

## ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ КОНТУРОВ ИЗОБРАЖЕНИЙ, ЗАДАНЫХ В КОМПЛЕКСНОЗНАЧНОМ ВИДЕ

Хафизов Р.Г., Охотников С.А.

Марийский государственный технический университет

### Аннотация

Рассмотрены вопросы линейной фильтрации непрерывных контуров изображений, заданных в комплекснозначном виде. Проведён анализ свойств контурных линейных фильтров с учётом комплекснозначного характера и свойств замкнутости контура.

**Ключевые слова:** непрерывный контур, комплекснозначный сигнал, линейная фильтрация, согласованный фильтр, инвариантность преобразований.

### Введение

Анализ комплекснозначных сигналов можно рассматривать как математический аппарат, обеспечивающий единый подход к решению задач обработки изображений и сигналов, включающий в качестве частного случая применяемые подходы к обработке вещественных сигналов [1]. Рассмотрение контуров изображений как комплекснозначных сигналов и представление их в линейном комплекснозначном пространстве позволяет получить меру близости двух контуров в виде их скалярного произведения, инвариантную к линейным преобразованиям. При этом особый интерес представляет анализ непрерывных комплекснозначных сигналов, позволяющий в полной мере привлечь в качестве базы теории комплексного переменного [2].

Непрерывный комплекснозначный сигнал  $\mathbf{X} = \{\chi(l)\}_{0,L}$  представляют как непрерывную замкнутую кривую, заданную на комплексной плоскости, в виде  $\chi(l) = \chi_1(l) + i\chi_2(l)$ , где  $i$  – мнимая единица;  $l$  – любое в диапазоне от нуля до  $L$ ;  $L$  – длина контура;  $\chi_1(l)$  и  $\chi_2(l)$  – действительная и мнимая компоненты функции  $\chi(l)$  (рис. 1). С помощью непрерывного комплекснозначного сигнала можно задать контур изображения плоского объекта.

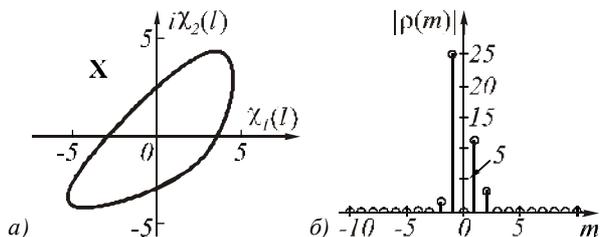


Рис. 1. Пример непрерывного комплекснозначного сигнала: исходный (анализируемый) непрерывный контур (а); амплитудный спектр исходного контура (б)

Спектр комплекснозначного сигнала, в отличие от спектра вещественного сигнала, в общем случае свойством сопряжённой симметрии не обладает [2]. Поэтому при анализе непрерывных комплекснозначных сигналов необходимо учитывать спектральные компоненты как в области положительных, так и в области отрицательных частот (рис. 2). Данный факт

определяет некоторые особенности фильтрации подобных сигналов.

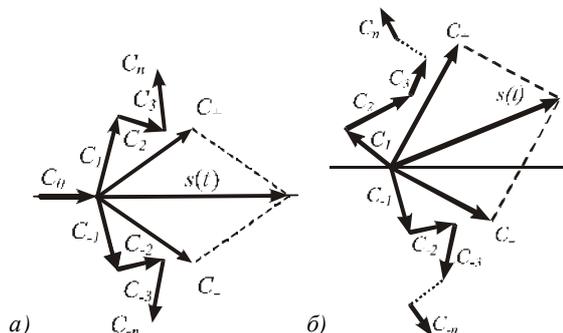


Рис. 2. Графическое отображение ряда Фурье в комплексной форме для вещественного сигнала (а) и комплекснозначного сигнала (б)

Целью данной работы является анализ процесса фильтрации непрерывных комплекснозначных сигналов, задающих контуры изображений плоских объектов.

### 1. Основные соотношения при линейной фильтрации непрерывных комплекснозначных сигналов

Отсчёт выходного сигнала  $\mathbf{H} = \{\eta(l)\}_{0,L}$ , представленный в виде свёртки контуров импульсной характеристики  $\mathbf{\Lambda} = \{\lambda(l)\}_{0,L}$  и входного комплекснозначного сигнала  $\mathbf{X} = \{\chi(l)\}_{0,L}$ , имеет вид

$$\eta(s) = \int_0^L \lambda(l)\chi(s-l)dl. \tag{1}$$

С учётом обратного преобразования Фурье вектора  $\chi(l)$ :

$$\begin{aligned} \eta(s) &= \frac{1}{L} \int_0^L \lambda(l) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho(m) \exp\left\{i \frac{2\pi}{L} m(s-l)\right\} dl = \\ &= \frac{1}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho(m) \omega(m) \exp\left\{i \frac{2\pi}{L} ms\right\} = \\ &= \frac{1}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho_{\text{вых}}(m) \omega(m) \exp\left\{i \frac{2\pi}{L} ms\right\}, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\omega(m) = \int_0^L \lambda(l) \exp\left\{-i \frac{2\pi}{L} ml\right\} dl = \frac{\rho_{\text{вых}}(m)}{\rho(m)} \quad (3)$$

– элементарный вектор контура частотного коэффициента передачи фильтра  $\Omega = \{\omega(m)\}_{-\infty, \infty}$ .

