

АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СТРУКТУР В СИСТЕМАХ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ В ПОЛЕ ВНЕШНИХ ФЛУКТУАЦИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ БИФУРКАЦИИ

Курушина С.Е.

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва

Аннотация

Рассматривается обобщённая модель двухкомпонентной системы реакция-диффузия, учитывающая влияние реальной внешней флуктуирующей среды. Для этой модели предложены методы получения обобщённых уравнений Гинзбурга-Ландау при возникновении неустойчивостей типа мягкой моды и дисперсионного уравнения для усреднённых по ансамблю реализаций амплитуд незатухающих мод. Описана эволюция этой модели в окрестности точки бифуркации Тьюринга. Проведено численное моделирование конкретных систем реакция-диффузия, подтверждающих полученные теоретические выводы.

Ключевые слова: система реакция-диффузия, мультипликативные флуктуации параметров, пространственные диссипативные структуры, неустойчивые моды, уравнения Гинзбурга-Ландау, шумоиндуцированное параметрическое возбуждение, численное моделирование.

1. Стохастическая двухкомпонентная система реакция-диффузия

Многие макроскопические системы могут быть описаны с помощью набора параметров состояния (динамических переменных) $\{x_k\}$, удовлетворяющих эволюционным уравнениям вида

$$\frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{f}_\eta(\mathbf{x}(\mathbf{r}, t)), \quad (1)$$

где $\mathbf{x}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{f}_\eta(\mathbf{x}(\mathbf{r}, t))$ – векторы, компонентами которых являются, соответственно, параметры состояния x_k и функциональные зависимости, определяющие эволюцию компонент x_k во времени и в пространстве. Эти зависимости, как правило, нелинейны, содержат дифференциальные операторы по пространственным переменным и сами определяются набором управляющих параметров η , описывающих вместе с граничными условиями воздействие на систему окружающей среды.

Здесь исследуется важный частный случай систем типа (1) – распределённые двухкомпонентные системы типа «реакция-диффузия»

$$\frac{\partial x_k}{\partial t} = f_k(x_1, x_2, \eta, \mathbf{r}, t) + D_{x_k} \Delta x_k, k = 1, 2, \quad (2)$$

имеющие широчайшую область приложений [1-16 и др.].

Исследование систем типа (2) проводится при следующих условиях.

Полагается, что модель (2) описывает макросистемы. Для таких систем внутренние флуктуации допустимо считать пренебрежимо малыми. Это позволяет исключить влияние внутренних флуктуаций на особенности исследуемых явлений.

Изучаются системы, для которых отсутствует обратная связь с окружающей средой. Это означает, что характерные размеры среды существенно превышают характерные размеры системы.

Среда считается однородной и изотропной, не претерпевающей систематических изменений. Это допущение необходимо для исключения эффектов, обусловленных систематической эволюцией окружающей среды, и означает, что характерное время

изменения состояния среды значительно больше времени наблюдения за системой.

Внешний шум присутствует в системах любого типа. Поэтому возникает необходимость уточнить модель (2) так, чтобы в ней можно было учесть эффекты, связанные со стохастическим характером среды.

Влияние среды на свойства системы описывается с помощью набора параметров η . Если система находится во флуктуирующей среде, то некоторые из этих параметров (или все) становятся случайными величинами. Учитывая два последних условия, эти параметры можно представить стационарными однородными изотропными случайными полями $\eta(\mathbf{r}, t)$, которые удобно разложить на две составляющие $\eta(\mathbf{r}, t) = \eta_0 + f(\mathbf{r}, t)$. Здесь η_0 – пространственно-временное среднее параметра η , соответствующее среднему состоянию среды, поле $f(\mathbf{r}, t)$ описывает флуктуации параметра относительно среднего значения, $\langle f(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$. В весьма обширный класс феноменологических уравнений типа (1), встречающихся в приложениях, внешний параметр входит линейно.

Если в каждом из уравнений (2) флуктуирует один внешний параметр, то, учитывая вышеизложенное, система (2) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial t} &= P(x_1, x_2, \chi_{10} \dots \chi_n) + \\ &+ f_1(\mathbf{r}, t) P'(x_1, x_2, \chi_k, \dots \chi_m) + F_1(\mathbf{r}, t) + D_1 \nabla^2 x_1, \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= Q(x_1, x_2, \eta_{10} \dots \eta_j) + \\ &+ f_2(\mathbf{r}, t) Q'(x_1, x_2, \eta_l, \dots \eta_s) + F_2(\mathbf{r}, t) + D_2 \nabla^2 x_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь x_1, x_2 – динамические переменные, $\chi_1 \dots \chi_n, \eta_1 \dots \eta_j$ – параметры задачи, χ_{10}, η_{10} – пространственно-временные средние соответствующих параметров, D_1, D_2 – коэффициенты диффузии компонент, P, Q, P' и Q' – нелинейные функции, описывающие взаимодействие подсистем. Здесь также учтено воздействие внешних случайных сил, имеющих аддитивный характер и описываемых случайными полями $F_i(\mathbf{r}, t)$ с нулевыми средними значениями.

Определим статистические характеристики случайных полей в соответствии со свойствами среды, следуя работе [14].

В работе [14] приводится обоснование того факта, что для большинства реальных систем, имеющих немарковское поведение, хорошим приближением для моделирования флуктуирующей окружающей среды является цветной шум. В этом случае будущая эволюция системы зависит лишь от её состояния и состояния среды в данный момент времени, которое является марковским (при этом предполагается, что начальное состояние системы не зависит от шума). Это означает, что любое предсказание будущей стохастической эволюции многомерного процесса, описываемого переменными системы и случайным внешним источником, основанное на информации о состоянии в данный момент, является наилучшим из всех возможных.

Как отмечено в [14], флуктуации окружения представляют собой суммарный эффект действия многих слабосвязанных факторов окружающей среды. Тогда из центральной предельной теоремы следует, что флуктуации внешнего источника распределены по Гауссу. Свойства эргодичности, марковости и гауссовости флуктуирующего окружения ограничивают выбор случайных полей для моделирования флуктуаций окружающей среды в (3) стационарным однородным изотропным гауссовым полем с экспоненциальной функцией корреляции:

$$\langle f_i(\mathbf{r}, t) f_j(\mathbf{r}', t') \rangle = \Phi_i(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \exp(-k_i |t - t'|) \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2). \quad (4)$$

$\Phi_i(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ задаёт пространственную зависимость корреляций случайного поля. Время корреляции $r_i = k_i^{-1}$ – характерный временной масштаб внешних флуктуаций. Символ δ_{ij} означает отсутствие взаимной корреляции полей $f_1(\mathbf{r}, t)$ и $f_2(\mathbf{r}, t)$.

Вид корреляционного тензора полей $F_i(\mathbf{r}, t)$ зависит от характера действующих аддитивных сил.

Чтобы завершить построение модели, определим условия на границе системы. Для большинства приложений выбираются либо граничные условия Дирихле, либо граничные условия Неймана [9].

Для упрощения теоретического исследования будем считать систему безграничной.

2. Обобщённые уравнения Гинзбурга-Ландау и дисперсионные уравнения для усреднённых по ансамблю реализаций амплитуд неустойчивых мод

Базовые математические модели самоорганизации едины для широкого класса физических, химических, биологических и экономических систем. К таким моделям относятся обобщённые уравнения Гинзбурга-Ландау, решения которых хорошо изучены. Линейные члены уравнений Гинзбурга-Ландау определяют возможность существования фазового перехода системы. Нелинейные слагаемые определяют правила отбора взаимодействующих мод и,

следовательно, вид возникающих структур, а также ограничивают секулярный рост амплитуд неустойчивых мод. Поэтому разработка новых или модификация существующих аналитических методов сведения исходной системы к базовым моделям представляется важной.

Здесь разработан метод получения уравнений для усреднённых по ансамблю реализаций амплитуд неустойчивых мод систем типа (3), находящихся во внешних аддитивных и мультипликативных флуктуирующих полях.

