* – 2005. – Vol. 28. – P. 29-36. – (in Russian).
12. **Kotlyar, V.V.** Diffraction of conic and Gaussian beams by a spiral phase plate / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, S.N. Khonina, R.V. Skidanov, V.A. Soifer, H. Elfstrom, N. Tossavainen, J. Turunen // *Appl. Opt.* – 2006. – V. 45, No. 12. – P. 2656-2665.
13. **Kotlyar, V.V.** Diffraction of the Gaussian beam by a spiral axicon / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, D. Cojoc, V. Garbini, E. Ferrari // *Computer Optics.* – 2006. – Vol. 30. – P. 30-35. – (in Russian).
14. **Kotlyar, V.V.** Diffraction of a finite-radius plane wave and a Gaussian beam by a helical axicon and a spiral phase plate / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, R.V. Skidanov, O.Yu. Moiseev, V.A. Soifer // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2007. – Vol. 24, No. 7. – P. 1955-1964.
15. **Mei, Z.** Nonparaxial analysis of vectorial Laguerre-Bessel-Gaussian beams / Z. Mei and D. Zhao // *Opt. Express.* – 2007. – Vol. 15. – P. 11942-11951.
16. **Kovalev, A.A.** Nonparaxial propagation of vectorial Gaussian optical vortex with initial radial polarization / A.A. Kovalev and V.V. Kotlyar // *Computer Optics.* – 2009. – Vol. 33, N 3. – P. 226-232. – (in Russian).
17. **Kotlyar, V.** Nonparaxial propagation of a Gaussian optical vortex with initial radial polarization / V. Kotlyar and A. Kovalev // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2010. – Vol. 27(3). – P. 372-380.
18. **Kovalev, A.A.** Nonparaxial vectorial diffraction of the Gaussian beam by a spiral phase plate / A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar // *Computer Optics.* – 2007. – Vol. 31, N 4. – P. 19-22. – (in Russian).
19. **Kotlyar, V.V.** Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate / Victor V. Kotlyar, Anton A. Almazov, Svetlana N. Khonina, and Victor A. Soifer, Henna Elfstrom and Jari Turunen // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2005. – Vol. 22, No. 5. – P. 849-861.
20. **Prudnikov, A.P.** Integrals and series. Special functions, A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov, O.I. Marychev – Moscow, "Nauka" Publishers, 1983. – (in Russian).

PROPAGATION OF THE RADIALLY-LIMITED VORTICAL BEAM IN A NEAR ZONE.

PART II. RESULTS OF SIMULATION

S.N. Khonina^{1,2}, A.A. Kovalev^{1,2}, A.V. Ustinov¹, S.G. Volotovskiy¹

¹ *Institution of Russian Academy of Sciences, Image Processing Systems Institute RAS,*

² *S.P. Korolyov Samara State Aerospace University*

Abstract

Detailed analysis of diffraction of a vortical beam by a circular microaperture in a near zone with use of various algorithms of calculation is carried out: vectorial Rayleigh–Sommerfeld diffraction integral (RS), plane wave expansion (PWE), including Mansuripur's modification, and finite-difference time domain (FDTD) method realised in the R-Soft software product.

Results of nonparaxial modelling for diffraction of a vortical beam by a circular microaperture show oscillating character of shadow area of a vortical beam: the size of a light vortex increases and decreases as the beam propagates, and it can be much less by size in comparison with predicted by paraxial theory. Such character is confirmed in a vector case also.

In the work the algorithm of fast calculation of PWE has been modified on the basis of the approach offered by Mansuripur. At such modification the polarisation matrix has no singularity, but predicts appearance y -components at propagation even if initially the wave was completely x -polarised. The analysis of the expressions received for vortical beams shows, that axial values of total intensity will not be zero for vortical order $|m| \leq 2$.

Key words: diffraction by a circular aperture, vortical beam, plane wave expansion with Mansuripur's modification.

Сведения об авторах

На стр. 329.

Поступила в редакцию 18 июля 2010 г.