Из выражения (2) следует, что выходной контур  $\mathbf{H}$  равен взвешенной сумме непрерывного эталонного контура (НЭК)  $\mathbf{X}_m = \{\exp\{i(2\pi/L)ml\}\}_{0,L}$ ,  $m = -\infty, \infty$ , весами в которой служат компоненты  $\rho_{\text{вых}}(m)$  контура спектра на выходе фильтра. Таким образом, для получения  $s$ -го мгновенного отсчёта фильтра каждый  $s$ -й элементарный вектор НЭК порядка  $m$ , взятый с весом соответствующей спектральной составляющей  $\rho(m)$ , умножается на комплексное число  $\omega(m)$ , и полученные произведения суммируются, т.е.

$$\eta(s) = \frac{1}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \omega(m) \rho(m) \chi_m(s). \quad (4)$$

Рассмотрим случай простейшей фильтрации в частотной области, когда одни спектральные составляющие фильтруемого контура отбрасываются, т.е. полагаются равными нулю, другие – проходят через фильтр без изменения.

Частотный коэффициент передачи простейшего контурного фильтра состоит из нулей и единиц. Множество номеров элементов частотного коэффициента передачи разобьём на две группы подмножеств: первая группа –  $M_{-0}$  и  $M_{-1}$ ; вторая группа –  $M_{+0}$  и  $M_{+1}$ . Подмножества, содержащие в нижнем индексе ноль, т.е.  $M_{-0}$  и  $M_{+0}$ , включают значения

$m$ , для которых  $\omega(m) = 0$ , а подмножества, содержащие в нижнем индексе единицу, т.е.  $M_{-1}$  и  $M_{+1}$  – значения  $m$ , для которых  $\omega(m) = 1$ . Нижний индекс «-» и «+» обозначает, что подмножества содержат значения  $m$  номеров элементов ЧКП в области отрицательных и положительных частот соответственно, т.е. левее и правее элемента с номером  $m = 0$ .

Простейший низкочастотный фильтр имеет ЧКП вида (рис. 3а)

$$\Omega = \{ \underbrace{\dots, 0, 0}_{M_{-0}}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{M_{-1}}, \omega(0), \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{M_{+1}}, \underbrace{0, 0, \dots}_{M_{+0}} \},$$

а высокочастотный фильтр (рис. 3б):

$$\Omega = \{ \underbrace{\dots, 1, 1}_{M_{-1}}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{M_{-0}}, \omega(0), \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{M_{+0}}, \underbrace{1, 1, \dots}_{M_{+1}} \}.$$

Выходной сигнал фильтра в общем случае равен

$$\mathbf{H} = \frac{1}{L} \left[ \sum_{m \in M_{-1}} \rho(m) \mathbf{X}_m + \omega(0) \rho(0) \mathbf{X}_0 + \sum_{m \in M_{+1}} \rho(m) \mathbf{X}_m \right]. \quad (5)$$

Таким образом, работу линейного фильтра для непрерывных комплекснозначных сигналов можно характеризовать как работу двух фильтров: левого, определяемого совокупностью элементов ЧКП, входящих в подмножество  $M_{-1}$ , и правого – совокупностью элементов ЧКП, входящих в подмножество  $M_{+1}$ . На рис. 4. представлен результат работы простейших линейных фильтров для непрерывного контура, показанного на рис. 1а.

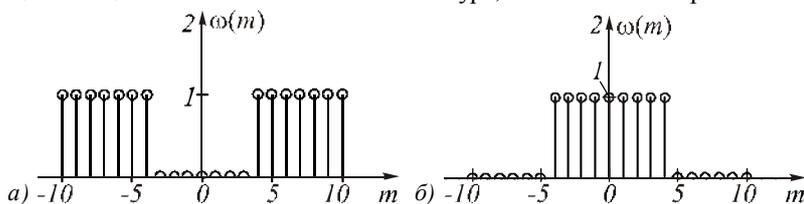


Рис. 3. Частотный коэффициент передачи простейших фильтров – низкочастотного (а) и высокочастотного (б)

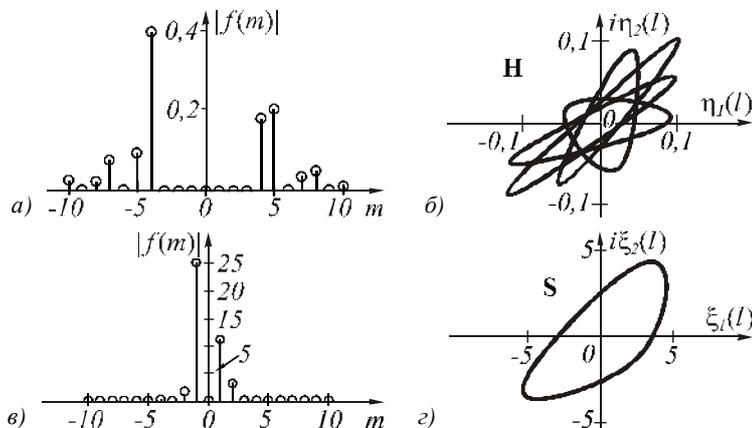


Рис. 4. Пример работы линейного фильтра для непрерывного комплекснозначного сигнала: амплитудный спектр непрерывного контура на выходе низкочастотного фильтра (а); выходной непрерывный контур (б); амплитудный спектр непрерывного контура на выходе высокочастотного фильтра (в); выходной непрерывный контур (г)

Контурный линейный фильтр обладает всеми свойствами, характерными для линейных фильтров вещественных сигналов.

Покажем, что из комплекснозначности представления элементов контура и его замкнутости следуют также и два специфических свойства контурных линейных фильтров.

1. Сравним между собой ЭВ  $\omega(m)$  и  $\omega(-m)$  контура  $\Omega$  частотного коэффициента передачи. С помощью выражения (3) получим

$$\omega(-m) = \int_0^L \lambda(l) \exp\left\{i \frac{2\pi}{L} ml\right\} dl. \quad (6)$$

Сравнивая полученное выражение с выражением (3), приходим к выводу, что только при вещественном характере импульсной характеристики (ИХ) фильтра имеет место симметричность модулей ЭВ контура  $\Omega$  частотного коэффициента передачи фильтра, т.е.

$$\omega(m) = \omega^*(-m); \quad |\omega(m)| = |\omega(-m)|; \\ \arg \omega(m) = -\arg \omega(-m). \quad (7)$$

Таким образом, если ИХ фильтра носит вещественный характер, то АЧХ фильтра, т.е.  $|\omega(m)|$ ,  $m = -\infty, \infty$ , будет симметричной, а фазочастотная характеристика – антисимметричной. В том случае, если ИХ фильтра комплекснозначная, частотный коэффициент передачи (ЧКП) фильтра не обладает свойством сопряжённой симметрии (7).