Вначале исследуем поведение системы (3) в частном случае, когда она находится только в поле аддитивных флуктуаций. Рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial t} &= P(x_1, x_2, \chi_1, \dots, \chi_n) + D_1 \nabla^2 x_1 + f_1(\mathbf{r}, t), \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= Q(x_1, x_2, \eta_1, \dots, \eta_n) + D_2 \nabla^2 x_2 + f_2(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (5)$$

Среди параметров $\chi_1 \dots \chi_n, \eta_1 \dots \eta_n$ есть параметр, имеющий размерность, обратную времени. Пусть это χ_1 . Введём безразмерные время $\tau = \chi_1 t$ и координаты $\mathbf{r}' = \mathbf{r} \sqrt{\chi_1 / D_1}$. Тогда система (5) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \tau} &= P'(x_1, x_2, \chi_1, \dots, \chi_n) + \nabla'^2 x_1 + F_1(\mathbf{r}', \tau), \\ \frac{\partial x_2}{\partial \tau} &= Q'(x_1, x_2, \eta_1, \dots, \eta_n) + D \nabla'^2 x_2 + F_2(\mathbf{r}', \tau). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $P'(x_1, x_2, \chi_1, \dots, \chi_n) = P(x_1, x_2, \chi_1, \dots, \chi_n) / \chi_1$, $Q'(x_1, x_2, \eta_1, \dots, \eta_n) = Q(x_1, x_2, \eta_1, \dots, \eta_n) / \chi_1$, $F_1(\mathbf{r}', \tau) = f_1(\mathbf{r}', \tau) / \chi_1$, $F_2(\mathbf{r}', \tau) = f_2(\mathbf{r}', \tau) / \chi_1$, $D = D_2 / D_1$. Далее везде штрихи опущены.

Пусть значения параметров $\chi_1 \dots \chi_n, \eta_1 \dots \eta_n$ таковы, что x_{10} и x_{20} – устойчивые состояния равновесия детерминированной системы (5), определяемые уравнениями $P(x_1, x_2, \chi_1, \dots, \chi_n) = 0$, $Q(x_1, x_2, \eta_1, \dots, \eta_n) = 0$.

Перепишем систему (6) в операторном виде, разделив её правую детерминированную часть на линейную $K(\nabla^2) \mathbf{q}$ и нелинейную $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ компоненты:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tau} - K(\nabla^2) \mathbf{q} = \mathbf{g} + \mathbf{F}(\mathbf{r}, \tau). \quad (7)$$

Вектор \mathbf{q} описывает отклонения решения относительно стационарных состояний $\mathbf{q} = (x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20})$. Линейный оператор $K(\nabla^2)$ имеет вид

$$\begin{aligned} K(\nabla^2) &= \begin{pmatrix} a_{11} + \nabla^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + D \nabla^2 \end{pmatrix}, \\ a_{1j} &= \left. \frac{\partial P}{\partial x_j} \right|_{x_{10}, x_{20}}, \quad a_{2j} = \left. \frac{\partial Q}{\partial x_j} \right|_{x_{10}, x_{20}}, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (8)$$

Вектор \mathbf{g} содержит квадратичные и кубические нелинейности, полученные разложением в ряд правой детерминированной части (6), и определяется так:

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} \sum_{\mu, \nu=1}^2 g_{1,\mu\nu}^{(2)} q_\mu q_\nu + \sum_{\mu, \nu, \kappa=1}^2 g_{1,\mu\nu\kappa}^{(3)} q_\mu q_\nu q_\kappa \\ \sum_{\mu, \nu=1}^2 g_{2,\mu\nu}^{(2)} q_\mu q_\nu + \sum_{\mu, \nu, \kappa=1}^2 g_{2,\mu\nu\kappa}^{(3)} q_\mu q_\nu q_\kappa \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где

$$g_{1,\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 P}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \Big|_{x_{\mu 0}, x_{\nu 0}}; \quad g_{1,\mu\nu\kappa}^{(3)} = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 P}{\partial x_\mu \partial x_\nu \partial x_\kappa} \Big|_{x_{\mu 0}, x_{\nu 0}}$$

$$g_{2,\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \Big|_{x_{\mu 0}, x_{\nu 0}}; \quad g_{2,\mu\nu\kappa}^{(3)} = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 Q}{\partial x_\mu \partial x_\nu \partial x_\kappa} \Big|_{x_{\mu 0}, x_{\nu 0}}.$$

Вектор \mathbf{F} содержит случайные компоненты:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{r}, \tau) \\ F_2(\mathbf{r}, \tau) \end{pmatrix}.$$

При линейном исследовании на устойчивость опускаем нелинейный член $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ и случайные компоненты и полагаем, что вектор \mathbf{q} имеет вид $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 \exp(\lambda\tau + i\mathbf{k}\mathbf{r})$.

После его подстановки в левую часть (7) получаем характеристическое уравнение $\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta + 0$, имеющее решения

$$\lambda_{1,2}(k) = \frac{\alpha(k) \pm \sqrt{\alpha^2(k) - 4\beta(k)}}{2}, \quad (10)$$

где

$$\alpha(k) = \text{Tr}(a_{ij}) - (1 + D)k^2,$$

$$\beta(k) = \text{Det}(a_{ij}) - (Da_{11} + a_{22})k^2 + Dk^4.$$

Неустойчивость Тьюринга типа мягкой моды возникает, если $\text{Im}(\lambda_{1,2}) = 0$ и $\text{Re}(\lambda_1) \geq 0$, т.е. $\alpha < 0, \beta \leq 0$.

Представим вектор \mathbf{q} в виде суперпозиции по собственным формам оператора $K(\nabla^2)$

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, \tau) = \sum_{\mathbf{k}', j} \mathbf{O}^{(j)}(\mathbf{k}') \xi_{\mathbf{k}'}^{(j)}(\tau) e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}}. \quad (11)$$

Здесь $\mathbf{O}^{(j)}(\mathbf{k})$ – собственные векторы оператора $K(\nabla^2)$, $\xi_{\mathbf{k}}^{(j)}(\tau)$ – неизвестные амплитуды, $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ – собственные функции оператора ∇^2 . Здесь предполагается, что вектор $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$ представляется как суперпозиция плоских волн, однако в зависимости от симметрии задачи в качестве собственных функций оператора ∇^2 удобнее выбирать функции Бесселя или сферические волновые функции.

Известно, что неустойчивые моды заключены в узкой полосе значений волновых векторов, что даёт возможность построения волновых пакетов путём суммирования по волновым векторам, заключённым в малых интервалах. Таким образом, выделяются несущие моды с дискретными значениями волновых векторов и медленно меняющимися амплитудами $\xi_{\mathbf{k}}^{(j)}(\tau)$.

Чтобы получить уравнения для амплитуд мод $\xi_{\mathbf{k}}^{(j)}(\tau)$, подставим (11) в (7), умножим полученное уравнение слева на $\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})\mathbf{O}^{*(j')}(\mathbf{k})$ и проинтегрируем по области, значительно большей периода осциллирующей $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$, но в которой $\xi_{\mathbf{k}}^{(j)}(\tau)$ меняется очень мало. Здесь $\mathbf{O}^{*(j')}(\mathbf{k})$ – собственные вектора оператора, сопряжённого к $K(\nabla^2)$: $\mathbf{O}^{(j)}\mathbf{O}^{*(j')} = \delta_{jj'}$.

После преобразований система уравнений для амплитуд мод $\xi_{\mathbf{k}}^{(j)}(\tau)$ принимает вид:

$$\frac{d\xi_{\mathbf{k}}^{(j)}}{d\tau} - \lambda_j(\mathbf{k})\xi_{\mathbf{k}}^{(j)} =$$

$$= \sum_{jj', \mathbf{k}\mathbf{k}'} \sigma_{jj'}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') \xi_{\mathbf{k}'}^{(j')} \xi_{\mathbf{k}''}^{(j'')} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' - \mathbf{k}) +$$

$$+ \sum_{jj', \mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''} \sigma_{jj'}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}''') \xi_{\mathbf{k}'}^{(j')} \xi_{\mathbf{k}''}^{(j'')} \xi_{\mathbf{k}'''}^{(j''')} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{k}''' - \mathbf{k}) +$$

$$+ \sum_{\varepsilon=1}^2 O_{\varepsilon}^{*(j)}(\mathbf{k}) z_{\varepsilon, \mathbf{k}}(\tau).$$

В (12) введены следующие обозначения:

$$\sigma_{jj'}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') = \sum_{\varepsilon, \mu, \nu} g_{\varepsilon, \mu\nu}^{(2)} O_{\varepsilon}^{*(j)}(\mathbf{k}) O_{\mu}^{(j')}(\mathbf{k}') O_{\nu}^{(j'')}(\mathbf{k}''),$$

$$\sigma_{jj'}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}''') = \sum_{\varepsilon, \mu, \nu, \kappa} g_{\varepsilon, \mu\nu\kappa}^{(3)} O_{\varepsilon}^{*(j)}(\mathbf{k}) O_{\mu}^{(j')}(\mathbf{k}') O_{\nu}^{(j'')}(\mathbf{k}'') O_{\kappa}^{(j''')}(\mathbf{k}''').$$

$z_{\varepsilon, \mathbf{k}}(\tau) = \int F_{\varepsilon}(\mathbf{r}, \tau) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}$ – компоненты случайного векторного поля $\mathbf{z}(t)$, имеющие нулевые средние, ε и \mathbf{k} – индексные аргументы этого поля. В предположении, что времена корреляций случайных полей гораздо меньше всех характерных времён задачи (3), корреляционные функции для компонент поля $\mathbf{z}(t)$ будут иметь вид: $\langle z_{j, \mathbf{k}}(t) z_{l, \mathbf{k}'}(\tau) \rangle = g_{jl}(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(t - \tau) \delta_{jl}$ [12].

Положим далее для определённости

$$\Phi_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \theta_j \exp(-k_{jj} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \quad (13)$$

Здесь θ_j – интенсивности флуктуаций, k_{jj} – величины, обратные радиусам корреляций. Тогда для двумерной среды $g_{jj} = 2\pi\theta_j k_{jj} / (k^2 + k_{jj}^2)^{3/2}$.

Система (12) содержит как устойчивые (затухающие), так и неустойчивые (незатухающие) моды. В окрестности точки бифуркации время релаксации незатухающих мод значительно больше времени релаксации затухающих, поэтому последние адиабатически следуют за первыми. Это даёт возможность исключить из уравнений (12) затухающие моды.

Чтобы провести процедуру адиабатического исключения устойчивых мод, перепишем (12), выделив из неё две подсистемы уравнений: для неустойчивых мод (обозначим их дополнительным индексом (u)) и для устойчивых (s). Поскольку незатухающие моды, если пренебречь нелинейными членами, могут нарастать до бесконечности, уравнения для них запишем с точностью до кубических сла-

гаемых, обеспечивающих нелинейную стабилизацию неустойчивости.

Естественно считать, что амплитуды устойчивых мод много меньше амплитуд неустойчивых мод $|\xi_s| \ll |\xi_u|$ и их изменения происходят самосогласованным образом: $\xi_s \sim \xi_u^2$ (приближение самосогласованного поля).

В уравнениях для устойчивых мод оставим только члены, необходимые для получения уравнений для неустойчивых мод с точностью до членов третьего порядка.

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_{ks}^{(j)}}{dt} - \lambda_j(\mathbf{k}_s)\xi_{ks}^{(j)} = & \\ = \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\mathbf{k}'''} \sigma_{11}^{(j)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') \xi_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'''}^{(1)} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' - \mathbf{k}_s) + & \quad (14) \\ + \sum_{\varepsilon=1}^2 O_{\varepsilon}^{*(j)}(\mathbf{k}_s) z_{\varepsilon, \mathbf{k}_s}(\tau). & \end{aligned}$$

Для неустойчивых мод из (12) получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_{ku}^{(1)}}{d\tau} - \lambda_1(\mathbf{k}_u)\xi_{ku}^{(1)} = & \\ = \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\mathbf{k}'''} \sigma_{11}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') \xi_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'''}^{(1)} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' - \mathbf{k}_u) + & \\ + \sum_{\varepsilon, \mathbf{k}'\mathbf{k}''\mathbf{k}'''} (\sigma_{1\varepsilon}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') + & \quad (15) \\ + \sigma_{\varepsilon 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'')) \xi_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'''}^{(\varepsilon)} \delta(\mathbf{k}_u + \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_u) + & \\ + \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\mathbf{k}'''} \sigma_{111}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}''') \xi_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'''}^{(1)} \delta \times & \\ \times (\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{k}''' - \mathbf{k}_u) + \sum_{\varepsilon=1}^2 O_{\varepsilon}^{*(1)}(\mathbf{k}_u) z_{\varepsilon, \mathbf{k}_u}(\tau). & \end{aligned}$$

В случае мягкой моды при исключении $\xi_{\mathbf{k},s}^{(j)}$ из уравнений (15), в (14) можно пренебречь производной по времени $d\xi_{\mathbf{k},s}^{(j)} / d\tau$ [13]. Выражая из (14) $\xi_{\mathbf{k},s}^{(j)}$ и подставляя полученное выражение в (15), получим фундаментальную систему уравнений для амплитуд неустойчивых мод:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_{ku}^{(1)}}{d\tau} - \lambda_1(\mathbf{k}_u)\xi_{ku}^{(1)} = & \\ = \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\mathbf{k}'''} \sigma_{11}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') \xi_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'''}^{(1)} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' - \mathbf{k}_u) + & \\ + \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\mathbf{k}'''} \omega(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}''') \xi_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'''}^{(1)} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{k}''' - \mathbf{k}_u) - & \\ - \sum_{\varepsilon, \mathbf{k}'\mathbf{k}''\mathbf{k}'''} \omega_{\varepsilon}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}_s) \xi_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}^{(1)} z_{\varepsilon, \mathbf{k}_s}(\tau) \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' - \mathbf{k}_u) + & \\ + \sum_{\varepsilon} O_{\varepsilon}^{*(1)}(\mathbf{k}_u) z_{\varepsilon, \mathbf{k}_u}(\tau). & \quad (16) \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}''') = & \sigma_{111}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}''') - \\ - \frac{(\sigma_{11}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}', \mathbf{k}_s) + \sigma_{11}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'''))}{\lambda_1(\mathbf{k}_s)} \sigma_{11}^{(1)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}'', \mathbf{k}''') - & \\ - \frac{(\sigma_{12}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}', \mathbf{k}_s) + \sigma_{21}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}''))}{\lambda_2(\mathbf{k}_s)} \sigma_{11}^{(2)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}'', \mathbf{k}'''), & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{\varepsilon}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}', \mathbf{k}_s) = & \\ = \frac{(\sigma_{11}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}', \mathbf{k}_s) + \sigma_{11}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'))}{\lambda_1(\mathbf{k}_s)} O_{\varepsilon}^{*(1)}(\mathbf{k}_s) + & \\ + \frac{(\sigma_{12}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}', \mathbf{k}_s) + \sigma_{21}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'))}{\lambda_2(\mathbf{k}_s)} O_{\varepsilon}^{*(2)}(\mathbf{k}_s). & \end{aligned}$$

Эти моды служат параметрами порядка. Их кооперация или конкуренция определяют вид возникающих структур. Уравнения вида (16) также называют обобщёнными уравнениями Гинзбурга-Ландау (УГЛ). Дельта-функции $\delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' - \mathbf{k}_u)$, $\delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{k}''' - \mathbf{k}_u)$, $\delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_u)$ дают «правила отбора» для взаимодействующих мод. При отсутствии пространственной корреляции внешнего аддитивного шума уравнения (16) сводятся к уравнениям, полученным в [13].

Уравнения (16) в последней строке содержат флуктуирующие компоненты. Дальнейший анализ уравнений (16) может заключаться в получении соответствующего уравнения Фоккера-Планка (УФП), которое определяет вероятность возникающей некоторой конфигурации мод. Однако в (16) содержатся слагаемые вида $\omega_{\varepsilon}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}', \mathbf{k}_s) \xi_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}^{(1)} z_{\varepsilon, \mathbf{k}_s}(\tau) \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_u)$, которые существенно усложняют вывод УФП. Кроме того, УФП не дают возможности исследовать влияние флуктуирующего окружения на дисперсионные характеристики неустойчивых мод. Поэтому усредним уравнения (16) по ансамблю реализаций.

При усреднении возникает необходимость раскрытия корреляторов вида $\langle \xi_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}^{(1)} z_{\varepsilon, \mathbf{k}_s}(\tau) \rangle$. Для этого используется многомерное обобщение формулы Фурутцу-Новикова [12].