2. Условие замкнутости выходного контура фильтра. Пусть фильтруемый контур  $X$  замкнут. Тогда нулевая компонента его спектра равна нулю, т.е.  $\rho(0) = 0$ . Учитывая замкнутость НЭК  $X_m$ ,  $m = -\infty, \infty$ , получим

$$\int_0^L \eta(s) ds = 0,$$

т.е. замкнутость входного контура определяет замкнутость выходного контура фильтра при любом виде его ИХ. Отсюда следует периодичность отсчётов фильтра  $\eta(s) = \eta(s \pm \alpha L)$ .

## 2. Согласованная фильтрация непрерывных контуров изображений

Формирование меры схожести двух сигналов является основной задачей при решении вопросов, связанных, в первую очередь, с обнаружением, распознаванием, разрешением, измерением параметров сигналов. Образование данной меры сводится к получению взаимной корреляционной функции (ВКФ) этих сигналов. Рассмотрим два таких сигнала и фильтр, структура которого определена формой первого сигнала и которые преобразуют входной второй сигнал в их ВКФ.

Пусть необходимо получить смещённую на  $L$  ВКФ контуров  $X = \{\chi(l)\}_{0,L}$  и  $Y = \{v(l)\}_{0,L}$ :

$$\eta(s) = \int_0^L \chi(l) v^*(l-s+L) dl \quad (8)$$

с помощью линейного фильтра, заданного в виде свёртки (1). Найдём ИХ  $\Lambda = \{\lambda(l)\}_{0,L}$  такого фильтра. Приравнявая выражения (1) и (8), получим  $v^*(l-s+L) = \lambda(s-l)$ . Введём переменную  $t = s-l$ . Тогда  $l = s-t$ , и последнее выражение примет вид

$$v^*(L-t) = \lambda(t). \quad (9)$$

Запишем выражение (1) с учётом изменения пределов интегрирования при замене переменной  $l$  на  $s-t$ :

$$\eta(s) = \int_s^{s-L} \chi(s-t) v^*(L-t) dt. \quad (10)$$

Величина  $L$  является периодом сомножителей  $\chi$  и  $v$ , т.е.  $\chi(l) = \chi(l \pm \alpha L)$  и  $v(l) = v(l \pm \alpha L)$ , где  $\alpha$  – целое число.

Поэтому результат интегрирования не будет зависеть от порядка интегрирования и интеграл (10) можно записать в тех же пределах, что и интеграл (8):

$$\eta(s) = \int_0^L \chi(s-l) v^*(L-l) dl = \\ = \int_0^L \chi(l) v^*(l-s+L) dl. \quad (11)$$

Выражения (8) и (11) задают в пространственной области линейный фильтр с ИХ  $v^*(L-l)$ , вырабатывающий значения смещённой на  $L$  ВКФ двух контуров. Данное устройство является согласованным фильтром. Особенность его работы для циклически определённых сигналов заключается в более широком условии физической реализуемости.

Отметим также, что ИХ  $\lambda(l)$  фильтра, согласованного с комплекснозначным сигналом, каким является контур, повторяет этот сигнал в обратном порядке с задержкой на  $L$ , составляющей продолжительность сигнала. Это совпадает с результатами согласованной фильтрации вещественных сигналов. Но при согласованной фильтрации комплекснозначного сигнала ИХ фильтра является ещё и комплексно сопряжённой копией этого сигнала.

Рассмотрим теперь контурный согласованный фильтр (КСФ), заданный в частотной области. Частотный коэффициент передачи  $\Omega = \{\omega(m)\}_{-\infty, \infty}$  связан с ИХ  $\Lambda = \{\lambda(l)\}_{0,L}$  прямым преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned}
 \omega(m) &= \int_0^L \lambda(l) \exp\left(-i \frac{2\pi}{L} ml\right) dl = \\
 &= \int_0^L \chi^*(L-l) \exp\left(-i \frac{2\pi}{L} ml\right) dl = \\
 &= \int_L^0 \chi^*(t) \exp\left(-i \frac{2\pi}{L} m(L-t)\right) dt = \\
 &= \int_L^0 \chi^*(t) \exp\left(-i \frac{2\pi}{L} mL\right) \exp\left(i \frac{2\pi}{L} mt\right) dt = \\
 &= \exp\left(-i \frac{2\pi}{L} mL\right) \int_L^0 \chi^*(t) \exp\left(i \frac{2\pi}{L} mt\right) dt = \\
 &= -1 \int_0^L \chi^*(t) \exp\left(i \frac{2\pi}{L} mt\right) dt = \rho^*(m).
 \end{aligned} \tag{12}$$

Данный результат совпадает со случаем согласованной фильтрации вещественных сигналов: частотный коэффициент передачи КСФ с точностью до фазового множителя повторяет комплексно сопряжённый спектр контура, с которым он согласован. Определим спектр  $\mathbf{P}_{\text{вых}} = \{\rho_{\text{вых}}(m)\}_{-\infty, \infty}$  выходного контура  $\mathbf{H} = \{\eta(m)\}_{-\infty, \infty}$  фильтра:

$$\rho_{\text{вых}}(m) = \omega(m)\rho(m) = -\rho^*(m)\rho(m).$$

Здесь  $\{\rho(m)\}_{-\infty, \infty}$  – спектр фильтруемого контура  $\mathbf{X}$ . Если контур  $\mathbf{X}$  согласован с фильтром, то  $\rho_{\text{вых}}(m) = -|\rho(m)|^2$ .