Принимая во внимание формальные решения системы уравнений (16), учитывая, что параметры порядка $\xi_{\mathbf{k}u}^{(1)}$ являются функционалами случайного поля $\mathbf{z}(t)$, в результате усреднения окончательно получим уравнения для моментов параметров порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} \rangle}{d\tau} - \lambda_1(\mathbf{k}_u)\langle \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} \rangle = & \\ = \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon, \mathbf{k}'\mathbf{k}''\mathbf{k}'''} \omega_{\varepsilon}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}', \mathbf{k}_s) \omega_{\varepsilon}(\mathbf{k}'', \mathbf{k}'', \mathbf{k}_s) g_{\varepsilon\varepsilon}(|\mathbf{k}_s|) \times & \\ \times \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_u) \delta(\mathbf{k}'' + \mathbf{k}' - \mathbf{k}_u) \delta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}_s} \langle \xi_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}^{(1)} \rangle + & \\ + \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\mathbf{k}'''} \sigma_{11}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') \langle \xi_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'''}^{(1)} \rangle \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' - \mathbf{k}_u) + & \quad (17) \\ + \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\mathbf{k}'''} \omega(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}''') \langle \xi_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'''}^{(1)} \rangle \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{k}''' - \mathbf{k}_u). & \end{aligned}$$

В системе (17) возникают дополнительные слагаемые, пропорциональные $\langle \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)}(\tau) \rangle$, что приводит к изменению собственных чисел каждой моды, и, как следствие, к изменению области неустойчивости. Выделим из первой суммы правой части (17) слагаемые, дающие вклад в собственное значение данной моды. В результате получим дисперсионное уравнение для усреднённых амплитуд неустойчивых мод:

$$\lambda = \lambda_1(\mathbf{k}_\mu) + \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon} \omega_{\varepsilon}^2(\mathbf{k}_\mu, \mathbf{k}_\mu, 0) g_{\varepsilon\varepsilon}(0). \quad (18)$$

В выражения $g_{\varepsilon\varepsilon} = 2\pi\theta_{\varepsilon}/k_{\varepsilon}^2$ входят параметры случайного поля, а $\omega_{\varepsilon}^2(\mathbf{k}_\mu, \mathbf{k}_\mu, 0) > 0$, поэтому из (18) следует, что увеличение интенсивности и радиуса корреляции случайного поля увеличивает инкременты неустойчивых мод (действительные части собственных значений) и область неустойчивости системы, что должно приводить к ускорению процесса структурообразования в поле флуктуаций.

Ниже изложен метод получения обобщённых уравнений Гинзбурга-Ландау для систем типа (3), находящихся в поле мультипликативных флуктуаций параметров для случая, когда в автономной системе реализуются условия неустойчивости типа мягкой моды. Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial t} &= P(x_1, x_2, \chi_0, \dots, \chi_n) + d_1 \nabla^2 x_1, \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= Q(x_1, x_2, \eta_0, \dots, \eta_m) + d_2 \nabla^2 x_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Пусть χ_1 и η_1 – внешние параметры, входящие в систему (19) линейно. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial t} &= P_1(x_1, x_2, \chi_0, \chi_2, \dots, \chi_n) + \\ &+ \chi_1 P_2(x_1, x_2, \chi_{k+1}, \dots, \chi_n) + d_1 \nabla^2 x_1, \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= Q_1(x_1, x_2, \eta_0, \eta_2, \dots, \eta_k) + \\ &+ \eta_1 Q_2(x_1, x_2, \eta_{k+1}, \dots, \eta_m) + d_2 \nabla^2 x_2. \end{aligned} \quad (20)$$

Под действием флуктуирующего окружения параметры χ_1 и η_1 становятся случайными функциями, и можно положить $\chi_1 = \chi_{10} + f_1(\mathbf{r}, t)$, $\eta_1 = \eta_{10} + f_2(\mathbf{r}, t)$, где поля $f_i(\mathbf{r}, t)$ имеют корреляционный тензор $\langle f_i(\mathbf{r}, t) f_j(\mathbf{r}', t') \rangle = \Phi_{ij}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \delta(|t - t'|) \delta_{ij}$. Здесь для простоты учтено, что времена корреляции случайных полей существенно меньше всех характерных времён задачи (19). Уравнения (20) приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial t} &= P(x_1, x_2, \chi_0, \chi_{10}, \dots, \chi_n) + \\ &+ f_1(\mathbf{r}, t) P_2(x_1, x_2, \chi_{k+1}, \dots, \chi_n) + d_1 \nabla^2 x_1, \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= Q(x_1, x_2, \eta_0, \eta_{10}, \dots, \eta_m) + \\ &+ f_2(\mathbf{r}, t) Q_2(x_1, x_2, \eta_{k+1}, \dots, \eta_m) + d_2 \nabla^2 x_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Среди параметров $\chi_0, \dots, \chi_n, \eta_0, \dots, \eta_m$ есть параметр, имеющий размерность, обратную времени. Пусть это χ_0 . Введём безразмерные переменные: $\tau = \chi_0 t$ и $\mathbf{r}' = \mathbf{r} \sqrt{\chi_0/d_1}$. Тогда система (20) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \tau} &= P'(x_1, x_2, \chi_0, \chi_{10}, \dots, \chi_n) + \\ &+ f_1(\mathbf{r}', \tau) P'_2(x_1, x_2, \chi_{k+1}, \dots, \chi_n) + \nabla'^2 x_1, \\ \frac{\partial x_2}{\partial \tau} &= Q'(x_1, x_2, \eta_0, \eta_{10}, \dots, \eta_m) + \\ &+ f_2(\mathbf{r}', \tau) Q'_2(x_1, x_2, \eta_{k+1}, \dots, \eta_m) + D \nabla'^2 x_2. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь

$$\begin{aligned} P'(x_1, x_2, \chi_0, \chi_{10}, \dots, \chi_n) &= P(x_1, x_2, \chi_0, \chi_{10}, \dots, \chi_n) / \chi_0, \\ Q'(x_1, x_2, \eta_0, \eta_{10}, \dots, \eta_m) &= Q(x_1, x_2, \eta_0, \eta_{10}, \dots, \eta_m) / \chi_0, \\ P'_2(x_1, x_2, \chi_{k+1}, \dots, \chi_n) &= P_2(x_1, x_2, \chi_{k+1}, \dots, \chi_n) / \chi_0, \\ Q'_2(x_1, x_2, \eta_{k+1}, \dots, \eta_m) &= Q_2(x_1, x_2, \eta_{k+1}, \dots, \eta_m) / \chi_0, \\ D &= d_2 / d_1. \end{aligned}$$

Далее везде штрихи опущены.

Обозначим, как и ранее, через x_{10} и x_{20} устойчивые состояния равновесия системы (19) и представим (22) в операторном виде (7). Линейный оператор $K(\nabla'^2)$ и нелинейная часть $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ будут иметь вид (8) и (9) соответственно. Остановимся более подробно на векторе \mathbf{F} , содержащем случайные компоненты

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{r}, \tau) P_2(x_1, x_2, \chi_{k+1}, \dots, \chi_n) \\ f_2(\mathbf{r}, \tau) Q_2(x_1, x_2, \eta_{k+1}, \dots, \eta_m) \end{pmatrix}.$$

В него входят нелинейные функции P_2 и Q_2 . Чтобы иметь возможность использовать представление решения в виде (11), необходимо разложить эти функции в ряд Тейлора по степеням компонент вектора \mathbf{q} . Ограничимся в разложении P_2 и Q_2 квадратичными слагаемыми. Как будет показано в дальнейшем, слагаемые такого порядка необходимы для получения дисперсионных уравнений для усреднённых амплитуд неустойчивых мод с точностью до слагаемых, квадратичных по интенсивностям флуктуаций.

В результате вектор, содержащий случайные компоненты, приобретёт вид

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{r}, t) \left[p_1^{(0)} + \sum_{\mu=1}^2 p_{1,\mu}^{(1)} q_{\mu} + \sum_{\mu,\nu=1}^2 p_{1,\mu\nu}^{(2)} q_{\mu} q_{\nu} \right] \\ f_2(\mathbf{r}, t) \left[p_2^{(0)} + \sum_{\mu=1}^2 p_{2,\mu}^{(1)} q_{\mu} + \sum_{\mu,\nu=1}^2 p_{2,\mu\nu}^{(2)} q_{\mu} q_{\nu} \right] \end{pmatrix},$$

где $p_1^{(0)} = P_2(x_{10}, x_{20})$, $p_2^{(0)} = Q_2(x_{10}, x_{20})$,

$$\begin{aligned} p_{1,\mu}^{(1)} &= \left. \frac{\partial P_2}{\partial x_{\mu}} \right|_{x_{10}, x_{20}}, \quad p_{2,\mu}^{(1)} = \left. \frac{\partial Q_2}{\partial x_{\mu}} \right|_{x_{10}, x_{20}} \\ p_{1,\mu\nu}^{(2)} &= \left. \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} \right|_{x_{\mu 0}, x_{\nu 0}}; \quad p_{2,\mu\nu}^{(2)} = \left. \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 Q_2}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} \right|_{x_{\mu 0}, x_{\nu 0}}. \end{aligned}$$

Снова представим вектор \mathbf{q} в виде суперпозиции по собственным формам оператора $K(\nabla'^2)$ (11) и, используя описанную ранее процедуру построения волновых пакетов, получим систему уравнений для медленно меняющихся амплитуд