Используя ОПФ, запишем выражение для выходного сигнала фильтра:

$$\begin{aligned}
 \eta(s) &= \frac{1}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho_{\text{вых}}(m) \exp\left(i \frac{2\pi}{L} ml\right) = \\
 &= \frac{1}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\rho(m)|^2 \exp\left(i \frac{2\pi}{L} ml\right).
 \end{aligned} \tag{13}$$

При фильтрации согласованного контура на выходе фильтра образуется контур

$$\eta(s) = \int_0^L \chi(l)\chi^*(l-s+L) dl. \tag{14}$$

Данное выражение задаёт смещённую на  $L$  АКФ фильтруемого контура  $\mathbf{X}$ . В момент  $s = L$  получим

$$\eta(L) = \int_0^L \chi(l)\chi^*(l) dl = \|\mathbf{X}\|^2.$$

Аналогичный результат получается, если воспользоваться выражением (13) для КСФ в частотной области и учесть равенство Парсеваля.

Таким образом, при фильтрации согласованного контура в момент  $L$  образуется действительный отсчёт, равный энергии фильтруемого контура. Для выяснения механизма работы КСФ представим выражение (14) в показательном и тригонометрическом видах:

$$\eta(s) = \int_0^L |\chi(l)| |\chi(l-s+L)| \exp\left(i[\phi(l) - \phi(l-s+L)]\right) dl; \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 \eta(s) &= \int_0^L |\chi(l)| |\chi(l-s+L)| \cos\left(i[\phi(l) - \phi(l-s+L)]\right) dl + \\
 &+ i \int_0^L |\chi(l)| |\chi(l-s+L)| \sin\left(i[\phi(l) - \phi(l-s+L)]\right) dl.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Из выражения (16) следует, что КСФ может быть представлен двумя параллельными звеньями: косинусным и синусным, – формирующими соответственно действительную и мнимую части выходного сигнала  $\eta(l) = \eta_2(l) + i\eta_1(l)$ . При  $s = L$  сигнал на выходе косинусного звена будет равен  $\|\mathbf{X}\|^2$ , а на выходе синусного – нулю.

Выражение (14) можно также рассматривать как развёрнутую запись множества скалярных произведений контура  $\mathbf{X}$  на этот же контур со смещённой начальной точкой, т.е.

$$\eta(s) = (\mathbf{X}, \mathbf{X}^{(L-s)}). \tag{17}$$

При  $s = L$  данное выражение принимает вид  $\eta(L) = (\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \|\mathbf{X}\|^2$ . В соответствии с неравенством

$$\left| (\mathbf{X}, \mathbf{X}^{(d)}) \right| \leq \|\mathbf{X}\| \|\mathbf{X}^{(d)}\|.$$

Так как норма контура не изменяется при варьировании его начальной точки, т.е.  $\|\mathbf{X}\| = \|\mathbf{X}^{(d)}\|$ , то

$$\eta(d) = \left| (\mathbf{X}, \mathbf{X}^{(d)}) \right| \leq \|\mathbf{X}\|^2.$$

Равенство здесь достигается лишь при  $d = 0$ , т.е. при  $s = L$ . Применительно к КСФ это означает, что отсчёт в момент  $s = L$  будет не только вещественной величиной, но и максимально возможным по модулю для любого  $s$ , т.е.

$$\eta(L) = |\eta(s)|, \quad s = 0, 1, \dots, L.$$

КСФ является линейным устройством, и поэтому он обладает всеми рассмотренными свойствами контурных линейных фильтров. Если контур ИХ замкнут, то фильтр не пропускает постоянной составляющей, т.е. его реакция на отрезок прямой линии равна нулю, а если фильтруемый контур замкнут, то замкнутым останется и выходной контур. Любой НЭК проходит через КСФ без искажения формы, а поворот, растяжение и сдвиг начальной точки фильтруемого контура вызывают аналогичное преобразование выходного контура. При этом поворот фильтруемого контура по отношению к эталонному на угол  $\Delta\phi$  приводит к умножению выходного контура на комплексный коэффициент  $\exp(i\Delta\phi)$  и отсчёт КСФ в момент  $s = L$  будет уже не вещественным, а комплексным числом. Сдвиг начальной

точки фильтруемого контура на  $d$  обуславливает та-  
кой же сдвиг максимального по модулю отсчёта КСФ.

Рассмотрим несколько особых свойств КСФ.

Обобщённая инвариантность КСФ к линейным преобразованиям фильтруемого контура. Пронормируем отсчёт КСФ путём его деления на произведе-  
дения норм фильтруемого и эталонного контуров:  
 $\eta_H(s) = \eta(s) / \|\mathbf{X}\| \|\mathbf{Y}\|$ . При  $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$  величина  
 $\eta_H(s_0) = 1$ . Здесь  $s_0$  - отсчёт КСФ с максимальным  
значением модуля. Поскольку при повороте контура  
и сдвиге его начальной точки норма контура не ме-  
няется, то данное соотношение сохраняется при ли-  
нейных преобразованиях фильтруемого контура.  
Если же  $\mathbf{X} \neq \mathbf{Y}$ , то  $\eta(s_0) / \|\mathbf{X}\| \|\mathbf{Y}\|$  и  $\eta_H(s_0) < 1$ . Та-  
ким образом, величина  $\eta_H(s_0)$  инвариантна к ли-  
нейным преобразованиям контура и достигает мак-  
симального значения, равного единице, лишь при  
прохождении через фильтр согласованного контура.  
Поэтому КСФ является устройством, вырабаты-  
вающим количественную меру схожести двух кон-  
туров, двух форм плоских изображений, инвариант-  
ную к масштабу и повороту этих изображений.

Связь между выходным сигналом фильтра  
и ВКФ фильтруемого и эталонного сигналов. Ранее  
было отмечено, что при обработке согласованного  
с фильтром сигнала на выходе образуется смещён-  
ная на  $L$  АКФ этого сигнала. Принимая во внима-  
ние рассмотренные свойства ВКФ и АКФ ком-  
плексных сигналов, уточним характер связи между  
АКФ и выходным сигналом КСФ. Сравнивая между  
собой выражения для АКФ и для выходного сигнала  
(14) согласованного фильтра, приходим к выводу,  
что отношения соответствия между ними имеют вид

$$\eta(s) = \tau(L-s) \text{ и } \tau(s) = \eta(L-s). \quad (18)$$

Отсюда следует, что выходной сигнал КСФ, оп-  
ределяемый выражением (8), представляет собой не  
только сдвинутую на  $L$  АКФ фильтруемого согла-  
сованного сигнала, но и порядки следования у них  
противоположны. Соотношения между выходным  
сигналом  $\eta(s)$  фильтра и ВКФ  $\tau(s)$  контуров про-  
извольного фильтруемого сигнала и ИХ также опре-  
деляются выражениями (18).

Представляет интерес рассмотрение вопроса о том,  
каким образом некоторые свойства АКФ преобра-  
зуются в свойства КСФ.

Свойство АКФ, обуславливающее сопряжён-  
ную симметрию контура АКФ, меняется следую-  
щим образом. С помощью формул (18) определим,  
какому  $\eta(s)$  КСФ соответствует  $\tau(L-s)$  АКФ.  
Вводя новую переменную  $t = L-s$ , найдём, что  
 $\tau(L-s) = \eta(s)$ . Учитывая соотношение  
 $\tau(s) = \tau^*(L-s)$ , окончательно получаем

$$\eta(s) = \eta^*(L-s). \quad (19)$$

Из последней формулы видно, что контуры АКФ  
и КСФ прослеживаются в противоположных на-  
правлениях: первый – против, а второй – по часовой  
стрелке. Выражение (19) показывает, что компонен-  
ты контура  $\mathbf{H}$  расположены симметрично.

Спектральный анализ контуров. Запишем выра-  
жение для прямого ПФ контура  $\mathbf{X}$ :

$$\rho(m) = \int_0^L \chi(t) \exp\left(-i \frac{2\pi}{L} ml\right) dl, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Величина  $\exp(-i(2\pi/L)ml)$  является компонен-  
том элементарного контура  $\mathbf{X}_m$ . Поэтому в соответ-  
ствии с выражением (8) составляющая спектра ис-  
ходного контура может рассматриваться как отсчёт  
фильтра, согласованного с контуром  $\mathbf{X}_m$  в момент  
 $s = L$ , т.е.  $\rho(t) = \eta_t(L)$ . Меняя параметр  $t$ , т.е. по-  
следовательно согласовывая фильтр со всеми ЭК  
при данном значении  $L$ , можно осуществить спек-  
тральный анализ контура на базе алгоритма контур-  
ной согласованной фильтрации. Данное свойство  
КСФ основано на том, что алгоритмы ППФ и согла-  
сованной фильтрации используют скалярное произ-  
ведение векторов.

Выделение главного примитива произвольного  
контура. Как было показано, произвольный контур  
 $\mathbf{X}$  может быть представлен линейной комбинацией  
НЭК  $\mathbf{X}_j$ , весами в которой служат компоненты спек-  
тра. Под главным примитивом контура  $\mathbf{X}$  будем  
понимать контур  $\rho(s)\mathbf{X}_s$  с максимальной энергией,  
т.е.  $\|\rho(s)\mathbf{X}_s\| > \|\rho(m)\mathbf{X}_m\|, m \neq s$ .

Поскольку энергии всех ЭК одинаковы, то глав-  
ный примитив будет соответствовать такому значе-  
нию  $s$ , при котором  $|\rho(s)| > |\rho(m)|$ . Спектр контура  
на выходе КСФ определяется соотношением (13),  
т.е. происходит квадрирование модулей компонент  
спектра. Модуль каждой из них увеличивается  
в  $|\rho(m)|$  раз. Отсюда вытекает достаточно простая  
процедура формирования главного примитива. Для  
этого необходимо провести цепочку согласованных  
фильтраций: после фильтрации исходного контура  
 $\mathbf{X}$  получить контур  $\mathbf{H}_1$ , затем профильтровать кон-  
тур  $\mathbf{H}_1$  согласованным с ним фильтром и получить  
контур  $\mathbf{H}_2$  и т.д. После каждого шага фильтрации  
возрастает степень доминирования компоненты  
спектра  $\rho(m)$  над всеми остальными компонентами  
и последние перестают влиять на процесс образова-  
ния контура. Начиная с определённого  $r$ -го шага,  
контуры  $\mathbf{H}_r$  и  $\mathbf{H}_{r-1}$  практически не отличаются  
друг от друга и их вид определяет главный прими-  
тив контура  $\mathbf{X}$ .