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_{\mathbf{k}}^{(j)}}{d\tau} - \lambda_j(\mathbf{k}) \xi_{\mathbf{k}}^{(j)} &= \\ &= \sum_{j'j''\mathbf{k}'\mathbf{k}''} \sigma_{j'j''}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') \xi_{\mathbf{k}'}^{(j')} \xi_{\mathbf{k}''}^{(j'')} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' - \mathbf{k}) + \\ &+ \sum_{j_2'j_2''\mathbf{k}'\mathbf{k}''} \sigma_{j_2'j_2''}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') \xi_{\mathbf{k}'}^{(j_2')} \xi_{\mathbf{k}''}^{(j_2'')} \xi_{\mathbf{k}}^{(j)} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{k} - \mathbf{k}) \\ &+ \sum_{\varphi=1}^2 O_{\varphi}^{*(j)}(\mathbf{k}) p_{\varphi}^{(0)} z_{\varphi, \mathbf{k}}(\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\varphi=1}^2 \sum_{j, \mathbf{k}'} \varepsilon_{\varphi, j}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \xi_{\mathbf{k}}^{(j')} z_{\varphi, \mathbf{k}-\mathbf{k}'}(\tau) + \\
 & + \sum_{\varphi=1}^2 \sum_{j, j', \mathbf{k}, \mathbf{k}'} \varepsilon_{\varphi, j, j'}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') \xi_{\mathbf{k}}^{(j)} \xi_{\mathbf{k}'}^{(j')} z_{\varphi, \mathbf{k}-\mathbf{k}'-\mathbf{k}''}(\tau), \\
 & \text{где } \varepsilon_{\varphi, j}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sum_{\mu} p_{\varphi, \mu}^{(1)} O_{\varphi}^{*(j)}(\mathbf{k}) O_{\mu}^{(j')}(\mathbf{k}'),
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\varepsilon_{\varphi, j, j'}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') = \sum_{\mu, \nu} p_{\varphi, \mu \nu}^{(2)} O_{\varphi}^{*(j)}(\mathbf{k}) O_{\mu}^{(j')}(\mathbf{k}') O_{\nu}^{(j'')}(\mathbf{k}'').$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{d\xi_{\mathbf{k}u}^{(1)}}{d\tau} - \lambda_1(\mathbf{k}_u) \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} = \sum_{\mathbf{k}'u\mathbf{k}''u} \sigma_{11}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u) \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} \delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u - \mathbf{k}_u) + \\
 & + \sum_{\mathbf{k}'u\mathbf{k}''u} \omega(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}_s) \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}_s}^{(1)} \delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u + \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_u) + \\
 & + \sum_{\varphi=1}^2 O_{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{k}_u) p_{\varphi}^{(0)} z_{\varphi, \mathbf{k}u}(\tau) - \sum_{\psi, \varphi, \varphi'=1}^2 \sum_{\mathbf{k}s} \varepsilon_{\varphi, \psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s) \frac{O_{\varphi}^{*(\psi)}(\mathbf{k}_s)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_s)} p_{\varphi'}^{(0)} z_{\varphi, \mathbf{k}u-\mathbf{k}s}(\tau) z_{\varphi', \mathbf{k}s}(\tau) + \\
 & + \sum_{\varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'u} \varepsilon_{\varphi, 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u) \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}u-\mathbf{k}'u}(\tau) + \sum_{\varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'u\mathbf{k}''u} \varepsilon_{\varphi, 11}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u) \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}u-\mathbf{k}'u-\mathbf{k}''u}(\tau) - \\
 & - \sum_{\psi, \varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'u\mathbf{k}s} (\sigma_{1\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s) + \sigma_{\psi 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u)) \frac{O_{\varphi}^{*(\psi)}(\mathbf{k}_s)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_s)} p_{\varphi}^{(0)} \delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_u) \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}s}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}s}(\tau) - \\
 & - \sum_{\psi, \varphi, \varphi'=1}^2 \sum_{\mathbf{k}s\mathbf{k}'u} \varepsilon_{\varphi, \psi}^{(1)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u) \frac{\varepsilon_{\varphi, 1}^{(\psi)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_s)} \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{\varphi', \mathbf{k}s-\mathbf{k}'u}(\tau) z_{\varphi, \mathbf{k}u-\mathbf{k}s}(\tau) - \\
 & - \sum_{\psi, \varphi, \varphi'=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'u\mathbf{k}s} (\varepsilon_{\varphi, 1\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s) + \varepsilon_{\varphi, \psi 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u)) \frac{O_{\varphi'}^{*(\psi)}(\mathbf{k}_s)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_s)} p_{\varphi'}^{(0)} \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}u-\mathbf{k}'u-\mathbf{k}s}(\tau) z_{\varphi', \mathbf{k}s}(\tau) - \\
 & - \sum_{\psi, \varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'u\mathbf{k}''u\mathbf{k}s} (\sigma_{1\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s) + \sigma_{\psi 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u)) \frac{\varepsilon_{\varphi, 1}^{(\psi)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_s)} \delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_u) \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}s-\mathbf{k}'u}(\tau) - \\
 & - \sum_{\psi, \varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'u\mathbf{k}''u\mathbf{k}s} \varepsilon_{\varphi, \psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s) \frac{\sigma_{11}^{(\psi)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_s)} \delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u - \mathbf{k}_s) \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}u-\mathbf{k}s}(\tau) - \\
 & - \sum_{\psi, \varphi, \varphi'=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'u\mathbf{k}''u\mathbf{k}s} \varepsilon_{\varphi, \psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s) \frac{\varepsilon_{\varphi, 11}^{(\psi)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_s)} \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} z_{\varphi', \mathbf{k}s-\mathbf{k}'u-\mathbf{k}''u}(\tau) z_{\varphi, \mathbf{k}u-\mathbf{k}s}(\tau) - \\
 & - \sum_{\psi, \varphi, \varphi'=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'u\mathbf{k}''u\mathbf{k}s} (\varepsilon_{\varphi, 1\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s) + \varepsilon_{\varphi, \psi 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u)) \frac{\varepsilon_{\varphi, 1}^{(\psi)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_s)} \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}u-\mathbf{k}'u-\mathbf{k}s}(\tau) z_{\varphi', \mathbf{k}s-\mathbf{k}''u}(\tau) - \\
 & - \sum_{\psi, \varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'u\mathbf{k}''u\mathbf{k}''u\mathbf{k}s} (\sigma_{1\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s) + \sigma_{\psi 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u)) \delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_u) \frac{\varepsilon_{\varphi, 11}^{(\psi)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_s)} \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}s-\mathbf{k}'u-\mathbf{k}''u}(\tau) - \\
 & - \sum_{\psi, \varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'u\mathbf{k}''u\mathbf{k}''u\mathbf{k}s} (\varepsilon_{\varphi, 1\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s) + \varepsilon_{\varphi, \psi 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u)) \frac{\sigma_{11}^{(\psi)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_s)} \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}u-\mathbf{k}'u-\mathbf{k}s}(\tau) \delta(\mathbf{k}''_u + \mathbf{k}''_u - \mathbf{k}_s) - \\
 & - \sum_{\psi, \varphi, \varphi'=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'u\mathbf{k}''u\mathbf{k}''u\mathbf{k}s} (\varepsilon_{\varphi, 1\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s) + \varepsilon_{\varphi, \psi 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u)) \frac{\varepsilon_{\varphi, 11}^{(\psi)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_s)} \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}u-\mathbf{k}'u-\mathbf{k}s}(\tau) z_{\varphi', \mathbf{k}s-\mathbf{k}''u-\mathbf{k}''u}(\tau)
 \end{aligned} \tag{24}$$

Выясним, какие слагаемые необходимо оставить в (24), чтобы после усреднения получить дисперсионное уравнение для амплитуд неустойчивых мод с точностью до слагаемых, квадратичных по интенсивностям флуктуаций.

Рассмотрим момент четвертого порядка $\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}}(\tau) \rangle$.

Функции $\sigma_{jj'}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$, $\sigma_{jj''}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}''')$ определены выше.