### 3. Согласованная фильтрация зашумлённого непрерывного контура

Рассмотрим случай фильтрации зашумлённого контура  $\mathbf{N} = \mathbf{X} + \mathbf{Z}$ , когда фильтр согласован с контуром  $\mathbf{X}$ . Интерес представляют характеристики выходного контура в момент  $L$  отклика фильтра, когда достигается пиковое значение выходного сигнала КСФ. В соответствии с выражением (8) для данного случая получим

$$\begin{aligned} \eta &= \eta(L) = \int_0^L v(l) \chi^*(l) dl = \\ &= \int_0^L [v_1(l) + i v_2(l)] [\chi_1(l) + i \chi_2(l)] dl = \\ &= \int_0^L \{ [v_1(l) \chi_1(l) + v_2(l) \chi_2(l)] + \\ &+ i [v_2(l) \chi_1(l) - v_1(l) \chi_2(l)] \}. \end{aligned} \quad (20)$$

Покажем, что для случая согласованной фильтрации в момент  $s = L$ , так же как и для случая фильтрации шумового контура  $\mathbf{Z}$ , вещественная и мнимая части выходного вектора будут некоррелированными. Определим вначале математические ожидания  $m_{\eta_1}$  и  $m_{\eta_2}$  величин  $\eta_1$  и  $\eta_2$ :

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \bar{\eta}_1 + i \bar{\eta}_2 = \int_0^L v(l) \chi^*(l) dl = \\ &= \int_0^L [\chi(l) + \zeta(l)] \chi^*(l) dl = \\ &= \int_0^L \chi(l) \chi^*(l) dl + \int_0^L \zeta(l) \chi^*(l) dl = \|\mathbf{X}\|^2. \end{aligned}$$

Таким образом,  $m_{\eta_1} = \|\mathbf{X}\|^2$  и  $m_{\eta_2} = 0$ . Запишем выражение для корреляционного момента величин  $\eta_1$  и  $\eta_2$ :  $K_{\eta_1 \eta_2} = M\{\eta_1, \eta_2\} - m_{\eta_1} m_{\eta_2} = M\{\eta_1, \eta_2\}$ . С учётом (20) будем иметь

$$\begin{aligned} K_{\eta_1 \eta_2} &= \int_0^L [v_1(l) \chi_1(l) + v_2(l) \chi_2(l)] dl \times \\ &\times \int_0^L [v_2(l) \chi_1(l) - v_1(l) \chi_2(l)] dl. \end{aligned}$$

При перемножении интегралов для одного и того же значения аргумента получаются подынтегральные выражения следующих четырёх видов:

$$\begin{aligned} v_1(l) v_2(l) \chi_1^2(l), & \quad -v_1(l) v_1(l) \chi_1(l) \chi_2(l), \\ v_2(l) v_2(l) \chi_1(l) \chi_2(l), & \quad -v_1(l) v_2(l) \chi_2^2(l). \end{aligned}$$

Для неравных между собой значений аргументов в интегралах выражения для  $K_{\eta_1 \eta_2}$  также получаем четыре вида сомножителей, для которых после усреднения можно записать

$$\begin{aligned} v_1(l) \chi_1(l) v_2(l) \chi_1(l) &= \chi_1^2(l) \chi_2(t) \chi_1(t), \\ -v_1(l) \chi_1(l) v_1(l) \chi_2(l) &= -\chi_1^2(l) \chi_1(t) \chi_2(t), \\ v_2(l) \chi_2(l) v_2(l) \chi_1(l) &= \chi_2^2(l) \chi_1(t) \chi_2(t), \\ -v_2(l) \chi_2(l) v_1(l) \chi_1(l) &= -\chi_2^2(l) \chi_1(t) \chi_2(t). \end{aligned} \quad (21)$$

С учётом этого получим  $K_{\eta_1 \eta_2} = 0$ . Таким образом, корреляционный момент вещественной и мнимой частей выходного отклика КСФ равен 0.

Распределение вероятностей вещественной и мнимой частей выходного вектора. Как следует из (20), действительная  $\eta_1$  и мнимая  $\eta_2$  части выходного отклика КСФ будут результатом интегрирования большого количества нормально распределённых величин, и поэтому также имеют нормальное распределение. При этом математические ожидания, дисперсии величин  $\eta_1$  и  $\eta_2$  и их корреляционный момент будут равны:

$$\begin{aligned} m_{\eta_1} &= \|\mathbf{X}\|^2, & m_{\eta_2} &= 0, \\ \sigma_{\eta_1}^2 &= \sigma_{\eta_2}^2 = \sigma^2 \|\mathbf{X}\|^2, & K_{\eta_1 \eta_2} &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Для плотности распределения вероятности величин  $(\eta_1, \eta_2)$  теперь можно записать

$$\begin{aligned} P(\eta) &= P(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \|\mathbf{X}\|^2} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{(\eta_1 - \|\mathbf{X}\|^2)^2 + \eta_2^2}{2\sigma^2 \|\mathbf{X}\|^2}\right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Плотность распределения вероятностей модуля и аргумента выходного вектора. Модуль вектора  $\eta$  и тригонометрическое представление его частей равны  $|\eta|^2 = |\eta_1|^2 + |\eta_2|^2$ ,  $\eta_1 = |\eta| \cos(\phi)$ ,  $\eta_2 = |\eta| \sin(\phi)$ . Якобиан преобразования для определения искомой плотности распределения по-прежнему равен  $|\eta|$ . Тогда

$$\begin{aligned} P(|\eta|, \phi) &= \frac{|\eta|}{2\pi\sigma^2 \|\mathbf{X}\|^2} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{(|\eta| \cos(\phi) - \|\mathbf{X}\|^2)^2 + |\eta|^2 \sin^2(\phi)}{2\sigma^2 \|\mathbf{X}\|^2}\right\} = \\ &= \frac{|\eta|}{2\pi\sigma^2 \|\mathbf{X}\|^2} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{|\eta|^2 + \|\mathbf{X}\|^4 - 2|\eta|^2 \cos(\phi) \|\mathbf{X}\| + |\eta|^2 \sin^2(\phi)}{2\sigma^2 \|\mathbf{X}\|^2}\right\}. \end{aligned}$$

Плотность распределения вероятностей модуля выходного отклика. Интегрируя распределение

$P(|\eta|, \phi)$  по всем значениям аргумента выходного отклика, получим

$$P(|\eta|) = \frac{|\eta|}{\sigma^2 \|\mathbf{X}\|^2} \exp \left\{ -\frac{|\eta|^2 + \|\mathbf{X}\|^4}{2\sigma^2 \|\mathbf{X}\|^2} \right\} \frac{1}{2\pi} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \exp \left( \frac{|\eta| \cos(\phi)}{\sigma^2} \right) d\phi = \frac{|\eta|}{\sigma^2 \|\mathbf{X}\|^2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{|\eta|^2 + \|\mathbf{X}\|^4}{2\sigma^2 \|\mathbf{X}\|^2} \right\} I_0 \left( \frac{|\eta|}{\sigma^2} \right),$$

где  $I_0 \left( \frac{|\eta|}{\sigma^2} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left( \frac{|\eta| \cos(\phi)}{\sigma^2} \right) d\phi$  – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента. Учитывая неотрицательность величины модуля отклика  $\eta$ , для плотности распределения вероятности его модуля можно записать

$$P(|\eta|) = \frac{|\eta|}{\sigma^2 \|\mathbf{X}\|^2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{|\eta|^2 + \|\mathbf{X}\|^4}{2\sigma^2 \|\mathbf{X}\|^2} \right\} I_0 \left( \frac{|\eta|}{\sigma^2} \right), \text{ если } |\eta| > 0, \quad (24)$$

и  $P(|\eta|) = 0$  при  $|\eta| < 0$ .

Данное распределение является распределением Райса. Рассмотрим случай больших отношений сигнал/шум. При этом выходной эффект КСФ в основном определяется контуром фильтруемого изображения, т.е.  $\eta \approx \|\mathbf{X}\|^2 \approx |\eta|$  и  $\|\eta\| \gg \sigma^2$ . При выполнении последнего условия для модифицированной функции Бесселя существует следующее разложение в ряд:

$$I_0(y) = \frac{\exp(y)}{\sqrt{2\pi y}} \left( 1 + \frac{1}{8y} + \frac{9}{2!(8y)^2} + \right. \\ \left. + \frac{225}{3!(8y)^3} + \dots \right), \quad y > 1. \quad (25)$$

В данном случае  $y = |\eta|/\sigma^2$ , и, принимая во внимание (25), получим

$$P(|\eta|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left\{ -\frac{(|\eta| + \|\mathbf{X}\|^2)^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Таким образом, при больших отношениях сигнал/шум модуль выходного отклика КСФ в момент  $s = L$  имеет распределение вероятностей, близкое к нормальному. При этом математическое ожидание модуля отклика  $\eta$  равно  $|\bar{\eta}| = \|\mathbf{X}\|^2$ . Выразим распределение (24) через отношение сигнал/шум  $q_{\text{вых}}$  по длине линии контура на выходе фильтра

$q_{\text{вых}} = \|\mathbf{X}\|^2 / (\sigma_{\text{ex}} \|\mathbf{X}\|) = \|\mathbf{X}\| / \sigma_{\text{ex}}$ . Введя переменную  $v = |\eta| / \sigma_{\text{ex}} = |\eta| / (\sigma_{\text{ex}} \|\mathbf{X}\|)$  и переходя к ней в распределении (24), получим

$$P(v) = P \left( \frac{|\eta|}{\sigma \|\mathbf{X}\|} \right) = v \exp \left\{ -\frac{v^2 + q_{\text{вых}}^2}{2} \right\} I_0(v q_{\text{вых}}).$$

Плотность распределения вероятности аргумента выходного отклика. Интегрируя распределение  $P(|\eta|, \phi)$  по всем значениям модуля, получим

$$P(\phi) = \int_0^{\infty} P(|\eta|, \phi) d|\eta| = \frac{\exp \{ \|\mathbf{X}\|^2 / (2\sigma^2) \}}{2\pi\sigma^2 \|\mathbf{X}\|^2} \times \\ \times \int_0^{\infty} |\eta| \exp \left( -\frac{|\eta|^2 - 2\|\mathbf{X}\|^2 |\eta| \cos(\phi)}{2\sigma^2 \|\mathbf{X}\|^2} \right) d|\eta|.$$

Это выражение приводится к виду

$$P(\phi) = \frac{\exp \{ \|\mathbf{X}\|^2 / (2\sigma^2) \}}{2\pi} + \frac{\|\mathbf{X}\| \cos(\phi)}{2\sqrt{2\pi}\sigma} \times \\ \times \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{\|\mathbf{X}\| \cos(\phi)}{\sqrt{2\pi}} \right) \right) \exp \left( -\frac{\|\mathbf{X}\|^2 \sin(\phi)}{2\sigma^2} \right),$$

где  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$  – функция ошибок.

При  $\|\mathbf{X}\|/\sigma > 3$ , т.е. при достаточно большом отношении сигнал/шум данное распределение переходит в нормальное, а при  $\|\mathbf{X}\|/\sigma \leq 3$  все значения аргумента выходного отклика становятся равновероятными.

При подстановке в качестве независимых переменных в выражение  $k$ -мерной плотности вероятностей  $p(v)$ , найденной в процессе статистического эксперимента  $k$ -мерной выборки  $\{v(l)\}_{0,L}$ , получим функцию  $\Lambda(\mathbf{N})$ , называемую функцией правдоподобия. Эта функция по форме своей записи совпадает с выражением для плотности распределения вероятностей, но зависит уже не от  $v$ , а от параметров данного распределения, т.е. от математического ожидания, дисперсии и др. Функция  $\Lambda(\mathbf{N})$  является мерой схожести распределения  $p(v)$  и распределения, к которому относится выборка  $\{v(l)\}_{0,L}$ .