Полагая, что параметры задачи удовлетворяют условиям наступления неустойчивости типа мягкой моды, используя приближение самосогласованного поля, разделим систему (23) на подсистемы уравнений для устойчивых и неустойчивых мод. Пренебрегая производной $d\xi_{\mathbf{k}s}^{(j)}/d\tau$, далее проводим процедуру адиабатического исключения и получаем уравнения для неустойчивых мод:

Используя связь между моментами и корреляторами [17], получим:

$$\begin{aligned}
 & \langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}}(\tau) \rangle = \langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)}, \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)}, \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)}, z_{\varphi, \mathbf{k}}(\tau) \rangle + \\
 & + \langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)}, \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} \rangle \langle \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)}, z_{\varphi, \mathbf{k}}(\tau) \rangle + \langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)}, \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} \rangle \langle \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)}, z_{\varphi, \mathbf{k}}(\tau) \rangle + \\
 & + \langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)}, \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} \rangle \langle \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)}, z_{\varphi, \mathbf{k}}(\tau) \rangle + \langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)}, \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)}, z_{\varphi, \mathbf{k}}(\tau) \rangle \langle \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} \rangle + \\
 & + \langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)}, \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)}, z_{\varphi, \mathbf{k}}(\tau) \rangle \langle \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} \rangle + \langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)}, \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)}, z_{\varphi, \mathbf{k}}(\tau) \rangle \langle \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} \rangle +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{\phi, \mathbf{k}}(\tau) \right\rangle \left\langle \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} \right\rangle \left\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \right\rangle + \left\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{\phi, \mathbf{k}}(\tau) \right\rangle \left\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \right\rangle \left\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \right\rangle + \\
 & + \left\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{\phi, \mathbf{k}}(\tau) \right\rangle \left\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \right\rangle \left\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \right\rangle. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $\langle z_{\phi, \mathbf{k}}(\tau) \rangle = 0$. Через запятую обозначены корреляторы, например $\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} z_{\phi, \mathbf{k}}(\tau) \rangle$. Пренебрежём корреляторами выше второго порядка в (25). Тогда оставшиеся слагаемые дадут вклад во вторые моменты или квадраты первых: $\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \rangle$ или $\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \rangle \langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \rangle$. Аналогичные рассуждения можно провести для момента $\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{\phi, \mathbf{k}1}(\tau) z_{\phi', \mathbf{k}2}(\tau) \rangle$.

Таким образом, допуская, что можно пренебречь корреляторами выше второго порядка, из приведённого рассуждения следует, что в уравнениях (24) нужно отбросить слагаемые, содержащие $\xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{\phi, \mathbf{k}1}(\tau) z_{\phi', \mathbf{k}2}(\tau)$ и $\xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{\phi, \mathbf{k}}(\tau)$, так как при усреднении они не дают вклад в среднее значение данной моды $\langle \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} \rangle$.

Из этих же соображений в векторе \mathbf{F} , содержащем случайные компоненты, необходимо ограничиться слагаемыми, квадратичными по компонентам вектора \mathbf{q} .

Теперь рассмотрим момент вида $\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{\phi, \mathbf{k}1}(\tau) z_{\phi', \mathbf{k}2}(\tau) \rangle$. Пренебрегая корреляторами выше второго порядка и учитывая, что $\langle z_{\phi, \mathbf{k}}(\tau) \rangle = 0$, для него получим:

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{\phi, \mathbf{k}1}(\tau) z_{\phi', \mathbf{k}2}(\tau) \right\rangle = \\
 & = \left\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \right\rangle \left\langle z_{\phi, \mathbf{k}1}(\tau), z_{\phi', \mathbf{k}2}(\tau) \right\rangle + \\
 & + \left\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{\phi, \mathbf{k}1}(\tau) \right\rangle \left\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{\phi', \mathbf{k}2}(\tau) \right\rangle + \\
 & + \left\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{\phi', \mathbf{k}2}(\tau) \right\rangle \left\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{\phi, \mathbf{k}1}(\tau) \right\rangle + \\
 & + \left\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \right\rangle \left\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \right\rangle \left\langle z_{\phi', \mathbf{k}2}(\tau), z_{\phi, \mathbf{k}1}(\tau) \right\rangle. \quad (26)
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание формулу Фуругцу-Новикова, можно заметить, что второе и третье слагаемые (26) могут содержать компоненты $\sim \langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \rangle$, поэтому слагаемые вида (26) в (24) необходимо сохранить.

Для моментов

$$\left\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{\phi, \mathbf{k}}(\tau) \right\rangle \text{ и } \left\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{\phi, \mathbf{k}1}(\tau) z_{\phi', \mathbf{k}2}(\tau) \right\rangle$$

получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{\phi, \mathbf{k}}(\tau) \right\rangle \approx \left\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \right\rangle \left\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{\phi, \mathbf{k}}(\tau) \right\rangle + \\
 & + \left\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \right\rangle \left\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{\phi, \mathbf{k}}(\tau) \right\rangle, \\
 & \left\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{\phi, \mathbf{k}1}(\tau) z_{\phi', \mathbf{k}2}(\tau) \right\rangle \approx \\
 & \approx \left\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \right\rangle \left\langle z_{\phi, \mathbf{k}1}(\tau), z_{\phi', \mathbf{k}2}(\tau) \right\rangle. \quad (27)
 \end{aligned}$$

Очевидно, слагаемые вида $\xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{\phi, \mathbf{k}}(\tau)$ и $\xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{\phi, \mathbf{k}1}(\tau) z_{\phi', \mathbf{k}2}(\tau)$ должны быть сохранены в (27).

Усредним уравнения (24) по ансамблю реализаций. Ниже приведена структура полученных в результате усреднения уравнений, так как они имеют очень громоздкий вид:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d \langle \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} \rangle}{d\tau} - \lambda_1(\mathbf{k}_u) \langle \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} \rangle = \\
 & + \mathbf{L}_0(\mathbf{k}_u) + \mathbf{L}_I(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u) \langle o_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} \rangle + \\
 & + \mathbf{L}_2(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u, \mathbf{k}_s) \langle o_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} o_{\mathbf{k}''_u}^{(1)} \rangle + \\
 & + \mathbf{L}_3(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u, \mathbf{k}^{IV}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_s) \langle o_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} o_{\mathbf{k}''_u}^{(1)} o_{\mathbf{k}^{IV}_u}^{(1)} \rangle. \quad (28)
 \end{aligned}$$

Отметим здесь, что процедура раскрытия корреляторов будет приводить к появлению аналогичных корреляторов для других взаимодействующих мод. Поэтому эту процедуру нужно проводить до тех пор, пока не будут учтены все слагаемые, содержащие необходимую степень интенсивности флуктуаций. Остальными корреляторами можно пренебречь ввиду их малости, так как после их раскрытия получатся слагаемые, пропорциональные более высокой степени интенсивности шума. В данной работе в выражениях (25)-(27) учтены все члены, дающие в $\mathbf{L}_0(\mathbf{k}_u)$ и $\mathbf{L}_I(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u)$ квадратичные по θ_j слагаемые.

Отметим следующие особенности уравнения (28).

Во-первых, после усреднения системы (24) в (28) возникают дополнительные детерминированные слагаемые (смотреть оператор $\mathbf{L}_0(\mathbf{k}_u)$), не зависящие от $\langle \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)}(\tau) \rangle$, как если бы каждая мода $\langle \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)}(\tau) \rangle$ находилась в поле постоянной силы, зависящей от параметров задачи, вида корреляционной функции g_{ij} , интенсивности флуктуаций и волнового числа данной моды. Наличие таких слагаемых в уравнениях типа (28) обычно приводит к смещению стационарного состояния соответствующего каждой моде.

Во-вторых, в системе (28) возникают дополнительные слагаемые, пропорциональные $\langle \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)}(\tau) \rangle$, что приводит к изменению собственных чисел каждой моды, и, как следствие, к изменению величины области неустойчивости системы (смотреть оператор $\mathbf{L}_I(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u)$), смещению точки бифуркации Тьюринга и изменению скорости образования структур.

Пусть значения θ_j настолько малы, что в (28) можно ограничиться только членами линейными по интенсивности шума. Выделим из $\mathbf{L}_I(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u)$ слагаемые, дающие вклад в собственное значение данной моды. В результате получим дисперсионное уравнение:

$$\lambda = \lambda_1(\mathbf{k}_u) + \mathbf{L}_I(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_u) + \mathbf{L}_I(\mathbf{k}_u, -\mathbf{k}_u). \quad (29)$$

При выводе уравнения (29) учтено, что $\xi_{-\mathbf{k}}^{(j)} = \xi_{\mathbf{k}}^{*(j)} = \xi_{\mathbf{k}}^{(j)}$, так как решения уравнений (28) должны быть действительными. Из выражений (29), $\mathbf{L}_I(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u)$ и $g_{jj} = 2\pi\theta_j k_{jj} / (k^2 + k_{jj}^2)^{3/2}$ видно, что действительная часть собственных значений λ неустойчивых мод пропорциональна интенсивностям флуктуаций θ_j и зависит от радиусов корреляции $r_{jj} = 1/k_{jj}$.

Наконец, обратим внимание на то, что при малой интенсивности флуктуаций параметров процесс образования диссипативных структур происходит за счёт многомодового взаимодействия.