Найдём выражение для функции правдоподобия зашумлённого контура  $\mathbf{N} = \{v(l)\}_{0,L}$ . Запишем выражение для совместной плотности вероятностей вещественной и мнимой частей ЭВ  $v(l) = v_1(l) + i v_2(l)$ ,  $l \in [0, L]$  зашумлённого контура  $\mathbf{N}$ . При этом учтём, что математические ожида-

ния случайных величин  $v_1(l)$  и  $v_2(l)$  равны  $\overline{v_1(l)} = \chi_1(l) + \zeta_1(l) = \chi_1(l)$ ,  $\overline{v_2(l)} = \chi_2(l) + \zeta_2(l) = \chi_2(l)$ , а их корреляционный момент

$$\begin{aligned} K_{v_1(l), v_2(l)} &= \\ &= \overline{[\chi_1(l) + \zeta_1(l)][\chi_2(l) + \zeta_2(l)]} - \chi_1(l)\chi_2(l) = \\ &= \chi_1(l)\chi_2(l) + \overline{[\zeta_1(l)\chi_2(l)]} + \overline{[\zeta_2(l)\chi_1(l)]} + \\ &+ \overline{[\zeta_1(l)\zeta_2(l)]} - \chi_1(l)\chi_2(l) = 0, \\ \Lambda(\mathbf{N}) &= \Lambda(\mathbf{N} - \mathbf{Z}) = c \exp(-R^2/2\sigma^2), \end{aligned} \quad (26)$$

где  $c = 1/(2\pi\sigma^2)^L$ ;  $R^2 = \|\mathbf{N}\|^2 + \|\mathbf{X}\|^2 - 2\text{Re}(\mathbf{N}, \mathbf{X})$  - квадрат расстояния между эталонным и зашумлённым контуром.

Отсюда становится ясным физический смысл функции правдоподобия зашумлённого контура: если контуры  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{X}$  близки между собой, то  $R^2 \approx 0$  и  $\Lambda(\mathbf{N}) = \Lambda(\mathbf{X} + \mathbf{Z})$ , т.е. равна максимально возможной величине.

### Заключение

В работе рассмотрены вопросы линейной фильтрации непрерывных контуров изображений, заданных в комплекснозначном виде. Проведён анализ свойств контурных линейных фильтров с учётом комплекснозначного характера и свойств замкнутости контура.

Показано, что контурный согласованный фильтр является линейным устройством, и поэтому он обладает всеми рассмотренными свойствами контурных линейных фильтров, а также обладает некоторыми особенностями, главное из которых – это обобщённая инвариантность контурного согласованного фильтра к линейным преобразованиям. Таким образом, контурный согласованный фильтр является устройством, вырабатывающим количественную меру схожести двух контуров, двух форм плоских изображений, инвариантную к масштабу и повороту этих изображений.

### Литература

1. Введение в контурный анализ и его приложение к обработке изображений и сигналов / под ред. Я.А. Фурмана. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
2. **Хафизов, Р.Г.** Анализ непрерывных комплекснозначных сигналов, задающих контуры изображений плоских объектов // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2006. – № 4. – С. 24-27.

### References

1. Contour analysis introduction and its image and signal processing application/ edited by Ya.A. Furman – Moscow: "Fizmatlit" Publisher, 2002. – (In Russian).
2. **Khafizov, R.G.** Analysis of continuous complex-valued signals that define the contours of images of flat objects // A.N. Tupolev Vestnik KGTU. – 2006. – N 4. – P. 24-27. – (In Russian).

## LINEAR FILTERING OF CONTINUOUS CONTOURS OF IMAGES, DEFINED IN A COMPLEX FORM

R.G. Khafizov, S.A. Okhotnikov  
Mari State Technical University

### Abstract

The problems of linear filtering of continuous contours of images, for data in a complex-form are considered. The analysis of the properties of the contour line filter in the light of the nature and properties of complex-closed contour is performed.

**Key words:** continuous contour, complex-valued signal, image processing, linear filtration, contour matched filter.

### Сведения об авторах



**Хафизов Ринат Гафиятуллоевич**, 1972 года рождения, в 1994 году окончил Марийский государственный технический университет (МарГТУ) по специальности «Радиотехника». Кандидат технических наук (1998 год). Профессор кафедры радиотехнических и медико-биологических систем. В 2008 г. окончил докторантуру при МарГТУ. **E-mail:** khafizovrg@marstu.net.

Область научных интересов: цифровая обработка сигналов, обработка и распознавание изображений. Участник работы по 8 Грантам РФФИ и 3 грантам Министерства образования РФ. Автор более 100 научных работ, соавтор 3 монографий, имеет учебно-методические разработки.

**Rinat Gafiyatulloevich Khafizov** (b. 1972) graduated (1994) from the Mari State Technical University (MarSTU) with specialty in radio engineering. He received his Candidate in Technics (1998) degree from the Kazan State Technical University. He finished doctoral studies in MarSTU in 2008. He is holding a position of professor of the department of radio engineering and biomedical systems at MarSTU. **E-mail:** khafizovrg@marstu.net.

His research interests are currently focused on digital signal processing, data processing and image recognition. Participated by 8 RFBR grants and 3 grants of the Ministry of Education. Author of more than 100 scientific papers, co-author of 3 monographs, has the teaching methodologies.



**Охотников Сергей Аркадьевич**, 1982 года рождения, в 2009 году окончил Марийский государственный технический университет (МарГТУ) по направлению «Радиотехника». Обучается в аспирантуре МарГТУ по направлению 05.12.04 «Радиотехника, в том числе системы и устройства радионавигации, радиолокации и телевидения». E-mail: ohotnikovsa@marstu.net.

Область научных интересов: обработка изображений групповых точечных объектов. В списке научных работ Охотникова С.А. 5 статей, 1 авторское свидетельство РФ.

**Sergei Arcadievich Okhotnikov** (b. 1982) graduated (2009) from the Mari State Technical University (MarSTU) in the direction of radio engineering. Enroll in postgraduate school MarSTU at the way of 05.12.04 "Radio engineering, including radio navigation systems and equipment, radiolocation and television". E-mail: ohotnikovsa@marstu.net.

His research interests are currently focused on processing of images of group point objects. He is author of 5 scientific papers and inventor's certificate of Russia Federation.

---

*Поступила в редакцию 2 августа 2010 г.*