3. Численное моделирование эволюции систем Гирера-Майнхардта и Шеффера

Для подтверждения теоретических выводов, представленных выше, было проведено численное исследование эволюции двух известных систем реакция-диффузия с различными нелинейностями, модифицированных с учётом влияния внешних флуктуирующих полей – систем Гирера-Майнхардта и Шеффера.

Модифицированная система Гирера-Майнхардта представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial \tau} &= \rho_0(1 + f_2(\mathbf{r}, \tau)) + \frac{a^2}{h} - \\ &- \mu_0(1 + f_1(\mathbf{r}, t))a + \Delta a; \\ \frac{\partial h}{\partial \tau} &= a^2 - h + D\Delta h, \\ \rho_0 &= \rho c / vk, \quad \mu_0 = \mu / v, \quad D = D_a / D_h. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь ρ – скорость образования автокаталитической переменной, μ – её постоянная распада, D_a – коэффициент диффузии активатора; v – постоянная скорости распада демпфирующей переменной, член ca^2 задаёт скорость образования ингибитора, D_h – коэффициент диффузии ингибитора. Слагаемое ka^2/h учитывает, что увеличение концентрации ингибитора снижает скорость автокаталитического процесса [4,5].

Модифицированная система Шеффера имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \tau} &= x_1(1 - x_1) - \\ &- \frac{a_0}{r_0}(1 + f_2(\mathbf{r}, \tau)) \frac{x_1 x_2}{(1 + bx_1)} + \nabla^2 x_1; \\ \frac{\partial x_2}{\partial \tau} &= \frac{a_0}{r_0}(1 + f_2(\mathbf{r}, \tau)) \frac{x_1 x_2}{(1 + bx_1)} - \\ &- \frac{m_0}{r_0}(1 + f_1(\mathbf{r}, \tau))x_2 - \frac{g^2 x_2^2}{r_0(1 + h^2 x_2^2)} f + \frac{d_2}{d_1} \nabla^2 x_2. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь x_1 – плотность биомассы популяции фитопланктона, x_2 – плотность биомассы популяции зоопланктона, параметры $r_0, a_0, b, m_0, g, h, f, d_1$ и d_2 подробно описаны в [10,11].

Случайные функции $f_i(\mathbf{r}, t)$ в (30) и (31) определяют пространственные и временные гауссовы флуктуации скорости изменения динамических переменных, с корреляционными функциями вида (4), (13) и нулевыми средними значениями. Взаимная корреляция случайных функций $f_i(\mathbf{r}, t)$ отсутствует.

Для систем (30), (31) были получены уравнения вида (28) и дисперсионные уравнения вида (29). Здесь эти уравнения не приводятся ввиду их громоздкости. Выражения для них можно увидеть в Приложениях к статьям [15,16] на сайте <http://sites.google.com/site/morfoenez/>. В результате численного исследования дисперсионных уравнений

для усреднённых амплитуд неустойчивых мод рассматриваемых систем выявлено наличие общих особенностей их поведения в окрестности точки бифуркации Тьюринга в поле внешних флуктуаций: расширяется область неустойчивости систем; внешние шумы приводят к увеличению инкрементов неустойчивых мод, в результате чего амплитуды неустойчивых мод нарастают быстрее, чем в отсутствие шума, что ускоряет процесс разрушения однородного состояния и образования диссипативных структур; возникает параметрическое возбуждение системы, т.е. точка бифуркации Тьюринга смещается в докритическую область.

На рис. 1 представлены результаты численного моделирования эволюции систем (30), (31) в своих докритических областях. Из рис. 1 видно, что в докритической области образуются шумоиндуцированные диссипативные структуры «солитонного» типа, т.е. возникает неустойчивость типа мягкой моды, вызванная флуктуациями параметров – параметрическая неустойчивость. Видеоизображения, демонстрирующие зависимости процесса структурообразования от параметров внешнего флуктуирующего поля в закритических областях систем (30),(31), представлены на сайте <http://sites.google.com/site/morfoenez/>.

Все результаты численного моделирования эволюции систем (30), (31) в поле мультипликативных флуктуаций параметров соответствуют теоретическим выводам, сделанным выше.

Заключение

В работе исследованы особенности поведения в окрестности точки неустойчивости Тьюринга двухкомпонентных систем реакция-диффузия, находящихся во внешних флуктуирующих полях. Разработан метод получения обобщённых уравнений Гинзбурга-Ландау для систем (3). Метод легко обобщается для случая многокомпонентных систем и произвольного числа флуктуирующих параметров. Показано, что мультипликативные шумы приводят к увеличению инкрементов неустойчивых мод системы (3), ускорению процессов разрушения однородного состояния и образования диссипативных структур, расширению области неустойчивости системы и её параметрическому возбуждению.

Численное моделирование эволюции конкретных систем типа (3) подтверждает сделанные теоретические выводы.

Литература

1. **Bray, M.-A.** Experimental and Theoretical Analysis of Phase Singularity Dynamics in Cardiac Tissue / Bray Mark-Anthony, Shien-Fong Lin, Rubin R. Aliev, Bradley J. Roth, John P. Wikswo // Journal of cardiovascular electrophysiology. – 2001. – Vol. 12, N 6. – P. 716-722.
2. **Castets, V.** Experimental evidence of a sustained standing Turing-type nonequilibrium chemical pattern / V. Castets, E. Dulos, J. Boissonade, P. De Kepper // Phys. Rev. Lett. – 1990. – Vol. 64. – P. 2953-2956.

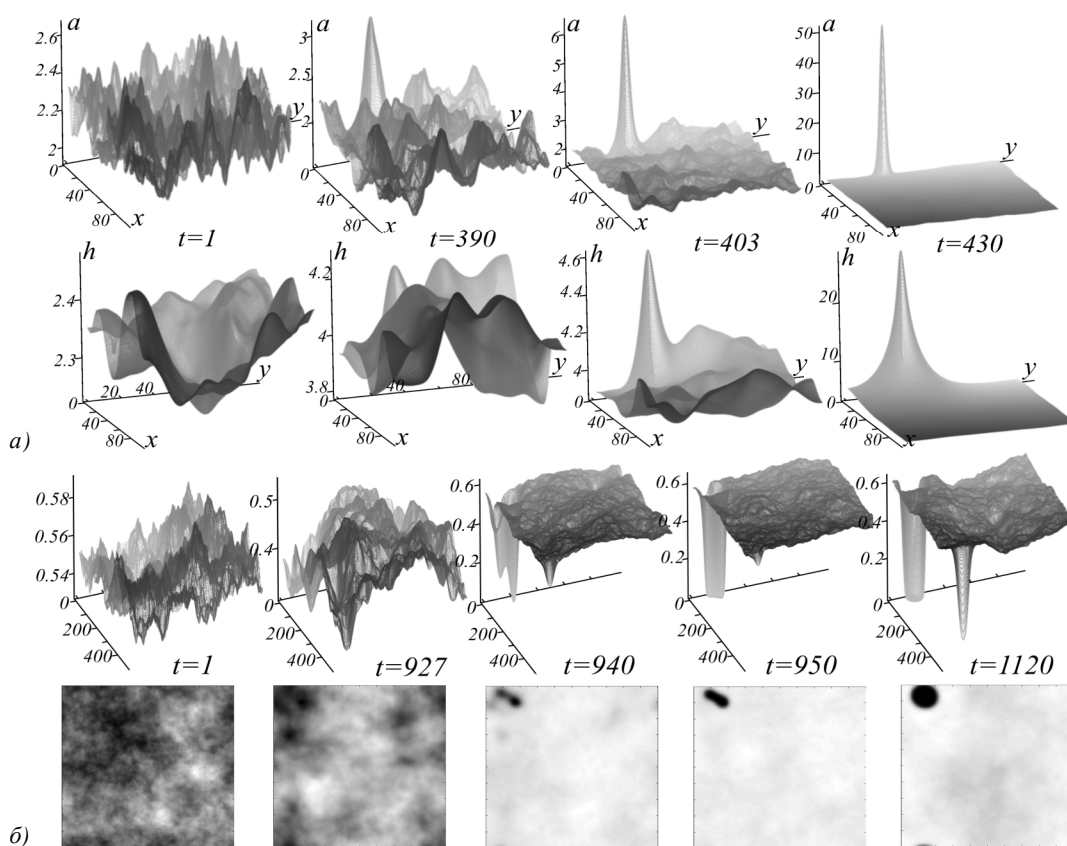


Рис. 1. Формирование диссипативных структур «солитонного» типа при параметрическом возбуждении в докритической области: в модели Гирера-Майнхардта (а), в модели Шеффера (б)

3. **Efimov, I.R.** Dynamics of Rotating Vortices in the Beeler-Reuter Model of Cardiac Tissue / I.R. Efimov, V.I. Krinsky, J. Jalife // *Chaos, Solitons & Fractals*. – 1995. – Vol. 5. N 3/4. – P. 513-526.
4. **Meinhardt, H.** Applications of a theory of biological pattern formation based on lateral inhibition / H. Meinhardt, A. Gierer // *Journ. Cell. Sci.* – 1974. – Vol. 15. – P. 321.
5. **Meinhardt, H.** *The Algorithmic Beauty of Sea Shells* – Berlin, Heidelberg, New York. Springer-Verlag, 1999. – 280 p.
6. **Sun, G.-Q.** Dynamical complexity of a spatial predator-prey model with migration / Gui-Quan Sun, Zhen Jin, Quan-Xing Liu, Li Li // *Ecological modeling*. – 2008. – Vol. 219. – P. 248-255.
7. **Murray, J.D.** *Mathematical Biology* – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. – 576 p.
8. **Malchow, H.** Spatiotemporal patterns in an excitable plankton system with lysogenic viral infection / H. Malchow, F.M. Hilker, R.R. Sarkar, K. Brauer // *Mathematical and Computer Modeling*. – 2005. – Vol. 42. – P. 1035-1048.
9. **Романовский, Ю.М.** Математическое моделирование в биофизике (Введение в теоретическую биофизику) / Ю.М. Романовский, Н.В. Степанова, Д.С. Чернавский – Москва-Ижевск: ИКИ, 2004. – 472 с.
10. **Scheffer, M.** Fish and nutrients interplay determines algal biomass: a minimal model / M. Scheffer // *OIKOS*. – 1991. – Vol. 62. – P. 271-282.
11. **Malchow, H.** Motional instabilities in prey-predator systems / H. Malchow // *J. Theor. Biol.* – 2000. – Vol. 204. – P. 639-647.
12. **Кляцкин, В.И.** *Стохастические уравнения глазами физика* – М.: Физматлит, 2001. – 528 с.
13. **Хакен, Г.** *Синергетика* – М.: Мир, 1980. – 406 с.
14. **Хорстхемке, В.** *Индукцированные шумом переходы: теория и применение в физике, химии и биологии* / В. Хорстхемке, Р. Лефевр – М.: Мир, 1987. – 400 с.
15. **Курушина, С.Е.** Диссипативные структуры в системе «реакция-диффузия» в поле мультипликативных флуктуаций / С.Е. Курушина, А.А. Иванов // *Известия ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика*. – 2010. – № 3. – С. 85-103.
16. **Курушина, С.Е.** Моделирование пространственно-временных структур в системе хищник-жертва во внешней флуктуирующей среде / С.Е. Курушина, И.П. Завершинский, В.В. Максимов, Ю.В. Желнов, А.А. Иванов // *Математическое моделирование*. – 2010. – Т. 22. – № 10. – С. 3-17.
17. **Стратонович, Р.Л.** *Нелинейная неравновесная термодинамика* – М.: Наука, 1985. – 480 с.

References

1. **Bray, Mark-Anthony.** Experimental and Theoretical Analysis of Phase Singularity Dynamics in Cardiac Tissue / Bray Mark-Anthony, Shien-Fong Lin, Rubin R. Aliev, Bradley J. Roth, John P. Wikswo // *Journal of cardiovascular electrophysiology*. – 2001. – Vol. 12, № 6. – P. 716-722.
2. **Castets, V.** Experimental evidence of a sustained standing Turing-type nonequilibrium chemical pattern / V. Castets, E. Dulos, J. Boissonade, P. De Kepper // *Phys. Rev. Lett.* – 1990. – Vol. 64. – P. 2953-2956.

3. **Efimov, I.R.** Dynamics of Rotating Vortices in the Beeler-Reuter Model of Cardiac Tissue / I.R. Efimov, V.I. Krinsky, J. Jalife // *Chaos, Solitons & Fractals*. – 1995. – Vol. 5. – № 3/4. – P. 513-526.
4. **Meinhardt, H.** Applications of a theory of biological pattern formation based on lateral inhibition / H. Meinhardt, A. Gierer // *Journ. Cell. Sci.* – 1974. – Vol. 15. – P. 321.
5. **Meinhardt, H.** *The Algorithmic Beauty of Sea Shells* – Berlin, Heidelberg, New York. Springer-Verlag, 1999. – 280 p.
6. **Sun, G.-Q.** Dynamical complexity of a spatial predator-prey model with migration / Gui-Quan Sun, Zhen Jin, Quan-Xing Liu, Li Li // *Ecological modeling*. – 2008. – Vol. 219. – P. 248-255.
7. **Murray, J.D.** *Mathematical Biology* – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. – 576 p.
8. **Malchow, H.** Spatiotemporal patterns in an excitable plankton system with lysogenic viral infection / H. Malchow, F.M. Hilker, R.R. Sarkar, K. Brauer // *Mathematical and Computer Modeling*. – 2005. – Vol. 42. – P. 1035-1048.
9. **Romanovsky, Yu.M.** *Mathematical modeling in biophysics (The introduction in theoretical biophysics)* / Yu.M. Romanovsky, N.V. Stepanova, D.S. Chernavsky – Moscow-Izhevsk: ICI, 2004. – 472 p. – (In Russian).
10. **Scheffer, M.** Fish and nutrients interplay determines algal biomass: a minimal model // *OIKOS*. – 1991. – Vol. 62. – P. 271-282.
11. **Malchow, H.** Motional instabilities in prey-predator systems / H. Malchow // *J. Theor. Biol.* – 2000. – Vol. 204. – P. 639-647.
12. **Klyatskin, V.I.** *Stochastic equations through the eye of the physicist* – Moscow: “Fizmatlit” Publisher, 2001. – 528 p. – (In Russian).
13. **Haken, H.** *Synergetics* – Moscow: “Mir” Publisher, 1980. – 406 p. – (In Russian).
14. **Horsthemke, W.** *Noise-induced Transitions: theory and application in physics, chemistry, and biology* / W. Horsthemke, R. Lefevr – Moscow: “Mir” Publisher, 1987. – 400 p. – (In Russian).
15. **Kurushina, S.E.** Dissipative structures of reaction-diffusion system simulation in multiplicative fluctuation phone / S.E. Kurushina, A.A. Ivanov // *Izvestiya VUZ. Allied nonlinear dynamics*. – 2010. – № 3. – P. 85-103. – (In Russian).
16. **Kurushina, S.E.** Spatiotemporal pattern of prey-predator system simulation in external fluctuate environment / S.E. Kurushina, Yu.V. Zhelnov, I.P. Zavershinsky, A.A. Ivanov, V.V. Maximov // *Matematicheskoe Modelirovanie*. – 2010. – Vol. 22, N 10. – P. 3-17. – (In Russian).
17. **Stratonovich, R.L.** *Nonlinear nonequilibrium thermodynamics* – M.: “Nauka” Publisher, 1985. – 480 p. – (In Russian).

THE ANALYSIS OF SPATIAL PATTERN FORMATION IN REACTION-DIFFUSION SYSTEM NEAR BIFURCATION

S.E. Kurushina

S.P. Korolyov Samara State Aerospace University

Abstract

Generalized two-component of reaction-diffusion system in external fluctuated environment is considered. Ginzburg-Landau equations under condition of soft mode instability are proposed. The properties of this model in neighborhood of Turing bifurcation point were analyzed. Numerical investigation of specific reaction-diffusion systems was conducted. Agreement of the analytical and numerical results is shown.

Key words: reaction-diffusion system, multiplicative fluctuations of parameters, spatial pattern, unstable modes, Ginzburg-Landau equation, noise-induced parametrical excitation, simulation.

Сведения об авторе



Курушина Светлана Евгеньевна – родилась в 1971 году в Куйбышеве, окончила Самарский государственный университет в 1994 году. После окончания СамГУ работает в Самарском государственном аэрокосмическом университете. Защитила диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук в СГАУ (2002). Опубликовала более 50 научных работ. Область научных интересов: оптика, теория колебаний, волн, структур; динамика нелинейных стохастических систем; теория самоорганизации; прикладная математика; стохастические уравнения.

E-mail: kurushina72@mail.ru.

Svetlana E. Kurushina (b. 1971) graduated from Samara State University in 1994, majoring in Physics. She received her Candidate in Physics & Maths (2002) degree from Samara State Aerospace University. She is co-author of 50 scientific papers. Her current research interests include optics, theory of oscillations, waves, patterns; dynamics of nonlinear stochastic systems, theory of self-organization, applied mathematics, stochastic equation. E-mail: kurushina72@mail.ru.

Поступила в редакцию 3 сентября 2010 г.